

01

Перепутывание атома Джейнса—Каммингса и двух атомов Тависа—Каммингса

© А.Р. Багров, Е.К. Башкиров

Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева,
443086 Самара, Россия
e-mail:bashkirov.ek@ssau.ru

Поступило в Редакцию 12 ноября 2025 г.

В окончательной редакции 12 ноября 2025 г.

Принято к публикации 12 ноября 2025 г.

Продемонстрировано точное решение квантового уравнения Лиувилля для модели, состоящей из трех идентичных двухуровневых атомов (кубитов) A , B и C и двух независимых резонаторов. Предположено, что кубит A заперт в первом идеальном резонаторе, а два оставшихся кубита B и C захвачены во второй высокочастотный резонатор. Все кубиты резонансно взаимодействуют с соответствующей модой квантованного теплового электромагнитного поля резонатора. Между кубитами в начальный момент времени предположено наличие перепутанности. В центре нашего внимания находятся бисепарабельные состояния кубитов и истинно перепутанные состояния кубитов W - и GHZ -типа. На основе точного решения проведен расчет критерия Переса—Хородецких и степени совпадения. Используя указанные критерии перепутывания, проанализирована динамика двух- и трехкубитного перепутывания для различных интенсивностей тепловых полей резонаторов, а также проведен сравнительный анализ динамики перепутывания кубитов в рассматриваемой модели и трехкубитных моделях, исследованных ранее. Показано, что кубиты в процессе эволюции никогда не переходят в состояния, приготовленные в начальный момент времени, что принципиально отличает их поведение от поведения кубитов в исследованных ранее трехкубитных моделях.

Ключевые слова: кубиты, истинно перепутанные состояния W - и GHZ -типа, бисепарабельные состояния, тепловые поля, перепутывание, независимые резонаторы, критерий отрицательности, степень совпадения, квантовое уравнение Лиувилля, эффект мгновенной смерти перепутывания.

DOI: 10.61011/JTF.2026.05.62742.313-25

Введение

Перепутывание или нелокальные квантовые корреляции между двумя (или более) квантовыми подсистемами является одной из поразительных особенностей квантовой механики в сравнении с классической механикой. В последнее время исследованию перепутанных состояний уделяется особое внимание в связи с их фундаментальной ролью в многочисленных приложениях, таких как квантовые вычисления и коммуникации, плотное кодирование, криптография и др. [1]. Наиболее известные типы перепутанных состояний, таких как ЭПР-состояния или состояния Белла, могут быть получены в системах, состоящих из пары кубитов. В последние годы такие состояния для двухкубитных систем различной физической природы исследовались в огромном числе теоретических и экспериментальных работ. В области квантовой обработки информации особая роль двухкубитных систем обусловлена тем, что все квантовые алгоритмы могут быть разложены на минимальный универсальный набор вентилях, состоящий из однокубитных и двухкубитных операций [2]. Вместе с тем использование многочастичных перепутанных состояний позволяет реализовать более сложные квантовые алгоритмы, например, выполнять квантовые вычисления с использованием универсальных трехкубитных вентилях

Тоффоли и Фредкина [3,4], кластерных состояний [5], улучшать схемы квантовой коррекции ошибок [6] и др.

Поскольку ни одна квантовая система не существует изолированно, взаимодействие перепутанных кубитов с окружающей средой приводит к декогеренции [7,8]. В системах, используемых в квантовой обработке информации, времена, необходимые для выполнения операций с кубитами для любого реального квантового технологического приложения, должны быть меньше времени ослабления квантовых нелокальных корреляций кубитов [9]. Это создает серьезные проблемы при использовании перепутывания в качестве информационного ресурса. В этих условиях становится необходимым полное понимание временной динамики перепутывания в многокубитных системах. Для генерации, контроля и управления перепутанными состояниями атомных кубитов используют их взаимодействие с электромагнитными полями резонаторов [10–13]. В этой связи платформы квантовой электродинамики резонаторов (РКЭД), которые максимально удобны для экспериментальной реализации, являются наиболее адекватными устройствами для детального изучения динамики взаимодействия кубитов с электромагнитными полями [10–13]. Такие платформы представляют собой высокочастотные микроволновые или оптические резонаторы, в которые внедрены кубиты различной физи-

ческой природы. Для теоретического анализа динамики перепутывания кубитов в РКЭД обычно используется модель Джейнса–Каммингса (МДК) и ее обобщения, в частности, многокубитная модель Тависа–Каммингса (МТК) [14,15]. Сложности в описании динамики моделей типа МТК существенно возрастают при увеличении числа кубитов. Поэтому в РКЭД в последнее время особое внимание уделяется анализу трехкубитных моделей. Трехкубитные квантовые перепутанные состояния были экспериментально реализованы в серии опытов в системах сверхпроводящих кубитов, ионов в ловушках и примесных спинов [16–21]. Динамика перепутывания кубитов в различных одно- и многофотонных расширениях трехкубитной МТК для различных начальных состояний кубитов и полей резонаторов рассматривалась в целом ряде статей (см. ссылки в [22–25]).

