

03

## Распространение флуктуаций при наличии сдвиговых слоев в течениях вязкой несжимаемой жидкости с вращением

© Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия  
E-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 2 февраля 2026 г.

В окончательной редакции 27 февраля 2026 г.

Принято к публикации 27 февраля 2026 г.

Численно исследовано распространение периодических и случайных во времени флуктуаций скорости в течениях, образованных вращением сферических границ. Все возмущения вносятся в течение колебаниями скорости вращения внутренней сферы. При всех видах шума обнаружены области с равными значениями декрементов затухания пульсаций скорости течения по радиусу. Обнаружены спектры пульсаций скорости течения, аналогичные спектрам турбулентных течений. При удалении от внутренней сферы амплитуды пульсаций скорости течения могут как уменьшаться, так и возрастать в зависимости от вида спектра шума.

**Ключевые слова:** шум, сферическое течение Куэтта.

DOI: 10.21883/0000000000

Распространение возмущений в течениях, генерируемых внешними источниками, включая периодические колебания и шум, изучается уже длительное время [1,2]. Примеры практических приложений таких исследований в технике представлены в [2]. В геофизике представляет интерес использование шума с целью параметризации подсеточных процессов при расчетах турбулентности [3,4]. В исследованиях распространения шума и волн в течениях получен ряд аналитических решений [2,5–7], в основном в одномерной постановке. Рассматриваемое в настоящей работе сферическое течение Куэтта (СТК) — течение вязкой несжимаемой жидкости между коаксиально расположенными сферами, формируемое под действием вращения границ, всегда является трехмерным. При периодическом изменении скорости вращения внутренней сферы относительно состояния покоя наблюдается экспоненциальное по радиусу затухание амплитуды пульсаций азимутальной компоненты скорости [8]. Ранее экспоненциальное затухание шума получено аналитически в одномерном и линейном приближении в пределе высокочастотных спектров [2]. В СТК при колебаниях границы с двумя независимыми частотами характер затухания может меняться вследствие нелинейного взаимодействия высокочастотной и низкочастотной мод (см., например, рис. 6 из работы [8]). В [9] посредством прямого расчета получены интегральные свойства течений, вызванных вращением границ с равными угловыми скоростями, при добавлении шума в сигнал скорости вращения. Но распространение шума по сферическому слою в [9] не изучалось. Экспериментально при вращении только внутренней сферы получены амплитуды флуктуаций скорости для двух видов шума [10]. Распространение флуктуаций скорости в трехмерных течениях вязкой несжимаемой жидкости

со сдвиговыми слоями и вращением ранее не исследовалось, и это является целью настоящей работы.

Источником возмущений в настоящей работе являются периодические и случайные во времени флуктуации с нулевым средним значением, вносимые в скорость вращения внутренней сферы. Далее рассматривается распространение флуктуаций в течениях. В природных системах зависимость спектра мощности шума от частоты  $f$  может иметь вид  $1/f^\alpha$ ,  $0 < \alpha < 2$  [11]. В настоящей работе выбраны шумы с  $\alpha = 0.1, 1$  и  $2$ . Рассматриваются два вида течений, устойчивых при стационарном вращении границ, формирующихся при однонаправленном (с равными угловыми скоростями) и при встречном вращении сфер. В обоих случаях в течении формируется сдвиговый слой. В первом случае это параллельный оси вращения цилиндрический сдвиговый слой [9,12]. Во втором случае сдвиговый слой разделяет области с противоположным направлением как азимутальной скорости, так и меридиональной циркуляции [13]. Течения рассматриваются в сферическом слое относительной толщины  $\delta = (r_2 - r_1)/r_1 = 1$ ,  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы внутренней и внешней границ соответственно. Рассматриваемые течения описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \text{rot} \mathbf{U} - \text{grad} \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{U}^2}{2} \right) - \nu \text{rot} \text{rot} \mathbf{U},$$

$$\text{div} \mathbf{U} = 0,$$

$\mathbf{U}$  — поле скорости,  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости в слое. На границах ставятся условия прилипания и непротекания, используется сферическая система координат с радиальным ( $r$ ), полярным ( $\theta$ ) и азимутальным ( $\varphi$ ) направлениями:  $u_\varphi(r = r_k) = \Omega_k(t)r_k \sin \theta$ ,  $u_r(r = r_k) = 0$ ,

