

05,07

Модель Изинга с немагнитными примесями на решетке Бете с двумя магнитными подрешетками

© С.В. Сёмкин, В.П. Смагин, А.С. Новак

Владивостокский государственный университет (ВВГУ),
Владивосток, Россия

E-mail: anastasiya-viy.96@mail.ru

Поступила в Редакцию 24 октября 2025 г.

В окончательной редакции 17 марта 2026 г.

Принята к публикации 18 марта 2026 г.

Система с неподвижными замороженными примесями приближенно описывается с помощью подвижных примесей, находящихся в термодинамическом равновесии. Приближение к системе с замороженными примесями осуществляется путем наложения искусственного условия равенства нулю корреляции в расположении примесей в соседних узлах решетки (псевдохаотическое приближение). Для системы с двумя подрешетками псевдохаотическое приближение дополняется условием диффузионной независимости подрешеток. В рамках этого подхода для решетки Бете найдены условия распада системы на магнитные подрешетки и рассчитана магнитная восприимчивость в нулевом внешнем поле.

Ключевые слова: модель Изинга, антиферромагнетик, немагнитное разбавление, температура Нееля.

DOI: 10.61011/FTT.2026.03.62940.296-25

1. Введение

Критическое поведение, фазовые состояния и фазовые переходы в магнитных системах, таких как ферро- и антиферромагнетики могут сильно зависеть от немагнитного разбавления и других типов неупорядоченности [1,2]. Несмотря на то, что исследование неупорядоченных магнитных систем проводится довольно давно, законченной теории фазовых переходов в таких системах пока еще нет [1,2]. Поэтому имеет смысл рассматривать те или иные приближенные способы учета влияния неупорядоченности, в частности немагнитного разбавления.

В настоящей работе мы используем следующий подход к анализу свойств разбавленных магнетиков. Рассмотрим магнетик, в котором магнитные атомы и атомы примеси могут перемещаться и находятся в термодинамическом равновесии. Энергия такой системы определяется не только ориентацией магнитных моментов, но и расположением атомов примеси по узлам решетки. Гамильтониан той или иной модели магнетика с подвижными примесями будет содержать слагаемые, связанных с обменным взаимодействием магнитных атомов и слагаемые, связанных с межатомным взаимодействием в кристаллической решетке, причем равновесное распределение атомов примеси зависит от параметров, характеризующих оба эти типа взаимодействия. Тогда для каждого значения температуры, внешнего магнитного поля и концентрации (доли) магнитных атомов в системе можно подобрать значения параметров межатомного взаимодействия с таким расчетом, чтобы равновесное распределение атомов примеси было бы как можно ближе к случайному. В этом и заключается

псевдохаотическое приближение. В работах [3,4] мы уже применяли этот метод к модели Поттса с немагнитным разбавлением и к разбавленной ферромагнитной модели Изинга на решетках Бете. Поэтому в настоящей работе мы применим описанный подход к антиферромагнитной модели Изинга также на решетке Бете. Критические явления в антиферромагнетиках имеют некоторые особенности, которых нет в ферромагнетиках, например спин-флоп эффект или существование критического поля [5,6] на которые немагнитное разбавление может оказать влияние [2]. В работе рассмотрен двухподрешеточный изинговский антиферромагнетик с немагнитными примесями. Такая модель рассматривалась и ранее [7] и может до некоторой степени описывать, например, антиферромагнетики MnF_2 и FeF_2 с примесями атомов цинка во внешнем магнитном поле [8].

С каждым узлом решетки Бете связана переменная σ_i (псевдоспин), принимающая значение 0, если в узле примесь, и значения +1 и -1, если там магнитный атом с спиновым моментом +1 и -1, соответственно. Большую статистическую сумму системы можно записать в следующем виде:

$$z = \sum_{(\sigma)} \exp \left[\left(\sum_{(i,j)} (J\sigma_i\sigma_j + U\sigma_i^2\sigma_j^2) + \mu\sum_i\sigma_i^2 + H_{ex}\sum_i\sigma_i \right) / kT \right]. \quad (1)$$

Здесь, H_{ex} — внешнее магнитное поле, μ — химический потенциал, J — энергия обменного взаимодействия, U — энергия, связанная с расположением магнитных атомов и атомов примеси, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. То есть модель изинговского магнетика с подвижными примесями можно рассматривать как разновидность модели

Блюма—Эмери—Гриффитса [9], на которую мы накладываем разбиение на подрешетки и условие, связанное с псевдохаотическим приближением [4].

