

01

Квазиклассическое и квантовое излучение в графене под действием ступенчатого поля

© В.В. Дмитриев, Д.В. Чурочкин, В.А. Церюпа, С.А. Смолянский

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия
e-mail: dmitrievvv@sgu.ru

Поступило в Редакцию 28 ноября 2025 г.

В окончательной редакции 28 ноября 2025 г.

Принято к публикации 28 ноября 2025 г.

Представлено кинетическое описание квазиклассических и квантовых процессов излучения в графене, индуцированных внешним полем со ступенчатой конфигурацией. В качестве внешнего возмущения использовано постоянное поле конечной длительности (так называемые *t*-ступенчатые импульсы). Этот выбор мотивирован двумя ключевыми соображениями: 1) подобные поля подробно исследовались в других работах, и 2) они могут создавать окна прозрачности, в которых индуцированное излучение превышает фон внешнего поля, что открывает возможность экспериментального детектирования.

Ключевые слова: графен, кинетическое уравнение.

DOI: 10.61011/JTF.2026.05.62743.322-25

Введение

Графен на протяжении десятилетий остается в фокусе активных исследований благодаря своим исключительным свойствам [1,2]. Его гексагональная кристаллическая структура и симметрия приводят к уникальному низкоэнергетическому спектру, в котором электроны вблизи дираковских точек ведут себя как безмассовые фермионы, подчиняясь линейному закону дисперсии

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = v_F \sqrt{(p^{(1)})^2 + (p^{(2)})^2}, \quad (1)$$

где $v_F = 10^6$ м/с — фермиевская скорость, а $\mathbf{p} = (p^{(1)}, p^{(2)})$ — компоненты двумерного импульса.

Это свойство позволяет экспериментально проверять модель при энергиях, значительно более низких, чем требуемые в квантовой электродинамике. Под действием внешнего электрического поля возникают несколько удивительных квантовых вакуумных эффектов. Например, туннелирование Ландау–Зинера проявляется в нелинейных вольт-амперных характеристиках, давая представление о механизме электронного транспорта. Кроме этого, можно изучать электромагнитный отклик или детектировать излучение, испускаемое однослойным графеном под действием внешнего лазерного поля.

Современное состояние исследований в области нелинейной динамики графена характеризуется активным развитием как экспериментальных, так и теоретических подходов. В работах [3–5] продемонстрирована возможность генерации высоких гармоник и нелинейного отклика в графене под действием сильных лазерных импульсов терагерцового диапазона. Параллельно развиваются усовершенствованные теоретические модели, учитывающие релаксационные процессы [6] и межэлектронное взаимодействие [7] в условиях сильных полей.

Особый интерес представляют недавние исследования квантовых транспортных явлений [8].

В последующем анализе мы используем непerturbативный кинетический формализм для исследования плазменных токов в графене и соответствующего квазиклассического излучения. Кроме того, мы исследуем случай квантового излучения, генерируемого при взаимодействии зарядов с внешним полем, с фокусировкой исключительно на канале аннигиляции в интеграле столкновений.

1. Кинетическое уравнение в графене

Для простоты рассмотрим графен, находящийся во внешнем линейно-поляризованном однородном поле с однокомпонентным вектор-потенциалом $A^\mu = (0, 0, A^{(2)}(t) = A(t), 0)$ в гамильтоновой калибровке $A^{(0)} = 0$. Тогда основное кинетическое уравнение немарковского типа может быть записано в интегро-дифференциальной форме [9–12]:

$$\dot{f}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) \int_{t_0}^t \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \theta(\mathbf{p}; t, t') dt' \quad (2)$$

или как эквивалентная система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{f}(\mathbf{p}, t) &= \frac{1}{2} \lambda(\mathbf{p}, t) u(\mathbf{p}, t), \\ \dot{u}(\mathbf{p}, t) &= \lambda(\mathbf{p}, t) [1 - 2f(\mathbf{p}, t)] - \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} v(\mathbf{p}, t), \\ \dot{v}(\mathbf{p}, t) &= \frac{2\varepsilon(\mathbf{p}, t)}{\hbar} u(\mathbf{p}, t). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы вводим функцию распределения носителей $f(\mathbf{p}, t)$, которая подчиняется условию электронейтральности $f(\mathbf{p}, t) = f_e(\mathbf{p}, t) = f_h(-\mathbf{p}, t)$. Дополнительно, для случая графена, мы определяем амплитуду перехода

$$\lambda(\mathbf{p}, t) = \frac{ev_F^2 E(t) p_{\perp}}{\varepsilon^2(\mathbf{p}, t)} \quad (4)$$