В настоящей работе мы исследовали точную динамику перепутывания трех идентичных двухуровневых атомов (кубитов) в рамках новой версии трехатомной МТК, состоящей из атома, захваченного в идеальный одномодовый резонатор, и двух атомов, внедренных в другой одномодовый идеальный общий резонатор. Атомы резонансно взаимодействуют с полями резонаторов посредством однофотонных переходов. Нами найдено точное выражение для оператора эволюции рассматриваемой трехатомной модели. На основе точного решения нами изучена динамика исследуемой квантовой модели для начальных бисепарабельных и истинно перепутанных состояний атомов W- и GHZ-типа, а в качестве начальных состояний полей резонаторов — тепловые состояния. В качестве критериев атомного перепутывания использовалась парная отрицательность и степень совпадения. Выбор тепловых состояний полей резонаторов обусловлен наличием тепловых фотонов в резонаторах любых платформ РКЭД. За счет взаимодействия атомов с тепловыми полями резонаторов возможны осцилляции Раби параметров перепутывания атомов, а также мгновенная смерть перепутывания атомов, т.е. исчезновение перепутывания на временах меньших времени декогеренции. Такие эффекты могут приводить к ошибкам при считывании информации о состоянии кубитов. Поэтому изучение динамики теплового перепутывания атомов в трехатомных моделях представляет несомненный интерес для квантовой информатики.

1. Описание трехкубитной модели и точное решение квантового уравнения Лиувилля

Опишем исследуемую квантовую модель. Мы рассматриваем три двухуровневых атома (кубита) A , B и C . Кубит A заперт в первом идеальном резонаторе, а кубиты B и C захвачены в аналогичный высокодобротный второй резонатор. Все три кубита резонансно взаимодействуют с соответствующей выделенной модой своего теплового квантового электромагнитного поля

резонатора посредством однофотонных процессов. Для простоты положим, что константы взаимодействия кубитов с соответствующими модами полей резонаторов равны $\gamma_A = \gamma_B = \gamma_C \equiv \gamma$. Схема изучаемой модели представлена на рис. 1.

Гамильтониан взаимодействия \hat{H}_{Int} указанной модели в стандартных приближениях можно представить в следующем виде:

$$\hat{H}_{Int} = \hbar\gamma (\hat{\sigma}_A^+ \hat{a}_1 + \hat{\sigma}_A^- \hat{a}_1^+ + \hat{\sigma}_B^+ \hat{a}_2 + \hat{\sigma}_B^- \hat{a}_2^+ + \hat{\sigma}_C^+ \hat{a}_2 + \hat{\sigma}_C^- \hat{a}_2^+), \quad (1)$$

где введены классические обозначения для квантовой оптики $\hat{\sigma}_i^+ = |+\rangle_{ii}\langle -|$ и $\hat{\sigma}_i^- = |-\rangle_{ii}\langle +|$ — повышающий и понижающий операторы в i -м кубите ($i = A, B, C$), $\hat{a}_1(\hat{a}_2)$ и $\hat{a}_1^+(\hat{a}_2^+)$ — операторы уничтожения и рождения фотонов в моде первого (второго) резонатора.

Прежде, чем исследовать взаимодействие кубитов A , B и C с соответствующими модами тепловых полей резонаторов, изучим динамику системы для фоковских начальных состояний полей резонаторов, т.е. для состояний с определенным числом частиц. Чтобы найти волновую функцию в последующие моменты времени $t > 0$ в случае фоковских состояний полей резонаторов, удобно ввести новый параметр N для определения базиса гильбертова пространства, в котором будет происходить эволюция системы. Данный параметр вводится следующим образом: $N = N_1 + N_2$, где

$$N_1 = \begin{cases} 0, & \text{if } n_{q_A} = n_1 = 0, \\ 1, & \text{if } n_{q_A} = 0, n_1 \geq 1 \text{ or } n_{q_A} = 1, n_1 \geq 0, \end{cases}$$

$$N_2 = \begin{cases} 0, & \text{if } n_{q_{B+C}} = n_2 = 0, \\ 1, & \text{if } n_{q_{B+C}} = 1, n_2 = 0 \text{ or } n_{q_{B+C}} = 0, n_2 = 1, \\ 2, & \text{if } n_{q_{B+C}} = 2, n_2 \geq 0 \text{ or } n_{q_{B+C}} = 1, n_2 \geq 1, \\ & \text{or } n_{q_{B+C}} = 0, n_2 \geq 2, \end{cases}$$

где n_{q_A} — число возбужденных кубитов в первом резонаторе, $n_{q_{B+C}} = n_{q_B} + n_{q_C}$ — число возбужденных кубитов во втором резонаторе, $n_1(n_2)$ — число фотонов в моде первого (второго) резонатора. Таким образом, параметр N может принимать следующие значения: 0, 1, 2 и 3.

Если параметр принимает значение $N = 3$, то эволюция вектора состояния системы происходит в 8-мерном гильбертовом пространстве, и удобно представить этот базисный набор в следующем виде:

$$\begin{aligned} &|+, +, +, n_1, n_2\rangle, |+, +, -, n_1, n_2+1\rangle, \\ &|+, -, +, n_1, n_2+1\rangle, |-, +, +, n_1+1, n_2\rangle, \\ &|+, -, -, n_1, n_2+2\rangle, |-, +, -, n_1+1, n_2+1\rangle, \\ &|-, -, +, n_1+1, n_2+1\rangle, |-, -, -, n_1+1, n_2+2\rangle. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее в нашей работе мы будем использовать упрощенную математическую запись для кет-векторов