$u_\theta(r = r_k) = 0$ ,  $k = 1, 2$ ,  $k = 1$  — внутренняя сфера,  $k = 2$  — внешняя,  $u_\varphi$ ,  $u_r$ ,  $u_\theta$  — соответственно азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости,  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  — средние угловые скорости вращения границ. Использовался численный метод с конечно-разностной схемой дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полуявной схемой Рунге–Кутты третьего порядка точности для интегрирования по времени. Алгоритм исследован в [14], а в случае трехмерной задачи с использованием неравномерных по  $r$  и  $\theta$  сеток — в [15]. В схеме интегрирования по времени проводятся оценка локальной погрешности и автоматический выбор шага по времени [14]. При дискретизации по пространству сохраняется ряд свойств уравнений Навье–Стокса: например, сохранение кинетической энергии нелинейными членами и членами с градиентом давления [14]. При внесении шума, и периодических колебаний все компоненты скорости течения зависят от времени, но существующие при стационарном вращении границы симметрии относительно оси вращения и экватора сохраняются. При внесении шума в случае сонаправленного вращения сфер при  $Re_1 = (\Omega_1 r_1^2)/\nu = 500$ ,  $\Omega_2 = \Omega_1$  это подтверждено трехмерными расчетами в [9], а в случае встречного вращения при  $Re_1 = (\Omega_1 r_1^2)/\nu = 280$  и  $Re_2 = (\Omega_2 r_2^2)/\nu = -700$  — в настоящей работе. Сохранение осевой симметрии течения определялось по значению предложенной в [14] величины  $A_{3D}$ :

$$A_{3D}(t) = \frac{1}{V} \sum_{\beta} \int_V (u_{\beta}(r_i, \theta_j, \varphi_k, t) - u_{\beta av}^{\varphi}(r_i, \theta_j, t))^2 dv_{ijk},$$

$$\beta = r, \theta, \varphi,$$

$$u_{\beta av}^{\varphi}(r_i, \theta_j, t) = \frac{1}{K_{\varphi}} \sum_1^{K_{\varphi}} u_{\beta}(r_i, \theta_j, \varphi_k, t).$$

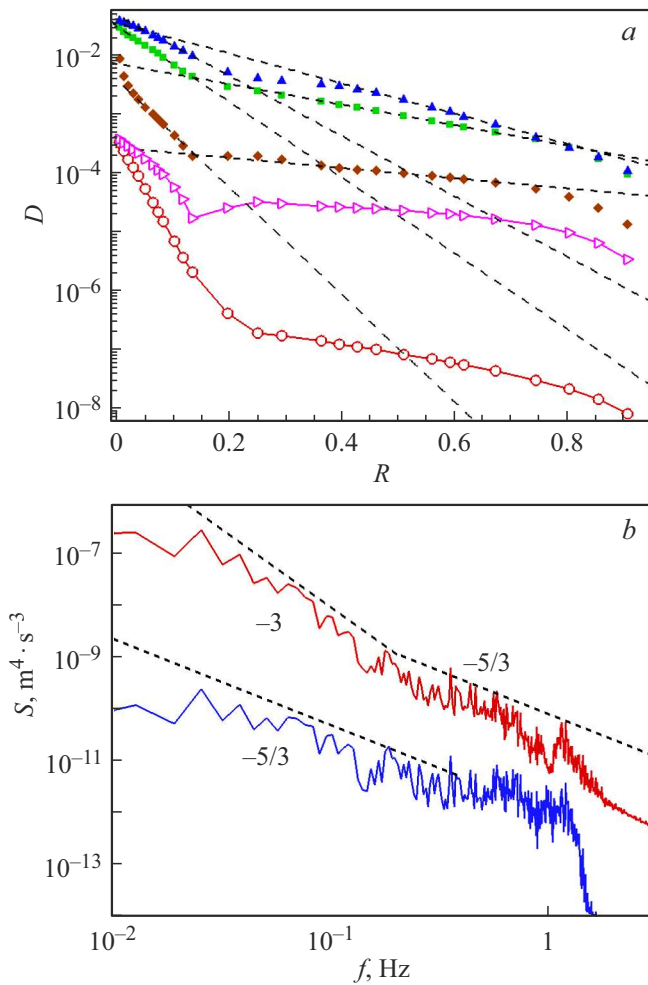
Здесь  $u_{\beta}(r_i, \theta_j, \varphi_k, t)$  и  $u_{\beta av}^{\varphi}(r_i, \theta_j, t)$  — одна из компонент скорости и ее осредненное по углу  $\varphi$  значение,  $K_{\varphi}$  — количество узлов в азимутальном направлении,  $V$  — объем сферического слоя. Расчеты показали, что в случае встречного вращения границ при отсутствии шума  $A_{3D} < 5 \cdot 10^{-17}$ , а при внесении шума значение  $A_{3D} < 8 \cdot 10^{-17}$ , что свидетельствует о сохранении осесимметричности течения с шумом. Далее представлены результаты, полученные в расчетах с условиями симметрии относительно оси вращения и плоскости экватора. Дискретизация по пространству проводилась с уменьшением размера ячеек вблизи границ по  $r$  с отношением максимального размера ячейки к минимальному 2. Зависимость результатов от параметров расчетной сетки при сонаправленном вращении рассматривалась в [9], была выбрана расчетная сетка, которая используется и в настоящей работе. В случае встречного вращения сходимость результатов к одним и тем же значениям при увеличении количества узлов сетки показана в таблице на примере