и фазу

$$\theta(\mathbf{p}; t, t') = \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t dt'' \varepsilon(\mathbf{p}, t''), \quad (5)$$

где $E(t) = -\frac{1}{c} \dot{A}(t)$ — напряженность поля, $\varepsilon(\mathbf{p}, t) = v_F \sqrt{p_{\perp}^2 + P_{\parallel}^2(t)}$ — квазиэнергия, $P_{\parallel}(t) = p^{(2)} - \frac{e}{c} A(t)$ — квазиимпульс вдоль направления поля, $p_{\perp} = p^{(1)}$ — перпендикулярная компонента, $e < 0$ — заряд электрона. Здесь также вводятся вспомогательные функции, характеризующие поляризационные эффекты в системе

$$u(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \cos \theta(\mathbf{p}; t, t') dt', \quad (6)$$

$$v(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t \lambda(\mathbf{p}, t') [1 - 2f(\mathbf{p}, t')] \sin \theta(\mathbf{p}; t, t') dt'. \quad (7)$$

При начальном условии $f(\mathbf{p}, t_0) = u(\mathbf{p}, t_0) = v(\mathbf{p}, t_0) = 0$ мы определяем интеграл движения

$$(1 - 2f)^2 + u^2 + v^2 = 1. \quad (8)$$

Функции, обсуждаемые выше и полученные путем аналитического или численного решения системы, не являются непосредственно наблюдаемыми экспериментальными величинами. Чтобы установить связь с наблюдаемыми величинами, мы должны рассмотреть макроскопические наблюдаемые, такие как плотность частиц, токи и энергетические характеристики излучения. В качестве первого шага определим плотность числа пар квазичастиц как

$$n(t) = \frac{N_f}{(2\pi\hbar)^2} \int f(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, \quad (9)$$

где $N_f = 4$ соответствует числу типов („ароматов“) квазичастиц в графене.

Следуя стандартным определениям, введем плотность тока [13]:

$$j_k(t) = -\frac{\delta H(t)}{\delta A_k(t)}. \quad (10)$$

Вывод из низкоэнергетического гамильтониана

$$H(t) = v_F \int \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \hat{\mathbf{P}} \sigma \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (11)$$

дает следующее выражение:

$$j_k(t) = N_f e v_F \int \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \sigma_k \psi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (12)$$

где σ_k — матрицы Паули ($k = 1, 2$). Этот ток может быть выражен как сумма тока проводимости

$$j_{\perp}^{cond}(t) = \frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{2f(\mathbf{p}, t) p_{\perp}}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p},$$

$$j_{\parallel}^{cond}(t) = \frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{2f(\mathbf{p}, t) P_{\parallel}(t)}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p}, \quad (13)$$

и тока поляризации

$$j_{\perp}^{pol}(t) = -\frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{u(\mathbf{p}, t) P_{\parallel}(t)}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p},$$

$$j_{\parallel}^{pol}(t) = \frac{N_f e v_F^2}{(2\pi\hbar)^2} \int \frac{u(\mathbf{p}, t) p_{\perp}}{\varepsilon(\mathbf{p}, t)} d\mathbf{p}. \quad (14)$$

В контексте физики конденсированного состояния эти вклады традиционно называются внутризонным и межзонным токами соответственно. Выражение, связанное с проводимостью, соответствует переносу заряда носителями внутри отдельных дираковских конусов (зона проводимости или валентная зона), тогда как поляризационное представляет квантовую интерференцию между этими состояниями, проявляющуюся как дрожащее движение (*Zitterbewegung*). Фактически, корректная форма тока проводимости включает множитель $(1 - 2f(\mathbf{p}, t))$ в числителе, но постоянное слагаемое обращается в нуль при интегрировании по зоне Бриллюэна с учетом полной гексагональной решетки графена [14].

Заметим, что компоненты токов (13), (14), перпендикулярные внешнему электрическому полю, отсутствуют: $j_{\perp}^{cond} = j_{\perp}^{pol} = 0$. Это обусловлено тем, что подынтегральные функции в j_{\perp}^{cond} и j_{\perp}^{pol} являются нечетными функциями поперечного импульса p_{\perp} , а интеграл по p_{\perp} мы берем в симметричных пределах. Нечетность подынтегральных функций — в частности, нечетность $u(p_{\perp})$ и $p_{\perp} f(p_{\perp})$, — может быть доказана на основе кинетических уравнений (3) с учетом четности квазиэнергии ε (1) и нечетности амплитуды переходов λ (4) как функций поперечного импульса p_{\perp} .

