

01,15

Распределение температуры в тонкой цилиндрической проволоке из металла

© Э.В. Завитаев¹, О.В. Русаков², А.И. Уткин², К.Е. Харитонов²

¹ Мытищинский филиал Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана, Мытищи, Россия

² Государственный гуманитарно-технологический университет, Орехово-Зуево, Россия

E-mail: eduardzavitaev@yandex.ru

Поступила в Редакцию 18 мая 2025 г.

В окончательной редакции 1 декабря 2025 г.

Принята к публикации 3 марта 2026 г.

Впервые аналитически решена задача о теплопроводности тонкой цилиндрической проволоки из металла с внутренними источниками тепла при стационарном режиме. Получено уравнение распределения температурного поля по радиусу проволоки с граничными условиями первого рода вследствие выделения джоулевой теплоты при прохождении высокочастотного электрического тока по проводнику с учетом коэффициента зеркальности поверхности проволоки. Отношение радиуса проволоки к длине свободного пробега электронов может быть произвольным. Рассмотрены предельные случаи и проведено обсуждение полученных результатов.

Ключевые слова: уравнение температурного поля, локальная проводимость, коэффициент теплопроводности.

DOI: 10.61011/FTT.2026.03.62926.126-25

1. Введение

Проводящие объекты, характерный поперечный размер которых сравним по порядку величины со средней длиной свободного пробега носителей зарядов, обладают уникальными физическими свойствами [1].

С практической точки зрения наибольший интерес представляет изучение электрических, магнитных и тепловых свойств тонких пленок, проволок и малых частиц [2–8].

Поскольку макроскопическая электродинамика не предполагает учет взаимодействия носителей зарядов с границей проводящего образца, для расчета электромагнитных характеристик указанных объектов становятся не применимыми локальные законы Ома и Джоуля–Ленца. Соответственно, в этом случае необходимо применение кинетического подхода, базирующегося на использовании уравнения Больцмана. Такой подход был разработан и успешно применялся для решения разнообразных задач по расчету коэффициента электропроводности [9,10].

В настоящей работе на основе кинетического подхода впервые установлено распределение температуры внутри тонкой цилиндрической проволоки из металла, в том числе в зависимости от коэффициента зеркальности электронов на ее поверхности.

2. Постановка задачи

Рассматривается цилиндрическая проволока из металла радиуса R и длины L (считаем, что $L \gg R$), к

концам которой приложено переменное электрическое напряжение частоты ω . Принимается, что направление электрического поля совпадает с осью цилиндра, вектор напряженности которого с течением времени изменяется по закону

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cdot \exp(-i\omega t). \quad (1)$$

Распределение температуры внутри проволоки может быть установлено с помощью стационарного уравнения теплопроводности [11,12]

$$\Delta T(r) = -\frac{w}{\lambda}, \quad (2)$$

где $T(r)$ — уравнение температурного поля (r — текущее расстояние от оси проволоки), w — плотность объемного тепловыделения, λ — коэффициент теплопроводности материала проволоки.

Исходя из физического смысла, средняя плотность объемного тепловыделения w представляет собой приходящуюся на единицу объема диссипируемую мощность внутри проволоки. Для расчета w применим закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме [13]:

$$w = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\sigma E_0^2), \quad (3)$$

где σ — коэффициент удельной электропроводности проводника.

3. Расчет температурного поля

Приведем уравнение теплопроводности (2) с учетом (3) в безразмерную форму ($\xi = r/R, d\xi = dr/R$):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = -\frac{w}{\lambda} \Rightarrow \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) = -\frac{R^2}{2\lambda} \operatorname{Re} (\sigma(\xi) E_0^2). \quad (4)$$

Для получения аналитического решения уравнения (4) удобно использовать выражение для коэффициента электропроводности, полученное в работе [14]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma(\xi) &= \sigma_0 \frac{1}{z} (1 + CI_0(z\sqrt{7}\xi)) \\ C &= \frac{q-1}{(1-q)I_0(z\sqrt{7}) + 0.375\sqrt{7}(1+q)I_1(z\sqrt{7})} \end{aligned} \right\}, \quad (5)$$