Зависимость значений меридиональной  $E_{\psi}$  и азимутальной  $E_{\varphi}$  компонент кинетической энергии течений от количества узлов расчетной сетки  $G$  в случае встречного вращения сферических границ

$G, 10^4$	$E_{\psi}, 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}^2$	$E_{\varphi}, 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}^2$
0.29	2.452	8.927
0.45	2.443	8.924
0.88	2.435	8.922
1.46	2.432	8.921
1.80	2.431	8.920
2.00	2.431	8.920

азимутальной  $E_{\varphi}$  и меридиональной  $E_{\psi}$  компонент кинетической энергии течения.  $E_{\varphi}$  и  $E_{\psi}$  определяются интегрированием соответствующих компонент скорости течения по всему объему сферического слоя:  $E_{\varphi} = \int u_{\varphi}^2(r, \theta, t)$ ,  $E_{\psi} = \int (u_r^2(r, \theta, t) + u_{\theta}^2(r, \theta, t))$ . В случае сонаправленного вращения количество узлов расчетной сетки составляло  $3.864 \cdot 10^4$ , при встречном вращении —  $1.8 \cdot 10^4$ . Расчеты проводились с постоянным шагом по времени:  $dt = 6 \cdot 10^{-4} \text{ с}$  в первом случае и  $dt = 1 \cdot 10^{-2} \text{ с}$  во втором. Использовались размерные параметры, соответствующие условиям проведения экспериментов [13]:  $\nu = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $r_2 = 0.15 \text{ м}$ ,  $r_1 = 0.075 \text{ м}$ . При периодических возмущениях скорость вращения внутренней границы изменялась по закону  $\Omega(t_j) = \Omega_1 + A \sin(2\pi f t_j)$ ,  $A$  и  $f$  — амплитуда и частота возмущения. При внесении шума  $\Omega(t_j) = \Omega_1 + N r n(j)$ , где  $N = \frac{1}{\Omega_1} \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{j=1}^K (\Omega(t_j) - \Omega_1)^2}$  — амплитуда шума,  $r n(j)$  — псевдослучайное число из последовательности длиной  $K$  со стандартным нормальным распределением и нулевым средним значением,  $j$  — счетчик шагов по времени. Последовательность случайных чисел рассчитывалась для каждого вида шума заранее. Расчеты проводились при  $N = 0.04$ ,  $K = 3 \cdot 10^4$  в случае встречного вращения границ и  $K = 7 \cdot 10^5$  в случае однонаправленного вращения.

Сначала рассмотрим течения при однонаправленном вращении сфер. На рис. 1, а и 2 представлены зависимости нормированных значений среднеквадратичных отклонений (амплитуды) пульсаций скорости  $D$  от нормированного расстояния между сферами  $R$ . Здесь  $D = (\text{rms } u_{\varphi})/(\Omega_1 r_1)$ ,  $R = (r - r_1)/(r_2 - r_1)$ ,  $r$  — расстояние от центра сфер,  $\text{rms } u_{\varphi} = \sqrt{\frac{1}{K-1} \sum_{i=1}^K (u_{\varphi N}(t_i) - \bar{u}_{\varphi N})^2}$ ,  $u_{\varphi N}(t_i)$  — мгновенное значение азимутальной скорости в присутствии подводимых возмущений, правое слагаемое — осредненное значение скорости  $u_{\varphi N}(t_i)$ . При внесении как периодических, так и случайных во времени флуктуаций на всех широтах вблизи внутренней сферы видны участки быстрого