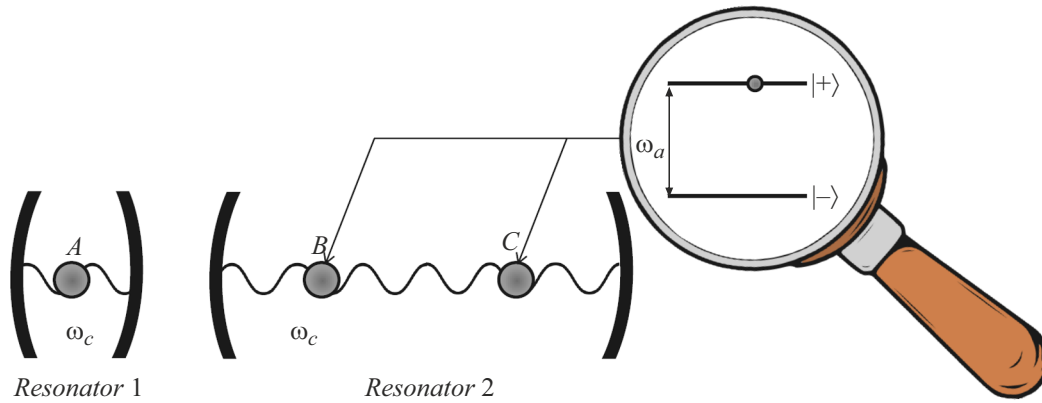


Рис. 1. Конфигурация исследуемой модели. Здесь ω_c — частота резонатора, $\omega_a = \omega_c$ — частота перехода в кубите между возбужденным $|+\rangle$ и основным $|-\rangle$ уровнями.

подсистемы трех кубитов $|x, y, z\rangle \equiv |x_A, y_B, z_C\rangle \equiv |x_A\rangle \otimes |y_B\rangle \otimes |z_C\rangle$ и для кет-векторов полной системы $|x, y, z, n_1, n_2\rangle \equiv |x_A, y_B, z_C, n_1, n_2\rangle \equiv |x_A\rangle \otimes |y_B\rangle \otimes |z_C\rangle \otimes |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle$, где $x_i, y_i, z_i = +, -$.

В случае $N = 2$ существует два набора базисных векторов из-за различий в эволюции разных кубитов в резонаторах. Возможен либо следующий набор параметров $N_1 = 1, N_2 = 1$, то есть когда эволюция вектора состояния происходит в 6-мерном гильбертовом пространстве:

$$\begin{aligned} &|+, +, -, n_1, 0\rangle, |+, -, +, n_1, 0\rangle, \\ &|+, -, -, n_1, 1\rangle, |-, +, -, n_1 + 1, 0\rangle, \\ &|-, -, +, n_1 + 1, 0\rangle, |-, -, -, n_1 + 1, 1\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

либо набор параметров $N_1 = 0, N_2 = 2$, и тогда эволюция вектора состояния происходит в 4-мерном гильбертовом пространстве

$$\begin{aligned} &|-, +, +, 0, n_2\rangle, |-, +, -, 0, n_2 + 1\rangle, \\ &|-, -, +, 0, n_2 + 1\rangle, |-, -, -, 0, n_2 + 2\rangle. \end{aligned} \quad (4)$$

В случае $N = 1$ также существует два набора базисных векторов. Либо $N_1 = 1, N_2 = 0$, и тогда удобно представить набор базисных векторов в следующем виде:

$$|+, -, -, n_1, 0\rangle, |-, -, -, n_1 + 1\rangle, \quad (5)$$

либо $N_1 = 0, N_2 = 1$, и тогда удобно представить набор базисных векторов в следующем виде:

$$|-, +, -, 0, 0\rangle, |-, -, +, 0, 0\rangle, |-, -, -, 0, 1\rangle. \quad (6)$$

В случае $N = 3$ нами было точно решено нестационарное уравнение Шредингера в базисном наборе (2) для исследуемой модели с гамильтонианом взаимодействия (1). Мы представляем точное компактное решение

в виде оператора эволюции \hat{U} в базисном наборе (2) как:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} & U_{16} & U_{17} & U_{18} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} & U_{26} & U_{27} & U_{28} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} & U_{36} & U_{37} & U_{38} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} & U_{46} & U_{47} & U_{48} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} & U_{55} & U_{56} & U_{57} & U_{58} \\ U_{61} & U_{62} & U_{63} & U_{64} & U_{65} & U_{66} & U_{67} & U_{68} \\ U_{71} & U_{72} & U_{73} & U_{74} & U_{75} & U_{76} & U_{77} & U_{78} \\ U_{81} & U_{82} & U_{83} & U_{84} & U_{85} & U_{86} & U_{87} & U_{88} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} |+, +, +, n_1, n_2\rangle \\ |+, +, -, n_1, n_2 + 1\rangle \\ |+, -, +, n_1, n_2 + 1\rangle \\ |-, +, +, n_1 + 1, n_2\rangle \\ |+, -, -, n_1, n_2 + 2\rangle \\ |-, +, -, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \\ |-, -, +, n_1 + 1, n_2 + 1\rangle \\ |-, -, -, n_1 + 1, n_2 + 2\rangle \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где элементы оператора эволюции $U_{ij} \equiv U_{ij}(n_1, n_2, t)$ задаются следующими выражениями:

$$U_{11} = \begin{cases} \frac{\cos(\gamma t \sqrt{4n_2+6}) [n_2+2+(n_2+1) \cos(\gamma t \sqrt{4n_2+6})]}{2n_2+3}, & \text{if } n_1 = 4n_2 + 5 \\ \frac{2(n_2+2) \cos(\gamma t \sqrt{n_1+1}) + (n_2+1) [\cos(\gamma t \theta_2) + \cos(\gamma t \theta_1)]}{4n_2+6}, & \text{else} \end{cases}$$

$$U_{22} = \begin{cases} \cos^2(\gamma t \sqrt{n_2+3/2}) \cos(\gamma t \sqrt{4n_2+6}), & \text{if } n_1 = 4n_2 + 5 \\ \frac{1}{4} [2 \cos(\gamma t \sqrt{n_1+1}) + \cos(\gamma t \theta_2) + \cos(\gamma t \theta_1)], & \text{else} \end{cases}$$