где $\sigma_0 = ne^2R/mv_F$ — статическая удельная проводимость металла, n — концентрация электронов, e — заряд электрона, m — эффективная масса электрона, v_F — скорость Ферми, $z = x - iy$, $x = R/\Lambda$ ($\Lambda = v_F\tau$, τ — время релаксации электрона), $y = R\omega/v_F$, q — коэффициент зеркальности поверхности проволоки, $I_0(z\xi\sqrt{7})$ и $I_1(z\xi\sqrt{7})$ — модифицированные функции Бесселя 1-го рода:

$$I_0(z\xi\sqrt{7}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha) d\alpha.$$

$$I_1(z\xi\sqrt{7}) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha.$$

Запишем уравнение (4) в виде

$$\xi \frac{dT}{d\xi} = -\frac{R^2 E_0^2}{2\lambda} \int \xi \operatorname{Re} (\sigma(\xi)) d\xi + A.$$

Проинтегрировав последнее выражение по ξ , получим

$$T = -\frac{R^2 E_0^2}{2\lambda} \int \left(\frac{1}{\xi} \int \xi \operatorname{Re} (\sigma(\xi)) d\xi \right) d\xi + A \ln(\xi) + B. \quad (6)$$

Поскольку температура в середине проволоки конечна, необходимо положить коэффициент $A = 0$.

Коэффициент B найдем из граничного условия первого рода на поверхности проволоки:

$$T(\xi)|_{\xi=1} = T_0. \quad (7)$$

$$B = T_0 + \frac{R^2 E_0^2}{2\lambda} \int \frac{1}{\xi} \int \xi \operatorname{Re} (\sigma(\xi)) d\xi d\xi. \quad (8)$$

Посчитаем внутренний интеграл выражения (8):

$$\begin{aligned} \int \xi \operatorname{Re} (\sigma(\xi)) d\xi &= \sigma_0 \operatorname{Re} \int \frac{\xi}{z} (1 + CI_0(z\sqrt{7}\xi)) d\xi \\ &= \sigma_0 \operatorname{Re} \left(\frac{\xi^2}{2z} + \frac{C\xi}{\pi z} \int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{z \sqrt{7} \cos \alpha} d\alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{C}{\pi z} \int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Теперь найдем внешний интеграл выражения (8) с учетом (9) [15]:

$$\begin{aligned} &\int \frac{1}{\xi} \int \xi \operatorname{Re} (\sigma(\xi)) d\xi d\xi \\ &= \sigma_0 \operatorname{Re} \int \frac{1}{\xi} \left(\frac{\xi^2}{2z} + \frac{C\xi}{\pi z} \int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{z \sqrt{7} \cos \alpha} d\alpha \right. \\ &\quad \left. - \frac{C}{\pi z} \int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right) d\xi \\ &= \sigma_0 \operatorname{Re} \left(\frac{\xi^2}{4z} + \frac{C}{\pi z} \left(\int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^\pi \frac{\ln |\xi| + \sum_{i=1}^\infty (\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)^i / i \cdot i!}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right) \right). \end{aligned} \quad (10)$$

С учетом (10) и граничного условия (7) выражение (8) примет вид

$$\begin{aligned} B &= T_0 + \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{2\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{4z} + \frac{C}{\pi z} \left(\int_0^\pi \frac{\exp(z\sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^\pi \frac{\sum_{i=1}^\infty (z\sqrt{7} \cos \alpha)^i / i \cdot i!}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right) \right) \\ &= \left| \frac{\sum_{i=1}^\infty (z\sqrt{7} \cos \alpha)^i / i \cdot i!}{7z^2 \cos^2 \alpha} = \frac{1}{z\sqrt{7} \cos \alpha} + \frac{1}{4} + \frac{z\sqrt{7} \cos \alpha}{18} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(z\sqrt{7} \cos \alpha)^2}{96} + \frac{(z\sqrt{7} \cos \alpha)^3}{600} + \dots \right| \\ &\approx T_0 + \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{2\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{4z} + \frac{C}{\pi z} \left(\int_0^\pi \frac{\exp(z\sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} da - \frac{\pi}{4} \right) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Запишем уравнение температурного поля (6) с учетом (10) и (11):