В рамках рассматриваемой модели разделение на ферро- и антиферромагнетики соответствует знаку константы обменного взаимодействия J в статистической сумме (1). При $J > 0$ система является ферромагнитной, а при $J < 0$ — антиферромагнитной. В любом случае при вычислении статсуммы для решетки Бете мы будем предполагать наличие двух подрешеток. Решетку Бете [10] с координационным числом q можно разбить на подрешетки следующим образом. Рассмотрим узел, принадлежащий подрешетке 1. Все соседние узлы (узлы первой оболочки) отнесем к подрешетке 2, соседние к ним узлы — снова к подрешетке 1 и так далее. В результате мы получим разбиение решетки Бете на две подрешетки так, что у каждого узла подрешетки 1 все q ближайших соседей принадлежат подрешетке 2 и наоборот. Разбиение на подрешетки можно провести и для антиферромагнетика, и для ферромагнетика, хотя в последнем случае подрешетки не различаются.

Критерием близости системы с подвижными примесями к системе с замороженными хаотически распределенными примесями будем считать, как и в работах [3,4] равенство нулю ковариации в расположении примесей для соседних узлов решетки. Накладывая условие равенства нулю этой ковариации, получим одну из возможных реализаций псевдохаотического распределения примесей. И хотя такое распределение примесей по узлам решетки не является совершенно случайным, поведение системы с псевдохаотическими подвижными примесями является хорошим приближением для ферромагнетика с замороженными примесями [3,4]. Однако для системы с несколькими подрешетками можно различным образом добиться выполнения условия псевдохаотичности. Возможны по крайней мере два варианта: диффузионное равновесие устанавливается во всей решетке или в каждой подрешетке в отдельности. В настоящей работе мы рассматриваем ситуацию, в которой равновесное распределение примесей достигается в каждой подрешетке независимо. То есть химический потенциал μ_1 в одной подрешетке может не совпадать с химическим потенциалом μ_2 в другой. Разумеется, систему с диффузионно независимыми подрешетками едва ли возможно представить как модель магнетика с подвижными примесями. Однако напомним, что модель с подвижными примесями рассматривается нами не сама по себе, а только как способ приближения к модели с замороженными примесями.

Таким образом, целью настоящей работы является вычисление намагниченностей диффузионно независимых подрешеток в модели Изинга разбавленного магнетика в псевдохаотическом приближении. Кроме того, нашей целью является вычисление магнитной восприимчивости этой системы в нулевом внешнем поле.

2. Намагниченность и концентрация магнитных атомов в подрешетках антиферромагнетика на решетке Бете

Решение задачи с гамильтонианом (1) можно построить как для решетки Бете с граничными узлами (дерево Кейли) [11], так и для внутренней части дерева Кейли (решетка Бете), методом, аналогичным, приведенному в работе [10]. Обозначим σ_1 некоторый псевдоспин, принадлежащий подрешетке 1. На решетке Бете этот узел является корневой точкой, из которой выходят независимых веток. Обозначим $\sigma_i^{(k)}$ псевдоспины, принадлежащие ветке с номером k . Тогда статистическую сумму для системы с гамильтонианом (1) на решетке Бете можно представить в виде

$$z_1 = \sum_{\sigma_1} e^{h\sigma_1 + r_1\sigma_1^2} (G_1(\sigma_1))^q, \quad (2)$$

где

$$G_1(\sigma_1) = \sum_{\sigma_i^{(k)}} e^{K\sigma_1\sigma_i^{(k)} + L\sigma_1^2(\sigma_i^{(k)})^2} \times \exp(\sum_i h\sigma_1\sigma_i^{(k)} + \sum_{(i,j)} K\sigma_i^{(k)}\sigma_j^{(k)}). \quad (3)$$