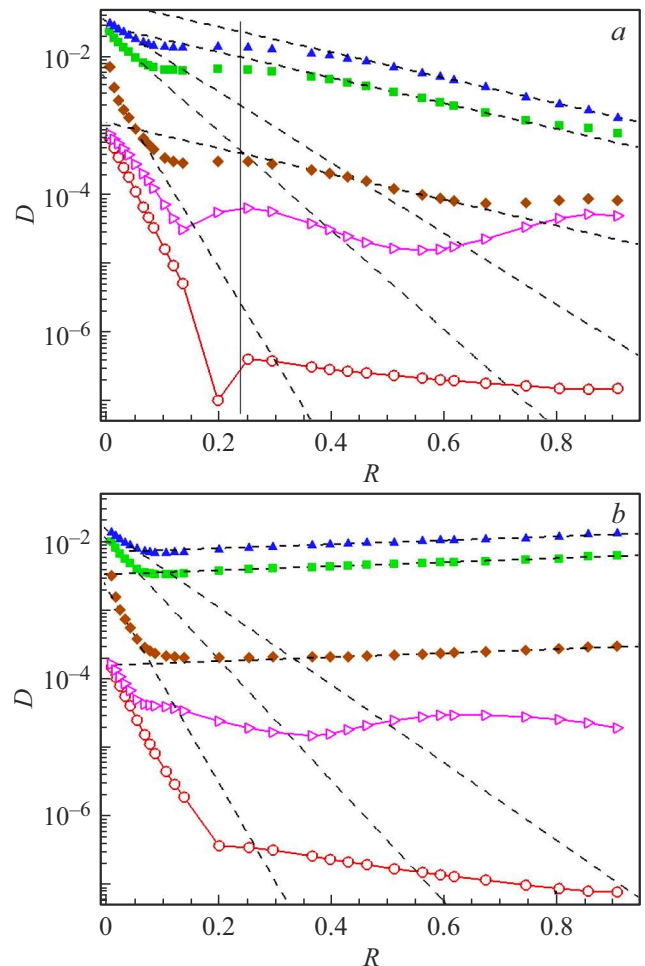


**Рис. 1.** *a* — зависимость амплитуды  $D$  от расстояния между сферами  $R$  в экваториальной плоскости ( $\theta = \pi/2$ ) в случае однонаправленного вращения границ. Закрашенные символы — шум, незакрашенные — периодические колебания, для наглядности последние сдвинуты вниз по оси ординат (уменьшены в 50 раз). Синие треугольники —  $\alpha = 2$ , зеленые квадраты —  $\alpha = 1$ , коричневые ромбы —  $\alpha = 0.1$ , сиреневые треугольники —  $f = 0.7$  Hz ( $2\pi f < 2\Omega_1$ ), красные кружки —  $f = 4$  Hz ( $2\pi f > 2\Omega_1$ ). Штриховые линии — аппроксимация участков с постоянными значениями декрементов затухания. *b* — спектры азимутальной скорости в случае однонаправленного вращения границ. Сверху (красная линия) — при  $\alpha = 1$ ,  $R = 0.51$ ,  $\theta = 0.3\pi$ , снизу (синяя линия) — при  $\alpha = 0.1$ ,  $R = 0.56$ ,  $\theta = 0.12\pi$ . Штриховые линии — аппроксимация участков с постоянными значениями наклона спектров. Цветной вариант рисунков представлен в электронной версии статьи.

экспоненциального затухания амплитуды пульсаций скорости  $D$  (рис. 1, *a* и 2). На экваторе (рис. 1, *a*) вблизи  $R = 0.14$  декременты затухания для всех видов шума скачком уменьшаются. Изменение характера затухания шума связано со структурой течения:  $R = 0.14$  на экваторе соответствует центру сдвигового слоя (середине расстояния между внутренней сферой и линией раздела циркуляций на рис. 2, *a* из

работы [9]). В диапазоне  $0 < R < 0.14$  наиболее быстрое затухание  $D$  по мере удаления от внутренней сферы (рис. 1, *a*) происходит в случае шума с наклоном спектра  $\alpha = 0.1$ , самое медленное — с  $\alpha = 2$ . Также на рис. 1, *a* представлены зависимости изменения  $D$  от  $R$  при периодических колебаниях скорости вращения внутренней границы. Рассматривались колебания на частоте  $f = 0.7$  Hz, которая находится в диапазоне существования инерционных волн ( $2\pi f < 2\Omega_1$ ), и на частоте  $f = 4$  Hz (вне этого диапазона). Вблизи  $R = 0.14$  декременты затухания периодических возмущений меняются, особенно сильно на частоте  $f = 0.7$  Hz. При колебаниях на частоте  $f = 4$  Hz наблюдаются самые низкие значения  $D$ .