$$\begin{aligned}
 T &= B - \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{2\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{\xi^2}{4z} + \frac{C}{\pi z} \left(\int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^\pi \frac{\ln |\xi| + \sum_{i=1}^\infty (\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)^i / i \cdot i!}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right) \right) \\
 &= \left| \int_0^\pi \frac{\ln |\xi| + \sum_{i=1}^\infty (\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)^i / i \cdot i!}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \approx \int_0^\pi \left(\frac{\ln |\xi|}{7z^2 \cos^2 \alpha} + \frac{\xi^2}{4} \right) d\alpha = \frac{\pi \xi^2}{4} + \frac{\ln |\xi|}{7z^2} \int_0^\pi \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\pi \xi^2}{4} \right| \\
 &= T_0 + \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{8\lambda} \operatorname{Re} \left(\frac{1 - \xi^2}{z} + \frac{C}{z} \left(\xi^2 - 1 + \frac{4}{\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\exp(z \sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{7z^2 \cos^2 \alpha} d\alpha \right) \right) \right). \tag{12}
 \end{aligned}$$

Подставив константу C из (5) в (12), окончательно получим

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 + \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{8\lambda} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - \xi^2}{z} + \frac{q - 1}{(1 - q)I_0(z\sqrt{7}) + 0.375\sqrt{7}(1 + q)I_1(z\sqrt{7})} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{\xi^2 - 1}{z} + \frac{4}{7\pi z^3} \left(\int_0^\pi \frac{\exp(z\sqrt{7} \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^\pi \frac{\exp(\xi z \sqrt{7} \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} d\alpha \right) \right) \right]. \tag{13}
 \end{aligned}$$

4. Предельные случаи

4.1. Макроскопическая асимптотика

Рассмотрим случай, когда радиус проволоки много больше длины свободного пробега электронов ($R \gg \Lambda$), тогда константа C из (5) стремится к нулю ($C \rightarrow 0$). Тогда из (13) получаем выражение для распределения температуры внутри проволоки, совпадающее с решением классической задачи о теплопроводности однородного цилиндрического стержня [11,12]:

$$T = T_0 + \frac{1}{4\lambda} \left(\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{ne^2 \tau}{m} \frac{E_0^2}{1 - i\omega \tau} \right) \right) (R^2 - r^2) = T_0 + \frac{w}{4\lambda} (R^2 - r^2). \tag{14}$$

4.2. Свободно-электронный режим

Рассмотрим случай, когда радиус проволоки много меньше длины свободного пробега электронов ($R \ll \Lambda$) ($q \neq 1$) и частота электрического поля $\omega = 0$. В этом случае движение электронов характеризуется отсутствием столкновений с узлами кристаллической решетки, и распределение температуры внутри проволоки обусловлено чисто кинетическими эффектами:

$$\begin{aligned}
 T &= T_0 + \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{8\lambda} \operatorname{Re} \left[\frac{1 - \xi^2}{x} + \frac{q - 1}{(1 - q)I_0(x\sqrt{7}) + 0.375\sqrt{7}(1 + q)I_1(x\sqrt{7})} \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{\xi^2 - 1}{x} + \frac{4}{7\pi x^3} \left(\int_0^\pi \frac{\exp(x\sqrt{7} \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} d\alpha - \int_0^\pi \frac{\exp(\xi x \sqrt{7} \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} d\alpha \right) \right) \right] \\
 &= \left| \begin{aligned} I_0(x\sqrt{7}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x\sqrt{7} \cos \alpha) d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + x\sqrt{7} \cos \alpha + \frac{7x^2}{2} \cos^2 \alpha + \dots \right) d\alpha = 1 + \frac{7x^2}{4} \\ I_1(x\sqrt{7}) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \exp(x\sqrt{7} \cos \alpha) \cos \alpha d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cos \alpha + x\sqrt{7} \cos^2 \alpha + \frac{7x^2}{2} \cos^3 \alpha + \dots \right) d\alpha = \frac{x\sqrt{7}}{2} \\ \int_0^\pi \frac{\exp(\xi x \sqrt{7} \cos \alpha)}{\cos^2 \alpha} d\alpha &= \int_0^\pi \frac{1 + \xi x \sqrt{7} \cos \alpha + 3.5x^2 \xi^2 \cos^2 \alpha + \dots}{\cos^2 \alpha} d\alpha = \frac{7\pi \xi^2 x^2}{2} \end{aligned} \right| \\
 &= T_0 + \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{8\lambda} \frac{1}{x} \left(1 - \xi^2 + \frac{q - 1}{(1 - q)(1 + 7x^2/4) + (1 + q)21x/16} (1 - \xi^2) \right) = T_0 + \frac{\sigma_0 R^2 E_0^2}{8\lambda} \frac{1 - \xi^2}{x} \left(1 - \left(1 - \frac{21x}{16} \frac{1 + q}{1 - q} \right) \right),
 \end{aligned}$$