Внешний t -ступенчатый импульс генерирует определенное число квазичастиц с асимметричным распределением в импульсном пространстве (рис. 1). Движение этих заряженных квазичастиц устанавливает сложную картину поверхностных токов. Эти поверхностные токи плазмы, в свою очередь, служат источниками квазиклассического излучения, которое распространяется наружу по обе стороны от плоскости графена.

2. Плазменный ток и квантовый транспорт

Рассматривая графен как бесконечно тонкий слой и, следуя подходу работы [15], мы моделируем электромагнитное поле, генерируемое его поверхностными токами. Тогда для поверхностного тока, зависящего от времени и текущего, например, вдоль оси y , $\mathbf{j}(t) = j(t)\mathbf{e}_y$, мы

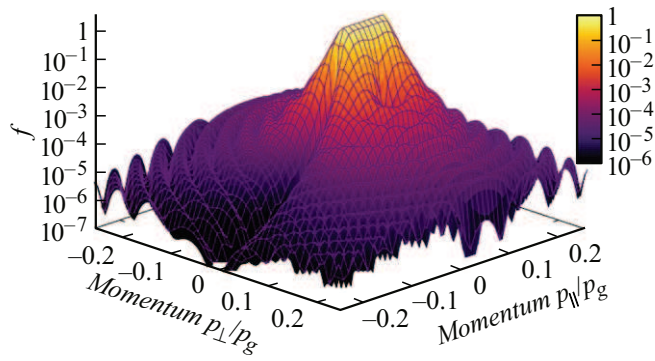


Рис. 1. Функция распределения под действием t -ступенчатого импульса умеренной амплитуды и длительности ($E_0 = 10^{-3}E_g = 109\text{kV/cm}$, $T = 100t_g = 24.6 \cdot 10^{-15}\text{s} \Rightarrow \eta = 10$) в out-состоянии ($t = +T/2$), без учета обратной реакции, $p_g = \hbar/a$ — графеновый импульс, $a = 2.46 \text{ \AA}$ — постоянная решетки графена.

получаем следующее выражение для вектор-потенциала на расстоянии z от плоскости:

$$\mathbf{A}_{QCR}(z, t) = \mathbf{e}_y A_{QCR}(z, t) = \mathbf{e}_y \frac{2\pi}{c} \int_z^\infty j\left(t - \frac{\rho}{c}\right) d\rho, \quad (15)$$

где $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Напряженности электрического и магнитного полей квазиклассического излучения равны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{QCR}(\tau) &= -\mathbf{e}_y \frac{1}{c} \frac{\partial A_{QCR}}{\partial t} = -\mathbf{e}_y \frac{2\pi}{c} j(\tau), \\ \mathbf{B}_{QCR}(z, t) &= -\mathbf{e}_x \frac{\partial A_{QCR}}{\partial z} = \mathbf{e}_x \frac{2\pi}{c} j(\tau) \text{sign}(z), \end{aligned} \quad (16)$$

где $\tau = t - \rho/c$ — запаздывающее время. Вектор Пойнтинга излучения равен

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{QCR}(z, t) &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}_{QCR}(\tau) \times \mathbf{B}_{QCR}(z, t) \\ &= \mathbf{e}_z \frac{c}{4\pi} E_{QCR}(\tau) B_{QCR}(z, t), \end{aligned} \quad (17)$$

так что энергия квазиклассического излучения в единицу времени, проходящая через единицу площади на высоте z над слоем графена, равна

$$|\mathbf{S}_{QCR}(z, t)| = \frac{\pi}{c} j^2(\tau). \quad (18)$$

Как видно из рис. 2, квазиклассическое электрическое поле остается отличным от нуля даже после выключения внешнего поля ($t \gg T$), что приводит к неограниченному росту излученной энергии ($\int |\mathbf{S}| dt$) и тем самым выявляет фундаментальное ограничение модели. Чтобы устранить этот недостаток, мы должны включить в рассмотрение эффекты обратной реакции.

Тем не менее даже эта численная модель дает ценное представление о взаимосвязи между поверхностными токами и параметрами внешнего поля. Следовательно, она предлагает предварительное понимание квантового транспорта в графеновых структурах, требуя при