Вычисляя средние значения $\langle\sigma_1\rangle$ и $\langle\sigma_1^2\rangle$ получим

$$\langle\sigma_1\rangle = \sum_{\sigma_1} \sigma_1 e^{h\sigma_1 + r_1\sigma_1^2} (G_1(\sigma_1))^q / Z_1, \quad (4)$$

$$\langle\sigma_1^2\rangle = \sum_{\sigma_1} \sigma_1^2 e^{h\sigma_1 + r_1\sigma_1^2} (G_1(\sigma_1))^q / Z_1. \quad (5)$$

Обозначим M_1 — среднюю намагниченность спина подрешетки 1 и b_1 — вероятность того, что в узле подрешетки 1 находится магнитный атом. Очевидно, что $\langle\sigma_1\rangle = M_1 b_1$ и $\langle\sigma_1^2\rangle = b_1$. Поэтому

$$M_1 = \frac{e^h - e^{-h}x_1^q}{e^h + e^{-h}x_1^q}, \quad b_1 = \frac{e^h + e^{-h}x_1^q}{e^h + e^{-h}x_1^q + e^{-r_1}y_1^q}, \quad (6)$$

где

$$x_1 = \frac{G_1(-1)}{G_1(+1)} \quad \text{и} \quad y_1 = \frac{G_1(0)}{G_1(+1)}.$$

Взяв теперь в качестве корневой точки узел подрешетки 2, псевдоспин которого обозначим σ_2 , аналогично получим

$$Z_2 = \sum_{\sigma_2} e^{h\sigma_2 + r_2\sigma_2^2} (G_2(\sigma_2))^q, \quad (7)$$

$$M_2 = \frac{e^h - e^{-h}x_2^q}{e^h + e^{-h}x_2^q}, \quad b_2 = \frac{e^h + e^{-h}x_2^q}{e^h + e^{-h}x_2^q + e^{-r_2}y_2^q}, \quad (8)$$

где

$$x_2 = \frac{G_2(-1)}{G_2(+1)} \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{G_2(0)}{G_2(+1)}.$$

а $G_2(\sigma_2)$ определяется аналогично $G_1(\sigma_1)$. (Отметим, что Z_1 и Z_2 — это различные представления одной и той же статистической суммы.) Таким образом, для вычисления средних намагниченностей и концентраций магнитных атомов в подрешетках по формулам (5)

и (7) необходимо знать шесть неизвестных параметров: $x_1, y_1, r_1, x_2, y_2, r_2$. Четыре уравнения, связывающие эти параметры можно получить, используя рекурсивные свойства решетки Бете [10]. А именно, рассмотрим кластер из двух соседних узлов. Первый узел с псевдоспином σ_1 принадлежит подрешетке 1, а второй, с псевдоспином σ_2 — подрешетке 2. С помощью этого кластера можно записать еще одно представление статистической суммы

$$Z_{12} = \sum_{\sigma_1, \sigma_2} \exp(h\sigma_1 + r_1\sigma_1^2 + h\sigma_2 + r_2\sigma_2^2 + K\sigma_1\sigma_2 + L\sigma_1^2(\sigma_2^2)) (G_1(\sigma_1))^{q-1} (G_2(\sigma_2))^{q-1}, \quad (9)$$

используя которое, можно, как и в случае представлений (2) и (7), вычислить средние $\langle \sigma_{1,2} \rangle$ и $\langle \sigma_{1,2}^2 \rangle$, выражая их через эти же шесть параметров. Из представления (9) можно также найти среднее $\langle \sigma_1^2 \sigma_2^2 \rangle$ и ковариацию V квадратов псевдоспинов σ_1^2 и σ_2^2 :

$$V = \langle \sigma_1^2 \sigma_2^2 \rangle - \langle \sigma_1^2 \rangle \langle \sigma_2^2 \rangle. \quad (10)$$