тогда

$$T = T_0 + \frac{21\sigma_0 R^2 E_0^2}{128\lambda} \frac{1+q}{1-q} (1 - \xi^2). \quad (15)$$

5. Обсуждение результатов

Далее выполним численное моделирование полученных результатов. Пусть проволока будет изготовлена из золота, для которого $v_F = 1.4 \cdot 10^6$ м/с, $n = 5.9 \cdot 10^{28}$ м⁻³ и $\lambda = 318$ Вт/(м·К). Приняв длину проволоки $L = 1$ мкм и напряжение, приложенное к ее концам, $U = 1$ В, имеем $E_0 = 10^6$ В/м. Будем считать, что температура поверхности проволоки составляет $T_0 = 353$ К.

Указанные значения напряжения и температуры соответствуют, например, рабочим характеристикам современных процессоров ($U = 1$ В, $\omega = 25 \cdot 10^9$ с⁻¹, $T = 353$ К).

Тогда конкретная оценка приводит к $\sigma_0 = 1.2 \cdot 10^{15}$ R. Положим радиус проволоки $R = 30$ нм. Взяв также усредненное значение коэффициента зеркальности q золота можно построить графики зависимости температуры внутри проволоки от параметров задачи.

На рис. 1 приведены зависимости распределения температурного поля T от безразмерной координаты внутри проволоки ξ для случая, когда все кривые построены при одинаковых значениях безразмерной частоты электрического поля y и коэффициента зеркальности q . При этом безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x принимает различные значения.

Рисунок показывает, что температура внутри проволоки в значительной степени зависит от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов, уменьшаясь по мере увеличения радиуса проволоки.

На рис. 2 представлены графики зависимости распределения температурного поля T от безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x . Все кривые построены для центра проволоки ($\xi = 0$) при одинаковом коэффициенте зеркальности q ; при этом безразмерная частота электрического поля y варьируется для каждой кривой.

Анализируя ход кривых, можно сделать вывод о том, что при относительно небольших значениях радиуса проволоки в ее центре имеет место явно выраженный максимум распределения температурного поля, величина которого определяется безразмерной частотой электрического поля. При дальнейшем увеличении радиуса проволоки данные зависимости выходят на асимптотическое значение.

На рис. 3 построены графики зависимости распределения температурного поля T от безразмерной частоты электрического поля y в центре проволоки ($\xi = 0$). Безразмерная обратная длина свободного пробега электронов x и коэффициент зеркальности q принимают такие же значения, как на рис. 1.

Согласно ходу кривых на рис. 3, наибольшее значение температуры наблюдается внутри более тонких прово-

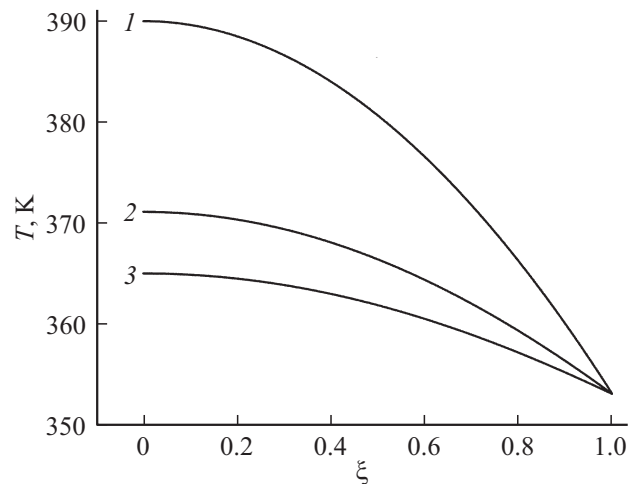


Рис. 1. Зависимость распределения температурного поля T от безразмерной координаты внутри проволоки ξ . Кривая 1 отвечает значению $x = 0.1$; кривая 2 — $x = 0.5$; кривая 3 — $x = 0.9$. Для всех кривых $y = 0$, $q = 0.5$.