$$U_{55} = \begin{cases} \frac{\cos(\gamma t \sqrt{4n_2+6}) [n_2+1+(n_2+2) \cos(\gamma t \sqrt{4n_2+6})]}{2n_2+3}, & \text{if } n_1 = 4n_2 + 5 \\ \frac{2(n_2+1) \cos(\gamma t \sqrt{n_1+1}) + (n_2+2) [\cos(\gamma t \theta_2) + \cos(\gamma t \theta_1)]}{4n_2+6}, & \text{else} \end{cases}$$

$$U_{21} = \begin{cases} -\frac{i\sqrt{n_2+1}}{2\sqrt{4n_2+6}} \sin(2\gamma t \sqrt{4n_2+6}), & \text{if } n_1 = 4n_2 + 5 \\ -\frac{i}{8n_2+12} \sqrt{\frac{n_2+1}{(n_1-4n_2-5)^2}} [\theta_1(4n_2+6-\alpha) \sin(\gamma t \theta_2) + \theta_2(4n_2+6+\alpha) \sin(\gamma t \theta_1)], & \text{else} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 U_{41} &= \begin{cases} -\frac{i}{2n_2+3} [n_2+2+(n_2+1)\cos(\gamma t\sqrt{4n_2+6})] \\ \times \sin(\gamma t\sqrt{4n_2+6}), \text{ if } n_1=4n_2+5 \\ -\frac{i}{2(2n_2+3)} [2(n_2+2)\sin(\gamma t\sqrt{n_1+1})-(n_2+1) \\ \times \left(\frac{\theta_1\beta_1\sin(\gamma\theta_2t)+\theta_2\beta_2\sin(\gamma\theta_1t)}{\chi}\right)], \text{ else} \end{cases} \\
 U_{85} &= \begin{cases} -\frac{i}{2n_2+3} [n_2+1+(n_2+2)\cos(\gamma t\sqrt{4n_2+6})] \\ \times \sin(\gamma t\sqrt{4n_2+6}), \text{ if } n_1=4n_2+5 \\ -\frac{i}{2(2n_2+3)} [2(n_2+1)\sin(\gamma t\sqrt{n_1+1})-(n_2+2) \\ \times \left(\frac{\theta_1\beta_1\sin(\gamma\theta_2t)+\theta_2\beta_2\sin(\gamma\theta_1t)}{\chi}\right)], \text{ else} \end{cases} \\
 U_{51} &= \begin{cases} -\frac{2\sqrt{(n_2+1)(n_2+2)}}{2n_2+3} \cos(\gamma t\sqrt{4n_2+6}) \sin^2(\gamma t\sqrt{n_2+3/2}), \\ \text{if } n_1=4n_2+5 \\ \frac{\sqrt{(n_2+1)(n_2+2)}}{4n_2+6} [\cos(\gamma\theta_1t)+\cos(\gamma\theta_2t) \\ -2\cos(\gamma t\sqrt{n_1+1})], \text{ else} \end{cases} \\
 U_{61} &= \begin{cases} -\frac{\sqrt{n_2+1}}{\sqrt{4n_2+6}} \sin^2(\gamma t\sqrt{4n_2+6}), \text{ if } n_1=4n_2+5 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_2+1}{4n_2+6}} (\cos(\gamma\theta_1t)-\cos(\gamma\theta_2t)), \text{ else} \end{cases} \\
 U_{81} &= \begin{cases} \frac{2i\sqrt{(n_2+1)(n_2+2)}}{2n_2+3} \sin(\gamma t\sqrt{4n_2+6}) \sin^2(\gamma t\sqrt{n_2+3/2}), \\ \text{if } n_1=4n_2+5 \\ \frac{i\sqrt{(n_2+1)(n_2+2)}}{2(2n_2+3)} \left[2\sin(\gamma t\sqrt{n_1+1})+\frac{(\alpha-n_1-1)\sin(\gamma\theta_2t)}{\theta_2\sqrt{n_1+1}}\right. \\ \left.-\frac{(\alpha+n_1+1)\sin(\gamma\theta_1t)}{\theta_1\sqrt{n_1+1}}\right], \text{ else} \end{cases} \\
 U_{32} &= \begin{cases} -\cos(\gamma t\sqrt{4n_2+6}) \sin^2(\gamma t\sqrt{n_2+3/2}), \\ \text{if } n_1=4n_2+5 \\ \frac{1}{4} [\cos(\gamma\theta_1t)+\cos(\gamma\theta_2t)-2\cos(\gamma t\sqrt{n_1+1})], \\ \text{else} \end{cases} \\
 U_{52} &= \begin{cases} -\frac{i\sqrt{n_2+2}}{2\sqrt{4n_2+6}} \sin(2\gamma t\sqrt{4n_2+6}), \text{ if } n_1=4n_2+5 \\ -\frac{i}{8n_2+12} \sqrt{\frac{n_2+2}{(n_1-4n_2-5)^2}} [\theta_1(4n_2+6-\alpha)\sin(\gamma\theta_2t) \\ +\theta_2(4n_2+6+\alpha)\sin(\gamma\theta_1t)], \text{ else} \end{cases} \\
 U_{62} &= \begin{cases} -2i\cos^3(\gamma t\sqrt{n_2+3/2}) \sin(\gamma t\sqrt{n_2+3/2}), \\ \text{if } n_1=4n_2+5 \\ -\frac{i}{4} \left[2\sin(\gamma t\sqrt{n_1+1})+\frac{(n_1-\alpha+1)\sin(\gamma\theta_2t)}{\theta_2\sqrt{n_1+1}}\right. \\ \left.+\frac{(n_1+\alpha+1)\sin(\gamma\theta_1t)}{\theta_1\sqrt{n_1+1}}\right], \text{ else} \end{cases} \\
 U_{72} &= \begin{cases} i\sin^2(\gamma t\sqrt{n_2+3/2}) \sin(\gamma t\sqrt{4n_2+6}), \\ \text{if } n_1=4n_2+5 \\ \frac{i}{4} \left[2\sin(\gamma t\sqrt{n_1+1})+\frac{(\alpha-n_1-1)\sin(\gamma\theta_2t)}{\theta_2\sqrt{n_1+1}}\right. \\ \left.-\frac{(\alpha+n_1+1)\sin(\gamma\theta_1t)}{\theta_1\sqrt{n_1+1}}\right], \text{ else} \end{cases} \\
 U_{82} &= \begin{cases} -\frac{\sqrt{n_2+2}}{\sqrt{4n_2+6}} \sin^2(\gamma t\sqrt{4n_2+6}), \text{ if } n_1=4n_2+5 \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n_2+2}{4n_2+6}} [\cos(\gamma\theta_1t)-\cos(\gamma\theta_2t)], \text{ else,} \end{cases}
 \end{aligned}$$