Изучение трансформации спектров по мере распространения подводимого шума началось давно [2] и

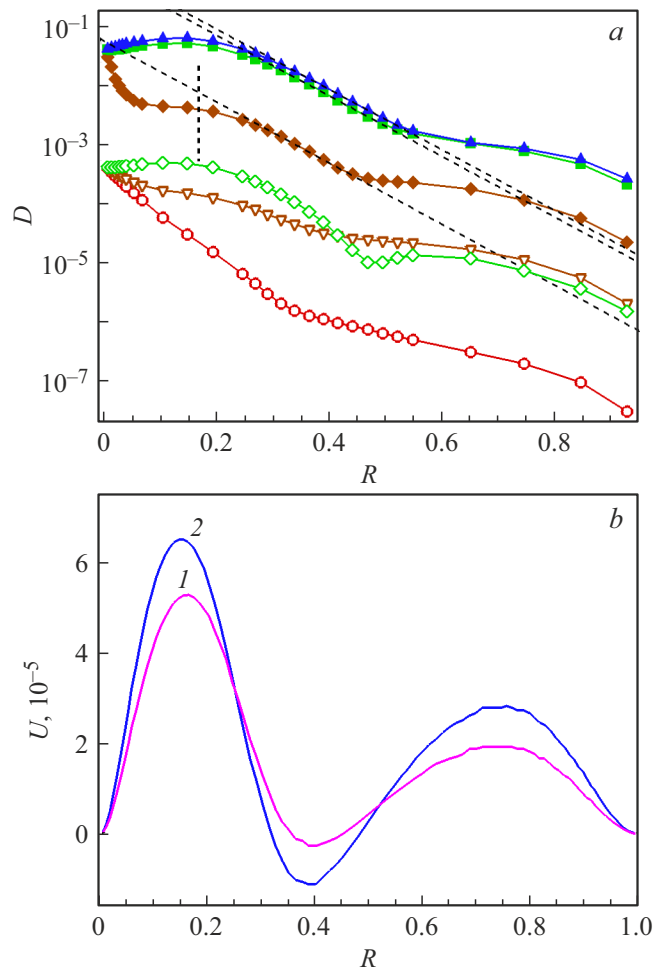


**Рис. 2.** Зависимость амплитуды  $D$  от расстояния между сферами  $R$  в случае однонаправленного вращения границ. *a* — на средних широтах ( $\theta = 0.3\pi$ ), *b* — вблизи оси вращения ( $\theta = 0.12\pi$ ). Вертикальная линия на части *a* соответствует положению сдвигового слоя при  $\text{Re} \rightarrow \infty$ . Обозначения те же, что на рис. 1, *a*. Для наглядности представлению, соответствующие периодическим колебаниям (кривые сиреневого и красного цвета), сдвинуты вниз по оси ординат (*a* — уменьшены в 20 раз, *b* — уменьшены в 40 раз).