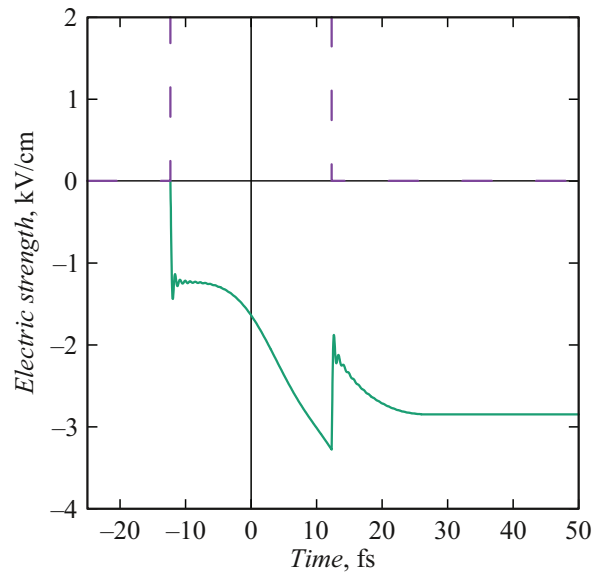


Рис. 2. Эволюция напряженности электрических полей под действием t -ступенчатого импульса с амплитудой $E_0 = 10^{-3}E_g = 109\text{kV/cm}$ и длительностью $T = 100t_g = 24.6 \cdot 10^{-15}\text{s}$, без учета обратной реакции. Сплошная линия — квазиклассическое излучение E_{QCR} в плоскости графена ($z = 0$); штриховая линия — внешнее поле (t -ступенчатый импульс).

этом знания лишь самого фундаментального свойства его низкоэнергетической модели — линейного закона дисперсии. Следуя работе [16], мы вводим безразмерный параметр η , характеризующий „интенсивность“ поля и определяющий режим переноса зарядов.

$$\frac{\eta}{2\pi} = \frac{E_0}{E_g} \left(\frac{T}{t_g}\right)^2, \quad (19)$$

где введены графеновые единицы: напряженность $E_g = \hbar v_F / (|e|a^2) = 1.089 \cdot 10^8 \text{ V/cm}$, время $t_g = a/v_F = 2.46 \cdot 10^{-16}\text{s}$, и $a = 2.46 \text{ \AA}$ обозначает постоянную решетки графена.

Численные результаты на рис. 3 выявляют два характерных режима транспорта. В пределе слабого поля $\eta \ll 1$ система описывается линейной теорией отклика Кубо [2] и демонстрирует выполнение закона Ома, причем доминирует поляризационный ток. В противоположность этому, режим сильного поля $\eta \gg 1$ показывает нелинейную зависимость $E^{3/2}$. Она является результатом интенсивного рождения квазичастиц посредством механизма Швингера, что приводит к доминированию тока проводимости над поляризационным током и обеспечивает нелинейный механизм транспорта. Временная динамика системы управляется переходами Ландау–Зинера, в которых процессы межзонного туннелирования подавляются в пользу внутризонной проводимости по мере увеличения напряженности электрического поля. В предыдущих исследованиях, изучавших аналогичные эффекты полей в графене [14,16,17] и механизм

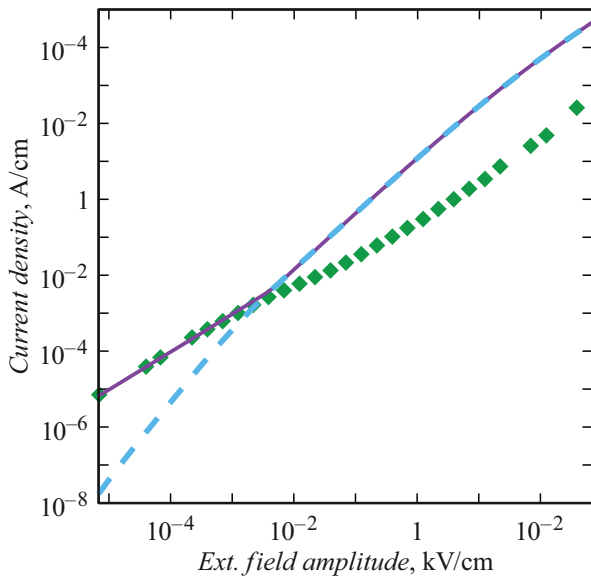


Рис. 3. „Вольт-амперная характеристика“ — амплитуда плотности тока, как функция амплитуды t -ступенчатого импульса при $T = 4 \cdot 10^3 t_g = 10^{-12}$ с, с учетом обратной реакции. Штрих — ток проводимости $\max |j_{cond}(t)|$; пунктир — поляризационный ток $\max |j_{pol}(t)|$; сплошная линия — полный ток $\max |j_{cond}(t) + j_{pol}(t)|$.

Киббла–Цурека [18,19], был получен аналогичный тип зависимости $\sim tE^{3/2}$.