где введены для экономии места следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \sqrt{7+n_1+4n_2+\Omega}, \quad \theta_2 = \sqrt{7+n_1+4n_2-\Omega}, \\
 \Omega &= 2\alpha, \quad \alpha = \sqrt{2(n_1+1)(2n_2+3)}, \\
 \chi &= \sqrt{(n_1+1)(n_1-4n_2-5)^2} \left[49+4n_1^2-10\Omega \right. \\
 &\quad \left.+n_1(44+24n_2-4\Omega)+4n_2(9+n_2-\Omega)\right], \\
 \beta_1 &= -169-4n_1^3+\frac{69}{2}\Omega-4n_1n_2(55+9n_2-4\Omega) \\
 &\quad +4n_1^2\left(-24-14n_2+\frac{3}{2}\Omega\right)+9n_1(-29+4\Omega) \\
 &\quad +4n_2\left(-41+\frac{11}{2}\Omega+n_2\left(\frac{\Omega}{2}-9\right)\right), \\
 \beta_2 &= 71-4n_1^3-\frac{29}{2}\Omega+2n_1^2(4n_2+\Omega) \\
 &\quad -2n_2(-46-14n_2+7\Omega+n_2\Omega) \\
 &\quad +n_1(75-8\Omega+4n_2(25+7n_2-2\Omega)),
 \end{aligned}$$

и между элементами оператора эволюции U_{ij} выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
 U_{12} &= U_{21} = U_{13} = U_{31} = U_{46} = U_{64} = U_{47} = U_{74}, \\
 U_{22} &= U_{33} = U_{66} = U_{77}, \\
 U_{16} &= U_{61} = U_{17} = U_{71} = U_{24} = U_{34} = U_{42} = U_{43}, \\
 U_{27} &= U_{36} = U_{63} = U_{72}, \\
 U_{25} &= U_{52} = U_{35} = U_{53} = U_{68} = U_{86} = U_{78} = U_{87}, \\
 U_{18} &= U_{81} = U_{45} = U_{54}, \\
 U_{28} &= U_{82} = U_{38} = U_{83} = U_{56} = U_{65} = U_{57} = U_{75}, \\
 U_{26} &= U_{62} = U_{37} = U_{73}, \quad U_{15} = U_{51} = U_{48} = U_{84}, \\
 U_{14} &= U_{41}, \quad U_{58} = U_{85}, \quad U_{23} = U_{32} = U_{67} = U_{76}, \\
 U_{11} &= U_{44}, \quad U_{55} = U_{88}.
 \end{aligned}$$

В случае $N=2$ был получен оператор эволюции \hat{V} в базисных наборах (3), (4):

$$\hat{V} = \begin{pmatrix}
 V_{11} & V_{12} & V_{13} & V_{14} & V_{15} & V_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 V_{21} & V_{22} & V_{23} & V_{24} & V_{25} & V_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 V_{31} & V_{32} & V_{33} & V_{34} & V_{35} & V_{36} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 V_{41} & V_{42} & V_{43} & V_{44} & V_{45} & V_{46} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 V_{51} & V_{52} & V_{53} & V_{54} & V_{55} & V_{56} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 V_{61} & V_{62} & V_{63} & V_{64} & V_{65} & V_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{77} & V_{78} & V_{79} & V_{7,10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{87} & V_{88} & V_{89} & V_{8,10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{97} & V_{98} & V_{99} & V_{9,10} \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_{10,7} & V_{10,8} & V_{10,9} & V_{10,10}
 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} |+, +, -, n_1, 0\rangle \\ |+, -, +, n_1, 0\rangle \\ |+, -, -, n_1, 1\rangle \\ |-, +, -, n_1 + 1, 0\rangle \\ |-, -, +, n_1 + 1, 0\rangle \\ |-, -, -, n_1 + 1, 1\rangle \\ |-, +, +, 0, n_2\rangle \\ |-, +, -, 0, n_2 + 1\rangle \\ |-, -, +, 0, n_2 + 1\rangle \\ |-, -, -, 0, n_2 + 2\rangle \end{pmatrix}, \quad (8)$$