Теперь, как было сказано во Введении, величину L следует выбрать так, чтобы ковариация V была бы равна нулю, в чем и заключается суть псевдохаотического приближения. Значение L , при котором ковариация V обращается в ноль, обозначим \tilde{L} . Приравняв к нулю (10), получим:

$$e^{\tilde{L}} = \frac{e^{-K}(e^{2h} + x_1^{q-1})(e^{2h} + x_2^{q-1})}{x_1^{q-1}x_2^{q-1} + e^{2h-2K}(x_1^{q-1} + x_2^{q-1}) + e^{4h}}. \quad (11)$$

Используя теперь значение \tilde{L} запишем четыре уравнения, связывающие шесть неизвестных параметров $x_{1,2}, y_{1,2}$ и $r_{1,2}$ в псевдохаотическом приближении:

$$y_{1,2} = \frac{x_{1,2}^q + e^{2h}}{x_{1,2}^{q-1} + e^{2h}}, \quad (12)$$

$$e^{-r_{1,2}} y_{1,2}^{q-1} = \frac{e^h(e^{2h} + x_1^{q-1})(e^{2h} + x_2^{q-1}) \times (e^{2h} + e^{2K}x_{1,2}^{q-1} - x_{2,1}(e^{2h+2K} + x_{1,2}^{q-1}))}{(x_{2,1} - 1)(e^{4h+2K} + e^{2h}(x_1^{q-1} + x_2^{q-1}) + e^{2K}x_1^{q-1}x_2^{q-1})}. \quad (13)$$

Значения $M_{1,2}$ и $b_{1,2}$ при этом равны:

$$M_{1,2} = \frac{e^h - e^{-h}x_{1,2}^q}{e^h + e^{-h}x_{1,2}^q}, \quad b_{1,2} = \frac{e^{2h} + x_{1,2}^{q-1}}{e^{2h} + x_{1,2}^{q-1} + e^{h-r_1}y_{1,2}^{q-1}}. \quad (14)$$

Таким образом, кроме уравнений (12) и (13) необходимы дополнительные условия для неизвестных параметров. Будем полагать, что концентрация магнитных атомов (или атомов примеси $1-b$) во всей решетке известна, то есть $(b_1 + b_2)/2 = b$. Однако, для дальнейшего построения псевдохаотического приближения

необходимо еще одно дополнительное условие. Один из вариантов выбора такого условия может состоять в требовании диффузионного равновесия примесей в разных подрешетках. То есть, можно положить $r_1 = r_2$. В этом случае концентрации примесей в подрешетках b_1 и b_2 не могут быть заданы независимо друг от друга. Но так как нашей задачей является построение приближенного решения для замороженных примесей нам, как было сказано во Введении, не обязательно предполагать диффузионное равновесие примесей в подрешетках. Вместо этого в качестве дополнительного условия положим, что $b_1 = b_2 = b$. Именно этот вариант и будет рассмотрен ниже. Уравнения (12) и (13) справедливы как для ферромагнитного взаимодействия между подрешетками ($K > 0$), так и для антиферромагнитного ($K < 0$). Для ферромагнетика условие $b_1 = b_2$ приводит к условию $r_1 = r_2$ так как при этом подрешетки физически не отличаются друг от друга. Однако для антиферромагнетика эти условия в общем случае различны. То есть при $K > 0$ условие $b_1 = b_2 = b$ приводит к псевдохаотическому приближению для разбавленного ферромагнетика [4], а в настоящей работе мы рассмотрим случай $K < 0$.

Исключая теперь $y_{1,2}$ с помощью (12) и сделав замену

$$w_{1,2} = h - \frac{q-1}{2} \ln x_{1,2}$$

приведем выражения (14) к более простому виду

$$\begin{cases} \tau \operatorname{th} w_1 = -F(w_2, b) \\ \tau \operatorname{th} w_2 = -F(w_1, b) \end{cases}, \quad (15)$$

где $\tau = t$ для ферромагнетика и $\tau = -t$ для антиферромагнетика

$$F(w, b) = \frac{\operatorname{th}\left(\frac{h-w}{q-1}\right)}{b + (1-b)\operatorname{th}(w)\operatorname{th}\left(\frac{h-w}{q-1}\right)}, \quad t = \operatorname{th}|K| \quad (16)$$