3. Квазиклассическое излучение

Для последующего анализа мы принимаем два ключевых упрощающих приближения [20]. Во-первых, мы используем приближение низкой плотности, которое соответствует условию $f(\mathbf{p}, t) \ll 1$ в правой части кинетического уравнения (2). Это соответствует случаю низкой продукции квазичастиц. В результате получаем функцию распределения в виде

$$f^{(LD)}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{4} \left| \hat{\lambda}(\mathbf{p}, t) \right|^2, \quad (20)$$

где

$$\hat{\lambda}(\mathbf{p}, t) = \int_{t_0}^t dt' \lambda(\mathbf{p}, t') \exp \left[-i \frac{2}{\hbar} \int_{t'}^t dt'' \varepsilon(\mathbf{p}, t'') \right]. \quad (21)$$

Формулы (20), (21) справедливы для квазиэнергии $\varepsilon(\mathbf{p}, t)$ и амплитуды переходов $\lambda(\mathbf{p}, t)$ любого вида (например, линейной или нелинейной по импульсу). Главное — чтобы выполнялось $f^{(LD)} \ll 1$.

Второе упрощение — это приближение слабого поля:

$$\left| \frac{e}{c} \mathbf{A}(t) \right| \ll |\mathbf{p}|, \quad \forall t. \quad (22)$$

Оно упрощает квазиэнергию и амплитуду переходов:

$$\varepsilon(\mathbf{p}, t) \rightarrow \varepsilon^{(0)}(p) = v_F |\mathbf{p}|, \quad (23)$$

$$\lambda(\mathbf{p}, t) \rightarrow \lambda^{(0)}(\mathbf{p}, t) = \frac{ev_F^2 p_{\perp}}{[\varepsilon^{(0)}(p)]^2} E(t) = \frac{e \sin \varphi}{p} E(t), \quad (24)$$

где φ — угол между \mathbf{p} и \mathbf{E} (оба вектора — в плоскости графена).

Комбинируя два приближения, получаем

$$f^{(LD,0)}(\mathbf{p}, t) = \left| \frac{ev_F^2 p_{\perp}}{2\varepsilon^{(0)}(p)} \tilde{E}(v, t) \right|_{v=\varepsilon^{(0)}/\pi\hbar}^2, \quad (25)$$

где

$$\tilde{E}(v, t) = \int_{t_0}^t dt' E(t') \exp(-2\pi i v t') \quad (26)$$

является оконным преобразованием Фурье (WFT) или кратковременным преобразованием Фурье (STFT).

Энергетическая плотность электрон-дырочной плазмы равна

$$\mathcal{E}^{(LD,0)}(t) = \frac{2N_f}{(2\pi\hbar)^2} \int \varepsilon^{(0)}(p) f^{(LD,0)}(\mathbf{p}, t) d\mathbf{p}. \quad (27)$$

Подставим сюда функцию распределения (24), перейдем в полярную систему „координат“ $(|\mathbf{p}|, \varphi)$, проинтегрируем по азимуту φ . В результате

$$\mathcal{E}^{(LD,0)}(t) = \frac{e^2}{2\hbar} \int_0^{\infty} dv |\tilde{E}(v, t)|^2. \quad (28)$$

Используя поток энергии электромагнитной волны, можно переписать энергетическую плотность с помощью вектора Пойнтинга (17) как

$$\mathcal{E}^{(LD,0)}(t) = \frac{\pi e^2}{\hbar c} \int_{-\infty}^t |\mathbf{S}(t')| dt'. \quad (29)$$

Эта аналитическая оценка показывает, что только $\pi/137 \sim 2.2\%$ падающей электромагнитной энергии поглощается графеном. Это находится в превосходном соответствии с экспериментальными данными по оптической прозрачности монослоя графена [21]. Численные результаты компьютерного моделирования квазиклассического излучения под действием t -ступенчатого импульса показаны на рис. 4.

4. Квантовое излучение

Взаимодействие электрон-дырочной плазмы (ЭДП) с полем фотонов генерирует квантовое излучение. Соответствующие кинетические уравнения для ЭДП и фотонной подсистемы в графене были получены в работе [11] с использованием динамического подхода, аналогичного кинетической теории электрон-позитрон-фотонных плазмы в сильных внешних полях [22]. Ниже мы ограничим наш анализ аннигиляционным каналом в фотонном интеграле столкновений, пренебрегая обратной реакцией рождения электрон-дырочных пар посредством поглощения фотонов.