продолжается в настоящее время [16]. На рис. 1, *b* приведены спектры пульсаций азимутальной скорости в середине слоя. Обнаружено, что наклоны спектров в диапазоне частот, не превышающем частоту вращения внутренней сферы, равны наклонам спектров турбулентных течений и зависят от значений  $\alpha$ ,  $R$  и  $\theta$ . Так, спектр шума с  $\alpha = 0.1$  вблизи оси вращения преобразуется в спектр с постоянным наклоном  $-5/3$ , который соответствует спектрам трехмерной турбулентности с прямым каскадом передачи энергии (нижняя кривая на рис. 1, *b*). Верхняя кривая на рис. 1, *b* с наклоном спектра  $-3$  на низких частотах и наклоном  $-5/3$  на более высоких частотах качественно похожа на спектры турбулентности в верхних слоях атмосферы и получена при добавлении шума с  $\alpha = 1$ . Оба вида спектров наблюдались ранее как в экспериментах, так и при прямом численном моделировании турбулентности в СТК [13]. Если в экваториальной плоскости качественный характер затухания  $D$  при распространении шума и периодических колебаний одинаков (рис. 1, *a*), то вне экватора появляются отличия (рис. 2). При всех видах шума на средних широтах (рис. 2, *a*) наблюдаются участки течения между сдвиговым слоем и внешней сферой, на которых значения декрементов затухания одинаковы:  $\ln D \approx -BR$ , где  $B = 4.29 \pm 0.02$ . Протяженность таких участков зависит от вида шума (наименьшая при  $\alpha = 0.1$ ). Распространение периодических колебаний на средних частотах имеет более сложный характер. Вблизи оси вращения (рис. 2, *b*) при всех видах шума присутствуют участки увеличения  $D$  с одинаковыми значениями инкрементов нарастания. На этих участках  $\ln D \approx AR$ , где  $A = 6.72 \pm 0.05$ . При периодических колебаниях на частоте  $f = 4$  Hz вблизи оси вращения наблюдается только затухание амплитуды пульсаций скорости  $D$ . Во всех случаях отклонение от средних значений декрементов затухания/нарастания шума не превышает 0.75%. Практически во всех областях течения выполняется условие  $D_2 > D_1 > D_{0.1}$ , где нижний индекс соответствует значению  $\alpha$  (рис. 1, *a* и 2), т.е. с увеличением  $\alpha$  увеличивается амплитуда пульсаций скорости  $D$ . Это позволяет объяснить полученные ранее в [9] интегральные результаты, согласно которым при одной и той же амплитуде шума средне-квадратичные отклонения пульсаций азимутальной компоненты кинетической энергии течений более чем на порядок выше при  $\alpha = 1$  по сравнению со случаем  $\alpha = 0.1$ .

При встречном вращении границ в экваториальной плоскости течения в зависимости от частоты периодических колебаний и вида спектра шума в отличие от однонаправленного вращения границ наблюдается как падение, так и возрастание амплитуды пульсаций скорости  $D$  (рис. 3, *a*). В области между внутренней сферой и линией нулевой азимутальной скорости ( $0 < R < 0.15$ ) при внесении низкочастотных периодических колебаний ( $f = 0.05$  Hz) и шумов с наклонами спектров  $\alpha = 1$  и 2 величина  $D$  возрастает. При

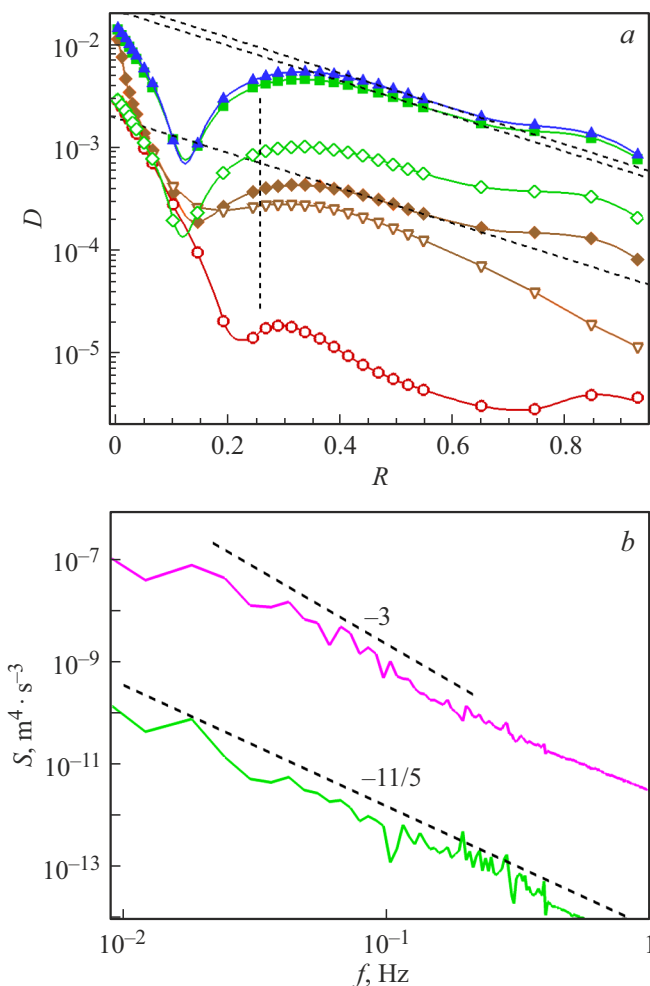
высокочастотных колебаниях ( $f = 0.3$  и 1 Hz) и шуме с  $\alpha = 0.1$  наблюдается снижение  $D$ . Можно предположить, что причина разного поведения  $D$  заключается в изменении интенсивности средних течений, генерируемых возмущениями. Различная интенсивность средних течений обнаружена ранее в [9] в случае однонаправленного вращения при  $\alpha = 0.1$  и 1. Рассмотрим нормированную разность радиальных компонент скорости:  $U = (u_{r\alpha} - u_{r0.1})/\Omega_1 r_1$ , где  $u_{r\alpha}$  — осредненные во времени значения радиальной скорости при  $\alpha = 1$  или 2, а  $u_{r0.1}$  — осредненная во времени радиальная