и

$$M_{1,2} = \operatorname{th}\left(\frac{qw_{1,2} - h}{q-1}\right). \quad (17)$$

Можно показать, что для антиферромагнетика ($\tau = -t$) при любых значениях параметров $h, |K|$ и b у системы (14) существует „диагональное“ решение $w_0 = w_1 = w_2$. Физически это решение соответствует гомогенному состоянию системы — когда намагниченности подрешеток равны и они ничем не отличаются друг от друга. Однако, кроме диагонального решения w_0 у (14), при некоторых значениях параметров существует и недиагональное решение $w_1 \neq w_2$ (соответственно $M_1 \neq M_2$). Будем полагать [5], что когда это гетерогенное решение существует, оно соответствует термодинамически устойчивому состоянию системы. Таким образом, при заданном значении b , фазовая диаграмма системы в общем случае состоит из двух областей, соответствующих гомогенному и гетерогенному состояниям. В координатах $H = h/|K|$ и $T = 1/|K|$ граница

между этими областями определяет линию критических полей $H = H_c(T, b)$, так что, при $H > H_c$ система в гомогенном состоянии, а при $H < H_c$ — в гетерогенном. Для того, чтобы получить уравнение линии критических полей $H = H_c(T, b)$ необходимо рассмотреть переход из гетерогенной фазы в гомогенную как предельный переход $w_1 \rightarrow w_0$ и $w_2 \rightarrow w_0$. Кроме того, в граничной точке $(dw_2/dw_1) = -1$. В результате из (15) получим

$$H_c(T, b)/T = \begin{cases} (q-1) \operatorname{ath} \frac{bx}{1-t(1-b)x^2} + \operatorname{ath} x, & T < T_N, \\ 0, & T \geq T_N, \end{cases} \quad (18)$$

где

$$T_N = 2 / \ln \left(\frac{b+b_c}{b-b_c} \right)$$

— температура Нееля, $b_c = 1/(q-1)$ — порог протекания на решетке Бете, а $x = \operatorname{th}(w_0)$ — корень биквадратного уравнения

$$t^2(1-b)(bq-1)x^4 + bt^2(1-(1-b)q) + t(2-b(q+1))x^2 + b(q-1)t - 1 = 0 \quad (19)$$

удовлетворяющий условию $x^2 \leq 1$:

$$x^2 = \frac{-bR(t) + b(1-(1-b)q)(1-t) + (2-b)bq - 2}{2(1-b)(bq-1)t}, \quad (20)$$

где

$$R(t) = \sqrt{(bq-2)^2 + 2(bq^2(1-b) + bq-2)(1-t) + ((1-b)q-1)^2(1-t)^2}. \quad (21)$$

Из выражения (18) для линии критических полей видно, что разделение на подрешетки возможно только при $T < T_N(b)$, то есть система может распасться на магнитные подрешетки, если концентрация магнитных атомов в каждой подрешетке больше, чем порог протекания на решетке Бете [12].

Для того, чтобы определить поведение линии критических полей $H_c(T, b)$ при малых температурах $T \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 1$), рассмотрим соответствующий предел в выражениях (20) и (21):

$$x^2 = \frac{-b|bq-2| + bq(2-b) - 2}{2(1-b)(bq-1)}. \quad (22)$$

То есть, значение корня (22) при малых T зависит от знака разницы $bq-2$. Это означает, что в псевдохаотическом приближении в системе есть два концентрационных порога — $b_c = 1/(q-1)$ (порог протекания на решетке Бете) и $b_{c1} = 2/q$. (Величина b_{c1} является приближенным значением порога протекания на решетке с координационным числом q , найденным в работе [13].) Если $b \in (b_{c1}, 1)$, то, согласно (22) $x = 1$ а переходя к пределу $t \rightarrow 1$ найдем, что в этом интервале