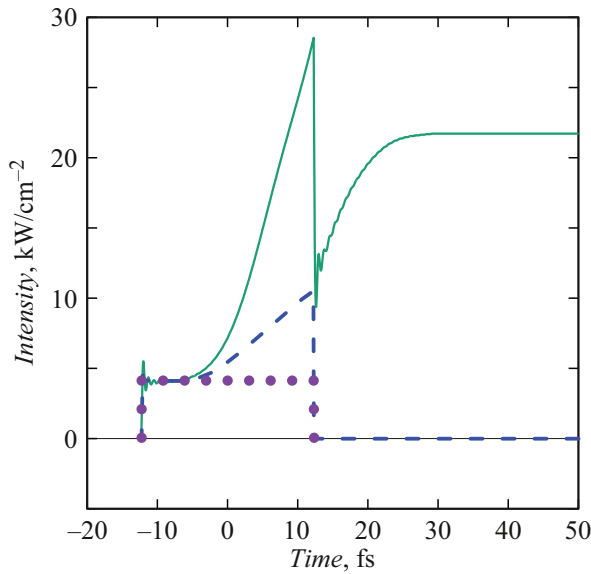


Рис. 4. Эволюция интенсивностей под действием t -ступенчатого импульса (с параметрами, как на рис. 1, 2) без учета обратной реакции. Сплошная линия — интенсивность квазиклассического излучения $|S_{QCR}|$; штрих — поверхностная плотность мощности квазичастиц $\dot{\epsilon}_{eh}$, домноженная (для сопоставления) на $\pi\alpha/4 \approx 5.7 \cdot 10^{-3}$; пунктир — интенсивность внешнего поля $|S_{ext}|$, домноженная на $(\pi\alpha/2)^2 \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$. Почти всюду на графике (кроме $t \geq T/2 = 12.3 \cdot 10^{-15}$ s, где внешнее поле уже выключено) оказывается выполнено: $|S_{QCR}| \ll \dot{\epsilon}_{eh} \ll |S_{ext}|$.

Соответствующая система обыкновенных дифференциальных уравнений принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \dot{F}(\mathbf{K}, t) &= \Lambda(K) \int \frac{d^2 p}{(2\pi\hbar)^2} U(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \\ \dot{U}(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t) &= [f(\mathbf{p}, t) + f(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) - 1] F(\mathbf{K}, t) \\ &\quad + f(\mathbf{p}, t)f(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) \\ &\quad - \frac{1}{\hbar} [\varepsilon(\mathbf{p}, t) + \varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) - cK] V(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \\ \dot{V}(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t) &= \frac{1}{\hbar} [\varepsilon(\mathbf{p}, t) + \varepsilon(\mathbf{p} + \mathbf{K}, t) - cK] U(\mathbf{p}, \mathbf{K}, t), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\mathbf{K} = (\mathbf{k}, k^{(3)})$ обозначает трехмерный импульс фотона (где \mathbf{k} представляет компоненты в плоскости, а $k^{(3)}$ — компоненту, нормальную к плоскости графена), $K = |\mathbf{K}|$, и амплитуда

$$\Lambda(K) = \frac{(ev_F)^2}{cKd}, \quad (31)$$

где $d = a = 2.46$ Å — толщина слоя графена.

Согласно определению функции распределения фотонов $F(\mathbf{K}, t)$, объемная плотность числа всех фотонов $n_{ph}(t)$ есть интеграл функции $F(\mathbf{K}, t)$ по пространству фотонных импульсов \mathbf{K} ($\mathbf{K} \in \mathbb{R}^3$):

$$n_{ph}(t) = \int d^3 K n_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t), \quad (32)$$

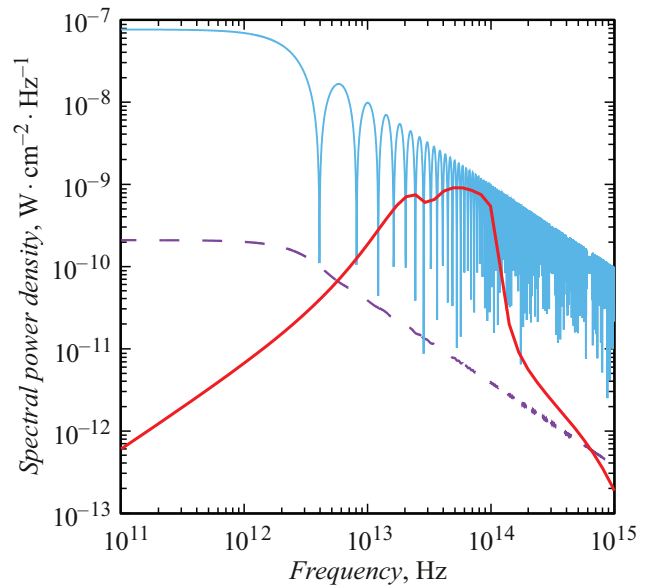


Рис. 5. Спектральная плотность мощности под действием сильного T — const поля ($E_0 = 10^{-4} E_g \approx 10$ kV/cm, $T = 10^3 t_g = 2.46 \cdot 10^{-13}$ s) в момент $t = T$, с учетом back-reaction ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{int}$). Сплошная осциллирующая линия — внешнее поле (T -const); штрих — квазиклассическое излучение $|S_{QCR}(v)|$ при $z = 0$; сплошная плавная линия — квантовое излучение (КИ), $\dot{\epsilon}_{ph,v}(v) \cdot d$. КИ вычислено из системы уравнений (30) в приближении низкой плотности числа фотонов ($F \ll 1$).