**Рис. 3.** *a* — зависимость амплитуды  $D$  от расстояния между сферами  $R$  в экваториальной плоскости в случае встречного вращения границ. Закрашенные символы — шум, незакрашенные — периодические колебания, для наглядности последние сдвинуты вниз по оси ординат (уменьшены в 100 раз). Синие треугольники —  $\alpha = 2$ , зеленые квадраты —  $\alpha = 1$ , коричневые ромбы —  $\alpha = 0.1$ . Наклонные линии — аппроксимация участков с постоянными значениями декрементов затухания. Вертикальная линия соответствует нулевой азимутальной скорости. Зеленые ромбы —  $f = 0.05$  Hz, коричневые треугольники —  $f = 0.3$  Hz, красные кружки —  $f = 1$  Hz. *b* — нормированная разность радиальных скоростей  $U = (u_{r\alpha} - u_{r0.1})/\Omega_1 r_1$  в зависимости от  $R$  в экваториальной плоскости в случае встречного вращения границ.  $\alpha = 1$  (1) и 2 (2).

скорость при  $\alpha = 0.1$  (рис. 3, *b*). Отметим, что положение максимумов  $U$  близко к положению максимумов амплитуды пульсаций скорости  $D$  на рис. 3, *a*. Таким образом, одной из вероятных причин различного характера изменения амплитуд пульсаций скорости при разных  $\alpha$  является рост радиальной скорости при увеличении значений  $\alpha$ .

При встречном вращении границ (рис. 3, 4), как и при однонаправленном, при одном и том же удалении от внутренней сферы наименьшие значения  $D$  наблюдаются в случае шума с наклоном спектра  $\alpha = 0.1$ . При периодических колебаниях  $D$  при одних и тех же  $R$  уменьшается с ростом частоты. При встречном вращении в течении также наблюдаются участки с



**Рис. 4.** *a* — зависимость амплитуды  $D$  от расстояния между сферами  $R$  вблизи оси вращения ( $\theta = 0.12\pi$ ). Обозначения те же, что на рис. 3, *a*. Для наглядности представления, соответствующие периодическим колебаниям (зеленые, коричневые и красные кривые с незакрашенными символами), сдвинуты вниз по оси ординат (уменьшены в 5 раз). *b* — спектры азимутальной скорости в случае встречного вращении сферических границ при  $\alpha = 2$  и  $\theta = \pi/2$ . Сверху (сиреневая линия) — при  $R = 0.145$ , снизу (зеленая линия) — при  $R = 0.93$ . Штриховые линии — аппроксимация участков с постоянными значениями наклона спектров.

равными значениями декрементов затухания для всех видов шума (рис. 3, *a* и 4). Эти участки начинаются за линией нулевой азимутальной скорости (вертикальные линии на рис. 3, *a* и 4, *a*), но не доходят до внешней границы. На экваторе (рис. 3, *a*)  $\ln D \approx -BR$ , где  $B = 11.8 \pm 0.1$ . Вблизи оси вращения (рис. 4, *a*) постоянное значение декремента затухания может быть представлено в виде  $\ln D \approx -BR$ ,  $B = 3.97 \pm 0.02$ . В то же время в случае периодических колебаний как на экваторе, так и вблизи оси вращения зависимости декрементов затухания от  $R$  более сложные и зависят от частоты возмущения. В случае встречного вращении для спектров пульсаций азимутальной скорости на экваторе (рис. 4, *b*) наблюдаются наклоны, характерные для турбулентных течений:  $-3$  вблизи внутренней сферы и  $-11/5$  вблизи внешней сферы. Спектры с наклоном  $-3$ , соответствующие двумерной турбулентности с обратным каскадом передачи энергии, получены в СТК численно и экспериментально в [13]. Спектры с наклоном  $-11/5$ , соответствующие трехмерной турбулентности с прямым каскадом передачи энергии, наблюдались в экспериментах [17].