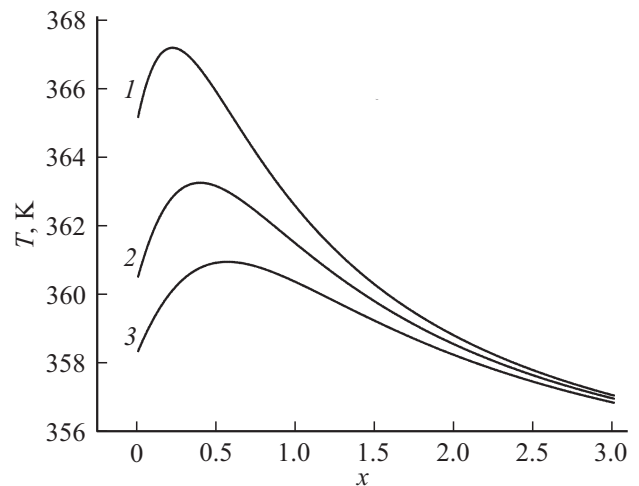


Рис. 2. Зависимость распределения температурного поля T от безразмерной частоты объемных столкновений электронов x . Кривая 1 отвечает значению $y = 0.5$; кривая 2 — $y = 0.7$; кривая 3 — $y = 0.9$. Для всех кривых $\xi = 0$, $q = 0.5$.

лок и несколько уменьшается с увеличением безразмерной частоты. По-видимому, такое поведение кривых связано с уменьшением относительного числа объемных и поверхностных столкновений электронов под действием высокочастотного электрического поля.

На рис. 4 изображены зависимости распределения температурного поля T от коэффициента зеркальности поверхности q на конкретной изотермической поверхности внутри проволоки ($\xi = 0.5$) при фиксированных значениях безразмерной частоты электрического поля y и безразмерной обратной длины свободного пробега электронов x .

Как следует из рисунка, наибольшее влияние коэффициента зеркальности поверхности проявляется в

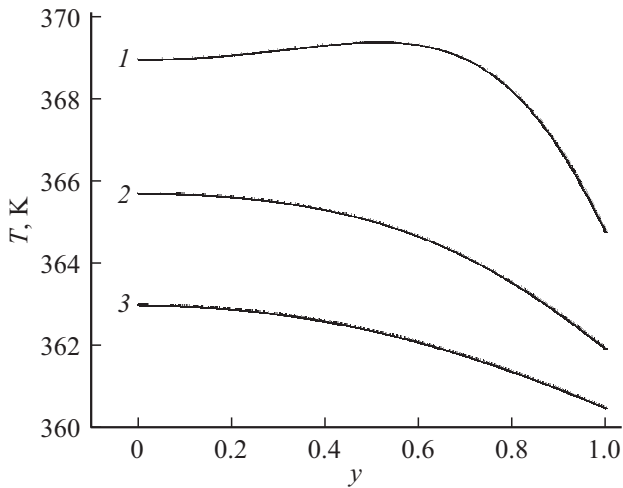


Рис. 3. Зависимость распределения температурного поля T от безразмерной частоты электрического поля y . Кривая 1 отвечает значению $x = 0.1$; кривая 2 — $x = 0.5$; кривая 3 — $x = 0.9$. Для всех кривых $\xi = 0$, $q = 0$.

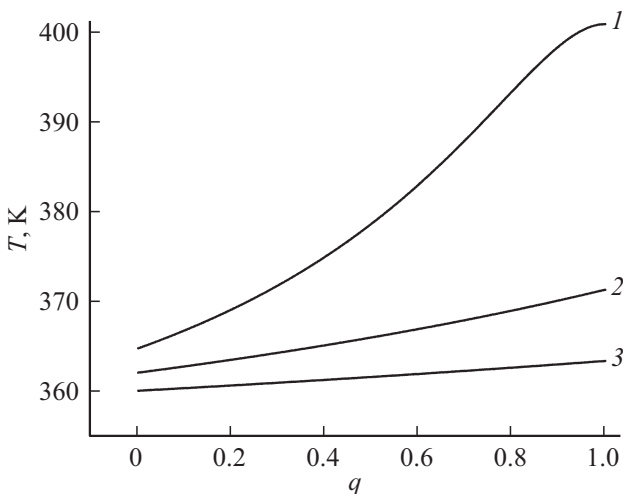


Рис. 4. Зависимость распределения температурного поля T от коэффициента зеркальности поверхности проволоки q . Кривая 1 отвечает значению $x = 0.1$; кривая 2 — $x = 0.5$; кривая 3 — $x = 0.9$. Для всех кривых $\xi = 0.5$, $y = 0.1$.