где

$$n_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) = \frac{N_f}{(2\pi\hbar)^3} F(\mathbf{K}, t) \quad (33)$$

— спектральная (дифференциальная по вектору импульса фотона) объемная плотность числа фотонов, $[n_{ph,\mathbf{K}}] = [\text{длина}^{-3} \cdot \text{импульс}^{-3}]$.

Объемная плотность энергии всех фотонов [энергия · длина⁻³] по определению равна

$$\varepsilon_{ph}(t) = \int d^3 K \varepsilon_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t), \quad (34)$$

где

$$\varepsilon_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) = cK n_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) = \frac{N_f c K}{(2\pi\hbar)^3} F(\mathbf{K}, t) \quad (35)$$

— спектральная (дифференциальная по вектору импульса фотона) объемная плотность энергии фотонов, $[\varepsilon_{ph,\mathbf{K}}] = [\text{энергия} \cdot \text{длина}^{-3} \cdot \text{импульс}^{-3}]$.

В целях сравнения спектров квазиклассического и квантового излучения оказывается удобно ввести объемную плотность энергии фотонов, дифференциальную по их частоте ν ($\nu = cK/\hbar$), $\varepsilon_{ph,\nu}(\nu, t)$, подчинив ее условию:

$$\int_0^\infty d\nu \varepsilon_{ph,\nu}(\nu, t) = \varepsilon_{ph}(t). \quad (36)$$

Сравнивая это определение (тождество) с плотностью энергии всех фотонов \mathcal{E}_{ph} (34), находим связь дифференциальной плотности энергии фотонов $\mathcal{E}_{ph,\nu}$ с их функцией распределения F :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{ph,\nu}(\nu, t) &= \frac{2\pi\hbar}{c} K^2 \int d\Omega \mathcal{E}_{ph,\mathbf{K}}(\mathbf{K}, t) \Big|_{K=2\pi\hbar\nu/c} \\ &= N_f \frac{K^3}{(2\pi\hbar)^2} \int d\Omega F(\mathbf{K}, t) \Big|_{K=2\pi\hbar\nu/c},\end{aligned}\quad (37)$$

где интеграл берется по телесному углу Ω всей сферы.

Величину $\dot{\mathcal{E}}_{ph,\nu}(\nu, t)$ мы называем спектром мощности квантового излучения. Она имеет размерность [мощность · длина⁻³ · частота⁻¹].

Спектром интенсивности квазиклассического излучения мы называем абсолютное значение оконного преобразования Фурье над абсолютным значением вектора Пойнтинга (17):

$$\left| \tilde{\mathbf{S}}_{QCR}(\nu, t) \right| = \left| \int_{-\infty}^t dt' |\mathbf{S}_{QCR}(t')| \exp(-2\pi i \nu t') \right|. \quad (38)$$

Его размерность — [мощность · длина⁻² · частота⁻¹].

Для сравнения спектров квантового и квазиклассического излучений, для согласования их размерностей мы домножаем спектр квантового излучения $\dot{\mathcal{E}}_{ph,\nu}(\nu, t)$ на толщину слоя графена d .

На рис. 5 мы ожидаем увидеть „окна прозрачности“ для t -ступенчатого импульса, которые могут быть наблюдаемы в эксперименте, т.е. частотные диапазоны, в которых индуцированное излучение превышает интенсивность внешнего поля.

Заключение

В работе разработана последовательная кинетическая теория, описывающая процессы излучения в графене под действием импульсов ступенчатой формы. Основной научный результат заключается в создании самосогласованной модели, объединяющей непертурбативное описание рождения электрон-дырочных пар, генерацию квазиклассического излучения плазменными токами и квантовое излучение в аннигиляционном канале. В рамках предложенного подхода установлены количественные закономерности перехода между режимами доминирования поляризованного тока и тока проводимости.