где элементы оператора эволюции $V_{ij} = V_{ij}(n_1, t)$ ($i, j = 1, \dots, 6$), $V_{kl} = V_{kl}(n_2, t)$ ($k, l = 7, \dots, 10$):

$$V_{11} = \begin{cases} \cos^2(\gamma t/\sqrt{2}) \cos(\sqrt{2}\gamma t), & \text{if } n_1 = 1 \\ \frac{1}{4} [2 \cos(\gamma t\sqrt{n_1+1}) + \cos(\gamma\alpha_2 t) + \cos(\gamma\alpha_1 t)], & \text{else} \end{cases}$$

$$V_{33} = \begin{cases} \cos^2(\sqrt{2}\gamma t), & \text{if } n_1 = 1 \\ \frac{1}{2} [\cos(\gamma\alpha_2 t) + \cos(\gamma\alpha_1 t)], & \text{else} \end{cases}$$

$$V_{21} = \begin{cases} -\cos(\sqrt{2}\gamma t) \sin^2(\gamma t/\sqrt{2}), & \text{if } n_1 = 1 \\ \frac{1}{4} [\cos(\gamma\alpha_2 t) + \cos(\gamma\alpha_1 t) - 2 \cos(\gamma t\sqrt{n_1+1})], & \text{else} \end{cases}$$

$$V_{31} = \begin{cases} -i \sin(2\sqrt{2}\gamma t)/2\sqrt{2}, & \text{if } n_1 = 1 \\ i \left[\frac{(\sqrt{2}n_1 - 2\sqrt{n_1+1} + \sqrt{2}) \sin(\gamma\alpha_2 t)}{4\alpha_2\sqrt{n_1+1}} - \frac{(\sqrt{2}n_1 + 2\sqrt{n_1+1} + \sqrt{2}) \sin(\gamma\alpha_1 t)}{4\alpha_1\sqrt{n_1+1}} \right], & \text{else} \end{cases}$$

$$V_{41} = \begin{cases} -2i \cos^3(\gamma t/\sqrt{2}) \sin(\gamma t/\sqrt{2}), & \text{if } n_1 = 1 \\ -\frac{i}{4} \left[2 \sin(\gamma t\sqrt{n_1+1}) + \frac{(n_1 - \sqrt{2(n_1+1)} + 1) \sin(\gamma\alpha_2 t)}{\alpha_2\sqrt{n_1+1}} + \frac{(n_1 + \sqrt{2(n_1+1)} + 1) \sin(\gamma\alpha_1 t)}{\alpha_1\sqrt{n_1+1}} \right], & \text{else} \end{cases}$$

$$V_{51} = \begin{cases} i \sin^2(\gamma t/\sqrt{2}) \sin(\sqrt{2}\gamma t), & \text{if } n_1 = 1 \\ \frac{i}{4} \left[2 \sin(\gamma t\sqrt{n_1+1}) + \frac{(\sqrt{2(n_1+1)} - n_1 - 1) \sin(\gamma\alpha_2 t)}{\alpha_2\sqrt{n_1+1}} - \frac{(\sqrt{2(n_1+1)} + n_1 + 1) \sin(\gamma\alpha_1 t)}{\alpha_1\sqrt{n_1+1}} \right], & \text{else} \end{cases}$$

$$V_{63} = \begin{cases} -\frac{i}{2} \sin(2\sqrt{2}\gamma t), & \text{if } n_1 = 1 \\ i \left[\frac{(\sqrt{2(n_1+1)} - n_1 - 1) \sin(\gamma\alpha_2 t)}{2\alpha_2\sqrt{n_1+1}} - \frac{(\sqrt{2(n_1+1)} + n_1 + 1) \sin(\gamma\alpha_1 t)}{2\alpha_1\sqrt{n_1+1}} \right], & \text{else} \end{cases}$$

$$V_{77} = \frac{n_2 + 2 + (n_2 + 1) \cos(\gamma t\sqrt{4n_2 + 6})}{2n_2 + 3},$$

$$V_{87} = -i \sqrt{\frac{n_2 + 1}{4n_2 + 6}} \sin(\gamma t\sqrt{4n_2 + 6}),$$

$$V_{10,7} = -\frac{2\sqrt{(n_2 + 1)(n_2 + 2)} \sin^2(\gamma t\sqrt{n_2 + 3/2})}{2n_2 + 3},$$

$$V_{88} = \cos^2(\gamma t\sqrt{n_2 + 3/2}), \quad V_{98} = -\sin^2(\gamma t\sqrt{n_2 + 3/2}),$$

$$V_{10,8} = \frac{\sin(\gamma t\sqrt{4n_2 + 6})}{\sqrt{\frac{2}{n_2+2} - 4}},$$

$$V_{10,10} = \frac{n_2 + 1 + (n_2 + 2) \cos(\gamma t\sqrt{4n_2 + 6})}{2n_2 + 3},$$

и выполняются следующие соотношения между элементами оператора эволюции:

$$V_{11} = V_{22} = V_{44} = V_{55}, \quad V_{12} = V_{21} = V_{45} = V_{54},$$

$$V_{31} = V_{13} = V_{32} = V_{23} = V_{65} = V_{56} = V_{46} = V_{64},$$

$$V_{41} = V_{14} = V_{25} = V_{52}, \quad V_{51} = V_{15} = V_{42} = V_{24},$$

$$V_{61} = V_{16} = V_{43} = V_{34} = V_{53} = V_{35} = V_{62} = V_{26},$$

$$V_{87} = V_{78} = V_{97} = V_{79}, \quad V_{10,8} = V_{8,10} = V_{10,9} = V_{9,10},$$

$$V_{33} = V_{66}, \quad V_{63} = V_{36}, \quad V_{7,10} = V_{10,7},$$

$$V_{88} = V_{99}, \quad V_{98} = V_{89},$$

где введены следующие переменные

$$\alpha_1 = \sqrt{3 + n_1 + 2\sqrt{2(n_1 + 1)}},$$

$$\alpha_2 = \sqrt{3 + n_1 - 2\sqrt{2(n_1 + 1)}}.$$

В случае $N = 1$ был получен оператор эволюции \hat{S} в базисных наборах (5), (6)