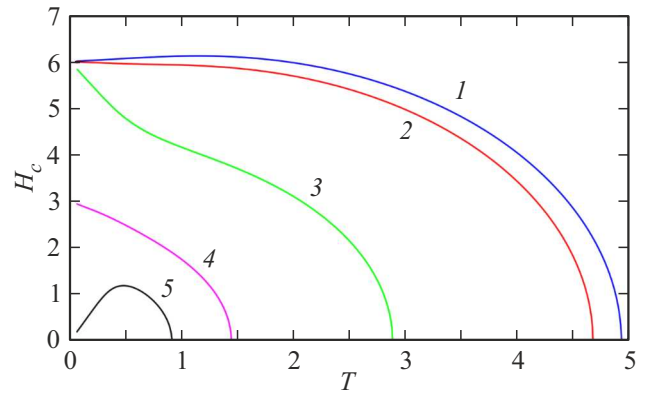


Рис. 1. Линии критических полей разбавленного антиферромагнетика при $q = 6$. Кривые 1–5 соответствуют значениям b , равным 1, 0.95, 0.6, 0.3 и 0.25 соответственно.

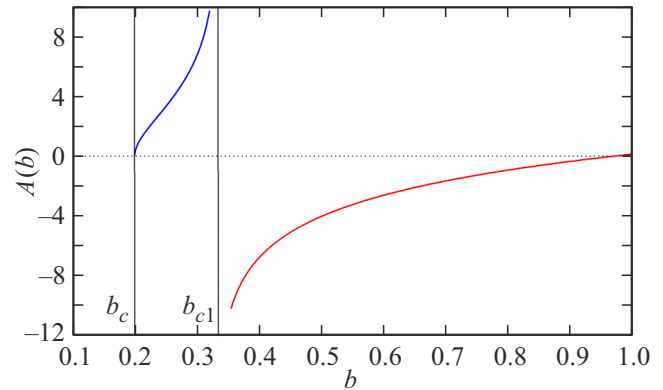


Рис. 2. График функции $A(b)$.

$H_c \rightarrow q$ (рис. 1, кривые 2 и 3), а при $b = b_{c1}$, $H_c \rightarrow q/2$ (рис. 1, кривая 4). Если же $b \in (b_c, b_{c1})$, то $x < 1$ что, согласно (17) означает то, что в пределе $t \rightarrow 1$, $H_c \rightarrow 0$ (рис. 1, кривая 5).

Из рис. 1 видно, что кривые $H_c(T, b)$ при всех значениях b приблизительно линейно зависят от T при малых значениях T : $H_c(T, b) \approx H_c(0, b) + A(b)T$. Но так как функция $H_c(T, b)$ не является аналитической при $T = 0$ мы не можем определять коэффициент $A(b)$ как значение производной по T $H'_c(T, b)$ при $T = 0$. Определим $A(b)$ как наклон секущей $(H_c(\tilde{T}, b) - H_c(0, b))/\tilde{T}$ в точке $\tilde{T} > 0$ в которой этот наклон равен наклону касательной:

$$A(b) = \frac{H_c(\tilde{T}, b) - H_c(0, b)}{\tilde{T}} = H'_c(\tilde{T}, b). \quad (23)$$

(В нашем случае существует единственная точка $\tilde{T} > 0$ удовлетворяющая условию (23).) На рис. 2 показан график $A(b)$ при $q = 6$. Функция $A(b)$ стремится к нулю при $b \rightarrow b_c$, к конечному (зависящему от q), значению при $b \rightarrow 1$ и к $\pm\infty$ при $b \rightarrow b_{c1}$ соответственно слева и справа; $A(b_{c1})$ конечно и при $q = 6$ приблизительно равно -0.905 (рис. 1 и 2).

Из уравнения (18) и рис. 1 видно, что кривые $H_c(T, b)$ обращаются в ноль при $T = T_N(b)$. Из (20) получим, что при $T \rightarrow T_N(b)$

$$x^2 \approx \frac{b^2(q-1)^2}{(q-1)(bq-1)-b} (t-t_N), \quad (24)$$

где $t_N = \text{th}(1/T_N) = b_c/b$, а из (17) получим, что в этом пределе $H_c(T, b) \approx 2T_N(b)x$. Отсюда

$$H_c(T, b) \approx \frac{2\sqrt{b^2-b_c^2}}{\sqrt{b_c}\sqrt{(b-b_c)+bb_c(1-b_c)}} \sqrt{T_N-T}, \quad (25)$$

то есть вблизи температуры Нееля $H_c \sim (T_N - T)^{1/2}$.