Достигнутый уровень динамического описания излучения в графене не только демонстрирует качественное согласие с экспериментальными результатами [23], но и формирует методологическую основу для описания нестационарных явлений в графене и открывает перспективы для дальнейшего исследования нелинейных радиационных процессов в условиях сильных полей сложной временной конфигурации.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] K.S. Novoselov, A.K. Geim, S.V. Morozov, D. Jiang, M.I. Katsnelson, I.V. Grigorieva, S.V. Dubonos, A.A. Firsov. *Nature*, **438** (7065), 197 (2005).
- [2] A.H. Castro Neto, F. Guinea, N.M.R. Peres, K.S. Novoselov, A.K. Geim. *Rev. Mod. Phys.*, **81** (1), 109 (2009).
- [3] S. Rakhmanov, K. Matchonov, H. Yusupov, K. Nasriddinov, D. Matrasulov. *Eur. Phys. J. B*, **98** (2), 35 (2025).
- [4] G. Soavi, G. Wang, H. Rostami, D.G. Purdie, D.De Fazio, T. Ma, B. Luo, J. Wang, A.K. Ott, D. Yoon, S.A. Bourelle, J.E. Muench, I. Goykhman, S.D. Conte, M. Celebrano, A. Tomadin, M. Polini, G. Cerullo, A.C. Ferrari. *Nature Nanotechnol.*, **13** (7), 583 (2018).
- [5] H.A. Hafez, S. Kovalev, J.C. Deinert, Z. Mics, B. Green, N. Awari, M. Chen, S. Germanskiy, U. Lehnert, J. Teichert, Z. Wang, K.J. Tielrooij, Z. Liu, Z. Chen, A. Narita, K. Müllen, M. Bonn, M. Gensch, D. Turchinovich. *Nature*, **561** (7724), 507 (2018).
- [6] J.A. Canas, D.A. Bonilla, A. Martín-Ruiz. *Phys. Rev. B*, **112** (10) 104206 (2025).
- [7] P. Kumar, T.M. Herath, V. Apalko. *J. Phys.: Condens. Matter*, **33** (33), 335305 (2021).
- [8] G. Trambly de Laissardière, et al. *Physica E-Low-Dimensional Systems and Nanostructures*, 175, 116362 (2026).
- [9] S.A. Smolyansky, A. Panferov, D. Blaschke, N. Gevorgyan. *Particles*, **2** (2), 208 (2019).
- [10] S.A. Smolyansky, A.D. Panferov, D.B. Blaschke, N.T. Gevorgyan. *Particles*, **3** (2), 456 (2020).
- [11] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, V.V. Dmitriev, A.D. Panferov, S.A. Smolyansky. *Universe*, **6** (11), 205 (2020).
- [12] A.D. Panferov, D.V. Churochkin, A.M. Fedotov, S.A. Smolyansky, D.B. Blaschke, N.T. Gevorgyan. In *Proceedings of the Ginzburg Centennial Conference on Physics*, (May 29–June 3, 2017, Moscow). <http://gc2.lpi.ru/proceedings/panferov.pdf> Last accessed 16 March 2020
- [13] P. Martin, J. Schwinger. *Phys. Rev.*, **115** (6), 1342 (1959).
- [14] B. Dora, R. Moessner. *Phys. Rev. B*, **81** (16), 165431 (2010).
- [15] T.A. Abbott, D.J. Griffiths. *Am. J. Phys.*, **53** (12), 1203 (1985).
- [16] G.L. Klimchitskaya, V.M. Mostepanenko. *Phys. Rev. D*, **87** (12), 125011 (2013).
- [17] S.P. Gavrilov, D.M. Gitman, N. Yokomizo. *Phys. Rev. D*, **86** (12), 125022 (2012).
- [18] T.W.B. Kibble. *J. Phys. A*, **9** (8), 1387 (1976).
- [19] W.H. Zurek. *Nature*, **317** (6037), 505 (1985).
- [20] D.B. Blaschke, V.V. Dmitriev, N.T. Gevorgyan, B. Mahato, A.D. Panferov. *Springer Proc. Phys.*, **281** 187 (2022).
- [21] R.R. Nair, P. Blake, A.N. Grigorenko, K.S. Novoselov, T.J. Booth, T. Stauber, N.M.R. Peres, A.K. Geim. *Science*, **320** (5881), 1308 (2008).
- [22] D.B. Blaschke, V.V. Dmitriev, G. Roepke, S.A. Smolyansky. *Phys. Rev. D*, **84** (8), 085028 (2011).
- [23] I.V. Oladyshkin, S.B. Bodrov, A.V. Korzhimanov, A.A. Murzanov, Yu.A. Sergeev, A.I. Korytin, M.D. Tokman, A.N. Stepanov. *Phys. Rev. B*, **106** (20), 205407 (2022).