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ 0 & 0 & S_{43} & S_{44} & S_{45} \\ 0 & 0 & S_{53} & S_{54} & S_{55} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} |+, -, -, n_1, 0\rangle \\ |-, -, -, n_1 + 1, 0\rangle \\ |-, +, -, 0, 0\rangle \\ |-, -, +, 0, 0\rangle \\ |-, -, -, 0, 1\rangle \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где элементы оператора эволюции S_{ij} задаются следующими выражениями:

$$S_{11}(n_1, t) = \cos(\gamma t\sqrt{n_1 + 1}),$$

$$S_{21}(n_1, t) = -i \sin(\gamma t\sqrt{n_1 + 1}),$$

$$S_{33}(t) = \cos^2(\gamma t/\sqrt{2}), \quad S_{43}(t) = -\sin^2(\gamma t/\sqrt{2}),$$

$$S_{53}(t) = -i \sin(\sqrt{2}\gamma t)/\sqrt{2}, \quad S_{55}(t) = \cos(\sqrt{2}\gamma t),$$

с учетом соотношений: $S_{11} = S_{22}$, $S_{12} = S_{21}$, $S_{43} = S_{34}$, $S_{33} = S_{44}$, $S_{35} = S_{45} = S_{53} = S_{54}$.

В случае $N = 0$ эволюции системы не происходит. Таким образом, благодаря операторам эволюции (7)–(9) можно найти волновую функцию полной системы $|\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle$ „три кубита + две моды полей резонаторов“ в последующие моменты времени t для любого начального состояния кубитов $|\psi(0)\rangle_{ABC}$ следующим образом:

$$|\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle = \hat{Q} \left(|\psi(0)\rangle_{ABC} \otimes |n_1\rangle \otimes |n_2\rangle \right),$$

где \hat{Q} один из операторов эволюции (7)–(9).

Заметим, что оператор эволюции рассматриваемой системы можно изначально представить в виде тензорного произведения операторов эволюции двух подсистем. Однако использованный подход для записи полного оператора эволюции позволяет упростить вычисление критериев перепутывания для тепловых полей резонаторов.

Ограничим себя рассмотрением начальных состояний кубитов двух типов. В первом случае в начальный момент времени $t = 0$ атомы приготовлены в бисепарабельном состоянии такого типа, что A и B находятся в перепутанном белловском состоянии вида $\cos \alpha |+, -\rangle + \sin \alpha |-, +\rangle$, а атом C находится либо в возбужденном состоянии $|+\rangle$, либо в основном состоянии $|-\rangle$ ($\pi/2 > \alpha > 0$ — параметр, задающий начальную степень перепутанности между кубитами A и B). Тогда начальный вектор состояния трех кубитов в данном случае запишется в следующем виде:

$$|\psi_1(0)\rangle_{ABC} = \cos \alpha |+, -, -\rangle + \sin \alpha |-, +, -\rangle, \quad (10)$$

$$|\psi_2(0)\rangle_{ABC} = \cos \alpha |+, -, +\rangle + \sin \alpha |-, +, +\rangle. \quad (11)$$

Во втором случае атомы в начальный момент приготовлены в истинно перепутанных состояниях W-типа

$$|W_1(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |+, +, -\rangle + \sin \theta \sin \varphi |+, -, +\rangle + \sin \theta \cos \varphi |-, +, +\rangle, \quad (12)$$

$$|W_2(0)\rangle_{ABC} = \cos \theta |-, -, +\rangle + \sin \theta \sin \varphi |-, +, -\rangle + \sin \theta \cos \varphi |+, -, -\rangle, \quad (13)$$

либо GHZ-типа

$$|G(0)\rangle_{ABC} = \cos \vartheta |+, +, +\rangle + \sin \vartheta |-, -, -\rangle, \quad (14)$$

где θ , φ и ϑ — параметры в диапазоне значений $(0, \pi/2)$, задающие начальную степень перепутывания кубитов A , B и C .

Используя явный вид операторов эволюции (7)–(9), мы нашли точные решения квантового уравнения Шредингера для начальных состояний кубитов (10)–(14) и различных фоковских состояний полей резонаторов. В качестве примера приведем явный вид временной волновой функции $|\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle$ для бисепарабельного начального состояния кубитов (10):

1) Случай $n_1 = n_2 = 0$ ($S_{i1} = S_{i1}(0, t)$, $S_{i3} = S_{i3}(t)$):

$$|\psi_{0,0,2}(t)\rangle = \cos \alpha \left[S_{11} |+, -, -, 0, 0\rangle + S_{21} |-, -, -, 1, 0\rangle \right] + \sin \alpha \left[S_{33} |-, +, -, 0, 0\rangle + S_{43} |-, -, +, 0, 0\rangle + S_{53} |-, -, -, 0, 1\rangle \right].$$

2) Случай $n_1 = 0, n_2 = 1$ ($V_{ij} = V_{ij}(0, t)$):

$$|\psi_{0,1,2}(t)\rangle = \cos \alpha \left[V_{13} |+, +, -, 0, 0\rangle + V_{23} |+, -, +, 0, 0\rangle + V_{33} |+, -, -, 0, 1\rangle + V_{43} |-, +, -, 1, 0\rangle + V_{53} |-, -, +, 1, 0\rangle + V_{63} |-, -, -, 1, 1\rangle \right] + \sin \alpha \left[V_{78} |-, +, +, 0, 0\rangle + V_{88} |-, +, -, 0, 1\rangle + V_{98} |-, -, +, 0, 1\rangle + V_{10,8} |-, -, -, 0, 2\rangle \right].$$