Таким образом, для двух разных течений с разными сдвиговыми слоями установлено следующее. Рассматриваемые виды шума при их распространении могут преобразовываться в возмущения со всеми известными к настоящему времени для турбулентности в сферических слоях спектрами. Возможности формирования турбулентных спектров зависят от  $\alpha$ : чем больше значение  $\alpha$ , тем в большей части течения они наблюдаются. При  $\alpha = 0.1$  и однонаправленном вращении границ такие спектры наблюдаются при  $R > 0.5$ , при встречном вращении — в большей части слоя ( $0.93 > R > 0.14$ ). При встречном вращении границ слоя в зависимости от вида возмущений может наблюдаться как увеличение, так и уменьшение амплитуды пульсаций азимутальной скорости. В области между сдвиговым слоем и внешней сферой обнаружены участки с одинаковыми значениями декрементов экспоненциального затухания пульсаций скорости течения по мере удаления от источника шума — внутренней сферы. Характер распространения периодических колебаний меняется в зависимости от частоты и может как совпадать, так и отличаться от распространения шума.

## Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-27-00044).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Ю.А. Степанянц, А.Л. Фабрикант, УФН, **159** (1), 83 (1989). DOI: 10.3367/UFNr.0159.198909c.0083 [Yu.A. Stepanyants, A.L. Fabrikant, Sov. Phys. Usp., **32**, 783 (1989). DOI: 10.1070/PU1989v032n09ABEH002757].
- [2] О.В. Руденко, УФН, **149** (3), 413 (1986). DOI: 10.3367/UFNr.0149.198607c.0413 [O.V. Rudenko, Sov. Phys. Usp., **29**, 620 (1986). DOI: 10.1070/PU1986v029n07ABEH003460].
- [3] P. Perezhugin, L. Zanna, C. Fernandez-Granda, J. Adv. Mod. Earth Syst., **15**, e2023MS003681 (2023). DOI: 10.1029/2023MS003681
- [4] K. Singh, A. Komrakova, Phys. Fluids, **36**, 015126 (2024). DOI: 10.1063/5.0187580
- [5] В.А. Гусев, О.В. Руденко, Акуст. журн., **69** (3), 304 (2023). DOI: 10.31857/S032079192360004X [V.A. Gusev, O.V. Rudenko, Acoust. Phys., **69** (3), 318 (2023). DOI: 10.1134/S1063771023600043].
- [6] A.V. Slunyaev, Y.A. Stepanyants, Phys. Fluids, **36**, 036621 (2024). DOI: 10.1063/5.0200538
- [7] S. Boral, Y. Stepanyants, J. Fluid Mech., **1002**, A49 (2025). DOI: 10.1017/jfm.2024.1212
- [8] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖЭТФ, **104** (8), 552 (2016). DOI: 10.7868/S0370274X16200030 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, JETP Lett., **104**, 531 (2016). DOI: 10.1134/S0021364016200133].
- [9] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, ЖТФ, **94** (2), 189 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.02.57072.246-23 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, Tech. Phys., **69** (2), 179 (2024)].
- [10] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖТФ, **49** (8), 21 (2023). DOI: 10.21883/PJTF.2023.08.55132.19506 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, Tech. Phys. Lett., **49** (4), 62 (2023). DOI: 10.21883/TPL.2023.04.55881.19506].
- [11] M. Schroeder, *Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise* (Dover Publ., N.Y., 1991).
- [12] R. Hollerbach, J. Fluid Mech., **492**, 289 (2003). DOI: 10.1017/S0022112003005676
- [13] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖЭТФ, **101** (8), 583 (2015). DOI: 10.7868/S0370274X15080044 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, JETP Lett., **101** (8), 527 (2015). DOI: 10.1134/S0021364015080159].
- [14] N. Nikitin, J. Comput. Phys., **217**, 759 (2006). DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.036
- [15] О.Э. Кривоносова, *Переход к стохастичности в широком сферическом слое при встречном вращении границ: прямой расчет и эксперимент*, автореф. канд. дис. (МГУ, М., 2007).
- [16] X. Zhang, L. Gan, Y. Liu, J. Fluid Mech., **1026**, A37 (2026). DOI: 10.1017/jfm.2025.11031
- [17] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖТФ, **43** (10), 87 (2017). DOI: 10.21883/PJTF.2017.10.44625.16564 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivososova, Tech. Phys. Lett., **43** (5), 493 (2017). DOI: 10.1134/S1063785017050273].