Уравнения (18)–(21) позволяют вычислить критическое поле $H_c(T, b)$ при любых значениях концентрации магнитных атомов b в подрешетках антиферромагнетика, превышающих порог протекания. В частности, для чистого антиферромагнетика ($b = 1$) получим при $t > t_N$

$$H_c(t) = \left((q-1) \text{ath} \sqrt{t \frac{t-t_N}{1-tt_N}} + \text{ath} \sqrt{\frac{1}{t} \frac{t-t_N}{1-tt_N}} \right) / \text{ath} t. \quad (26)$$

Поскольку $t_N = 1/(q-1)$, функция $H_c(T)$ зависит от координационного числа q .

Намагниченность на один магнитный атом решетки

$$M = \frac{1}{2} \left(\text{th} \left(\frac{qw_1 - h}{q-1} \right) + \text{th} \left(\frac{qw_2 - h}{q-1} \right) \right), \quad (27)$$

где w_1 и w_2 являются решениями системы (15), которую запишем в универсальной форме как для ферро- так и для антиферромагнетиков:

$$\text{th} \left(\frac{w_{1,2} - h}{q-1} \right) = \frac{\tau b \text{th} w_{2,1}}{1 + \tau(1-b) \text{th} w_1 \text{th} w_2}. \quad (28)$$

Магнитная восприимчивость

$$\chi = \frac{\partial M}{\partial H} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial M}{\partial h}.$$

Продифференцируем (27) и (28) по h и подставим $h = 0$ получим для ферромагнетика

$$\chi_F(T) = \frac{1}{\tau} \text{ch}^{-2} \left(\frac{qw}{q-1} \right) \left(\frac{\Psi(w) + bt}{\Psi(w) - bt(q-1)} \right), \quad (29)$$

а для антиферромагнетика

$$\chi_{AF}(T) = \frac{1}{\tau} \text{ch}^{-2} \left(\frac{qw}{q-1} \right) \left(\frac{\Phi(w) - bt}{\Phi(w) + bt(q-1)} \right), \quad (30)$$

где

$$\Phi(w) = \frac{\text{ch}^2(w) + t(1-b) \text{sh}^2(w)}{\text{ch}^2(w/(q-1))}, \quad (31)$$

$$\Psi(w) = \Phi(w) \frac{1 + t(1-b) \text{th}^2(w)}{1 - t(1-b) \text{th}^2(w)}, \quad (32)$$

а w — решение уравнения

$$\text{th}(w/(q-1)) = \frac{tb \text{th}(w)}{1 + t(1-q) \text{th}^2(w)}. \quad (33)$$

Можно показать, что ненулевое решение (32) существует только при $t > b_c/b$, то есть при температуре $T < T_K$, а при $T \geq T_K$ — только нулевое.

$$T_K = 2 / \ln \left(\frac{b+b_c}{b-b_c} \right)$$

соответствует температуре Кюри для ферромагнетика и температуре Нееля для антиферромагнетика. При $T \geq T_K$ у (32) есть только нулевое решение и восприимчивость

$$\chi(T) = \frac{1}{T} \frac{1 + \tau b}{1 - \tau b/b_c}. \quad (34)$$

Таким образом, при вычислении магнитной восприимчивости разбавленных ферро- ($\tau = t$) и антиферромагнетиков ($\tau = -t$) в псевдохаотическом приближении применительно к решетке Бете получаем известный (см. работу [6]) закон Кюри–Вейса для $T \geq T_K$ (34).

При $T < T_K$ поведение восприимчивости как для ферро (29) так и для антиферромагнетиков (30) зависит от значения концентрации магнитных атомов b . При приближении к критической температуре T_K восприимчивость ферромагнетика (29) растет как $\chi_F \sim (T_K - T)^{-1}$, а для антиферромагнетика (30) стремится к значению

$$\chi_{AF}(T_K) = \frac{1+b_c}{4} \ln \left(\frac{b+b_c}{b-b_c} \right). \quad (35)$$

При $b = 1$ восприимчивость как для ферро-, так и для антиферромагнетиков стремится к нулю при $T \rightarrow 0$ (29)–(30). Однако при любом $b < 1$, то есть при любой степени немагнитного разбавления, из (29)–(30) видно, что при $T \rightarrow 0$ восприимчивость расходится как $1/T$.