отношении более тонких проволок и постепенно нивелируется по мере возрастания их радиуса. Такая тенденция распределения температуры объясняется тем, что увеличение коэффициента зеркальности приводит к уменьшению удельного сопротивления проволоки, что, в свою очередь, согласно закону Джоуля–Ленца в дифференциальной форме (3), приводит к увеличению рассеиваемой удельной мощности.

6. Заключение

Поскольку из полученных в статье результатов следует, что прохождение высокочастотного электрического тока, с учетом зеркально-диффузного отражения элек-

тронов от поверхности проводника, вследствие выделения джоулевой теплоты, оказывает значительное влияние на распределение температурного поля по радиусу тонкой цилиндрической проволоки из металла, возникает необходимость применения рассмотренной теории к непосредственному расчету распределения температуры в таких объектах для практических и технических приложений, например, при промышленном изготовлении и эксплуатации интегральных схем и микропроцессоров.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Ю.И. Петров. Физика малых частиц. Наука, М. (1982). 360 с.
- [2] R.B. Dingle. Proc. Roy. Soc. A 201, **1067**, 545 (1950).
- [3] R.G. Chambers. Proc. Phys. Soc. A **65**, 6, 458 (1952).
- [4] M. Kaveh, N. Wiser. J. Phys. F: Met. Phys. **15**, 7, 195 (1985).
- [5] R.N. Gurzhi, A.N. Kalinenko, A.I. Kopeliovich. Solid State Commun. **72**, 8, 777 (1989).
- [6] D. Movshovitz, N. Wiser. J. Phys: Condens. Matter **2**, 40, 8053 (1990).
- [7] R.N. Gurzhi, A.N. Kalinenko, A.I. Kopeliovich, P.V. Pyshkin, A.V. Yanovsky. Low Temp. Phys. **37**, 2, 149 (2011).
- [8] Э.В. Завитаев, О.В. Русаков, А.И. Уткин, К.Е. Харитонов. Микроэлектроника **51**, 2, 148 (2022). [E.V. Zavitaev, O.V. Rusakov, A.I. Utkin, K.E. Kharitonov. Russ. Microelectron. **51**, 2, 104 (2022).]
- [9] Э.В. Завитаев, А.А. Юшканов. Микроэлектроника **37**, 6, 429 (2008). [E.V. Zavitaev, A.A. Yushkanov. Russ. Microelectron. **37**, 6, 373 (2008).]
- [10] И.А. Кузнецова, А.В. Чапкин, А.А. Юшканов. Микроэлектроника **40**, 1, 45 (2011). [I.A. Kuznetsova, A.V. Chapkin, A.A. Yushkanov. Russ. Microelectron. **40**, 1, 40 (2011).]
- [11] А.П. Баскаков, Б.В. Берг, О.К. Витт, Ю.В. Кузнецов, Н.Ф. Филипповский. Теплотехника: Учеб. для вузов / Под ред. А.П. Баскакова. Энергоатомиздат, М. (1991). 224 с.
- [12] А.М. Архаров, И.А. Архаров, В.Н. Афанасьев, В.Л. Бондаренко, Б.П. Борисов, А.А. Жердев, Н.А. Ивашенко, С.И. Исаев, И.А. Кожинов, Н.П. Козлов, В.В. Красников, М.Г. Круглов, В.И. Крутов, В.М. Кудрявцев, А.Г. Кузнецов, А.М. Кутепов, А.И. Леонтьев, Б.И. Леончик, Э.А. Манушин, И.Б. Павлова, Г.Б. Петражицкий, П.И. Пластинин, А.М. Пылаев, М.Ю. Савинов, В.И. Солонин, И.Г. Суровцев, В.И. Шатров, Ю.А. Шевич, И.С. Шумилов. Теплотехника: Учебник для вузов / Под ред. А.М. Архарова, В.Н. Афанасьева. Изд. МГТУ им. Н.Э. Баумана, М. (2004). 712 с.
- [13] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1992). 620 с.
- [14] Э.В. Завитаев, О.В. Русаков, А.А. Юшканов. Вестник МГОУ, сер. Физика-Математика **3**, 83 (2011).
- [15] Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, А.П. Прудников. Таблицы неопределенных интегралов. Физматлит, М. (2003). 200 с.

Редактор Е.В. Толстякова