3. Заключение

В заключение сформулируем основные результаты настоящей работы:

1. Для приближенного решения задачи о поведении антиферромагнетика с неподвижными (вмороженными) примесями используется решение задачи о намагниченности в системе с подвижными немагнитными примесями, что в свою очередь является частным случаем модели БЭГ для решетки Бете.

2. Задача с неподвижными примесями приближенно решается методом псевдохаотического приближения. Для антиферромагнетика с двумя подрешетками этот метод использует равенство нулю ковариации в расположении примесей в соседних узлах решетки и дополняется условием диффузионной независимости подрешеток.

3. В псевдохаотическом приближении получена система уравнений для определения намагниченностей

подрешеток в зависимости от температуры, величины внешнего магнитного поля и концентрации немагнитных примесей (15)–(17).

4. Найдено выражение (18), определяющее величину критического поля (т.е. поля, при котором система становится гомогенной) в зависимости от температуры и концентрации примесей. Обращение в ноль этого поля происходит при температуре Нееля, для которой получено простое аналитическое выражение

$$\left(T_N = 2 / \ln \left(\frac{b + b_c}{b - b_c} \right) \right).$$

Зависимость критического поля от температуры различна в разных интервалах концентрации немагнитных примесей (22).

5. Рассчитана магнитная восприимчивость системы в нулевом внешнем поле. Восприимчивость антиферромагнетика имеет локальный максимум при температуре Нееля, а для ферромагнетика расходуется при температуре Кюри. При низких температурах восприимчивость как ферро, так и антиферромагнетика стремится к бесконечности при любой ненулевой концентрации примесей, и стремиться к нулю для чистого магнетика.

Эта работа посвящается памяти С.В. Сёмкина (ум. 7 июня 2025 г.), чей вклад в исследования и обсуждения был крайне важен для полученных результатов.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.С. Доценко. УФН **165**, 5, 481–528 (1995).
- [2] Н.А. Богословский, П.В. Петров, Н.С. Аверкиев. Письма в ЖЭТФ **114**, 6, 383–390 (2021).
- [3] С.В. Сёмкин, В.П. Смагин. ЖЭТФ, **148**, 4, 729–733 (2015).
- [4] С.В. Сёмкин, В.П. Смагин, В.С. Тарасов. ЖЭТФ, **161**, 6, 840–846 (2022).
- [5] С.G.V. Garret. J. Chem. Phys. **19**, 1154–1154 (1951).
- [6] С.В. Вонсовский. Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро- и ферримагнетиков. Наука, М. (1971).
- [7] A. Aharony, A. Harris, Y. Meir. Phys. Rev. B, **32**, 5, 3203–3213 (1985).
- [8] F. Ye, L. Zhou, S. Laroche, L. Lu, D.P. Belanger, M. Greven, D. Lederman. Phys. Rev. Lett., **89**, 15, 157202 (2002).
- [9] M. Blume, V.J. Emery, R.B. Griffiths. Phys. Rev. A, **4**, 1071–1077 (1971).
- [10] Р. Бэкстер. Точно решаемые модели в статистической механике. Мир, М. (1985). [R.J. Baxter. Exactly Solved Models in Statistical Mechanics. Academic Press, N.Y. (1982)].
- [11] G. Botirov, F. Haydarov, U. Qayumov. Math. Phys. Anal. Geom., **26**, Art. # 7 (2023). DOI: 10.1007/s11040-023-09448-7
- [12] Дж. Займан. Модели беспорядка: Теоретическая физика однородно неупорядоченных систем. Мир, М. (1982).
- [13] В.И. Белоконов, К.В. Нефедев, М.А. Савунов. ФГТ, **48**, 9, 1649–1653 (2006).

Редактор А.Н. Смирнов