3) Случай $n_1 \geq 1, n_2 = 0$ ($S_{ij} = S_{ij}(n_1, t)$, $V_{ij} = V_{ij}(n_1 - 1, t)$):

$$|\psi_{n_1,0,2}(t)\rangle = \cos \alpha \left[S_{11} |+, -, -, n_1, 0\rangle + S_{21} |-, -, -, n_1 + 1, 0\rangle \right] + \sin \alpha \left[V_{14} |+, +, -, n_1 - 1, 0\rangle + V_{24} |+, -, +, n_1 - 1, 0\rangle + V_{34} |+, -, -, n_1 - 1, 1\rangle + V_{44} |-, +, -, n_1, 0\rangle + V_{54} |-, -, +, n_1, 0\rangle + V_{64} |-, -, -, n_1, 1\rangle \right].$$

4) Случай $n_1 \geq 1, n_2 = 1$ ($V_{ij} = V_{ij}(n_1, t)$, $U_{ij} = U_{ij}(n_1 - 1, 0, t)$):

$$|\psi_{n_1,1,2}(t)\rangle = \cos \alpha \left[V_{13} |+, +, -, n_1, 0\rangle + V_{23} |+, -, +, n_1, 0\rangle + V_{33} |+, -, -, n_1, 1\rangle + V_{43} |-, +, -, n_1 + 1, 0\rangle + V_{53} |-, -, +, n_1 + 1, 0\rangle + V_{63} |-, -, -, n_1 + 1, 1\rangle \right] + \sin \alpha \left[U_{16} |+, +, +, n_1 - 1, 0\rangle + U_{26} |+, +, -, n_1 - 1, 1\rangle + U_{36} |+, -, +, n_1 - 1, 1\rangle + U_{46} |-, +, +, n_1, 0\rangle + U_{56} |+, -, -, n_1 - 1, 2\rangle + U_{66} |-, +, -, n_1, 1\rangle + U_{76} |-, -, +, n_1, 1\rangle + U_{86} |-, -, -, n_1, 2\rangle \right].$$

5) Случай $n_1 = 0, n_2 \geq 2$ ($U_{ij} = U_{ij}(0, n_2 - 2, t)$, $V_{ij} = V_{ij}(n_2 - 1, t)$):

$$|\psi_{0,n_2,2}(t)\rangle = \cos \alpha \left[U_{15} |+, +, +, 0, n_2 - 2\rangle + U_{25} |+, +, -, 0, n_2 - 1\rangle + U_{35} |+, -, +, 0, n_2 - 1\rangle + U_{45} |-, +, +, 1, n_2 - 2\rangle + U_{55} |+, -, -, 0, n_2\rangle + U_{65} |-, +, -, 1, n_2 - 1\rangle + U_{75} |-, -, +, 1, n_2 - 1\rangle + U_{85} |-, -, -, 1, n_2\rangle \right] + \sin \alpha \left[V_{78} |-, +, +, 0, n_2 - 1\rangle + V_{88} |-, +, -, 0, n_2\rangle + V_{98} |-, -, +, 0, n_2\rangle + V_{10,8} |-, -, -, 0, n_2 + 1\rangle \right].$$

6) Случай $n_1 \geq 1, n_2 \geq 2$ ($U_{i5} = U_{i5}(n_1, n_2 - 2, t)$, $U_{i6} = U_{i6}(n_1 - 1, n_2 - 1, t)$):

$$\begin{aligned} |\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle = & \cos \alpha \left[U_{15}|+, +, +, n_1, n_2 - 2\rangle \right. \\ & + U_{25}|+, +, -, n_1, n_2 - 1\rangle + U_{35}|+, -, +, n_1, n_2 - 1\rangle \\ & + U_{45}|-, +, +, n_1 + 1, n_2 - 2\rangle + U_{55}|+, -, -, n_1, n_2\rangle \\ & + U_{65}|-, +, -, n_1 + 1, n_2 - 1\rangle \\ & \left. + U_{75}|-, -, +, n_1 + 1, n_2 - 1\rangle + U_{85}|-, -, -, n_1 + 1, n_2\rangle \right] \\ & + \sin \alpha \left[U_{16}|+, +, +, n_1 - 1, n_2 - 1\rangle \right. \\ & + U_{26}|+, +, -, n_1 - 1, n_2\rangle + U_{36}|+, -, +, n_1 - 1, n_2\rangle \\ & + U_{46}|-, +, +, n_1, n_2 - 1\rangle + U_{56}|+, -, -, n_1 - 1, n_2 + 1\rangle \\ & + U_{66}|-, +, -, n_1, n_2\rangle + U_{76}|-, -, +, n_1, n_2\rangle \\ & \left. + U_{86}|-, -, -, n_1, n_2 + 1\rangle \right]. \end{aligned}$$

Решив задачу поиска волновой функции $|\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle$ в последующие моменты времени $t > 0$ для фоковских состояний полей резонаторов, мы можем перейти к определению временной матрицы плотности рассматриваемой модели для начальных состояний кубитов (10)–(14) в случае начальных одномодовых тепловых состояний полей резонаторов, матрица плотности которых выражается формулой: $\hat{\rho}_{F_l}(0) = \sum_{n_l} p_{n_l} |n_l\rangle \langle n_l|$, где $l = 1, 2$. Здесь статистические веса p_{n_l} выражаются следующей формулой: $p_{n_l} = \bar{n}_l^{n_l} / (\bar{n}_l + 1)^{n_l + 1}$, где \bar{n}_l — среднее число тепловых фотонов в соответствующем резонаторе, которое определяется стандартной формулой Бозе–Эйнштейна $\bar{n}_l = (\exp[\hbar\omega_c / k_B T_l] - 1)^{-1}$. Здесь k_B — постоянная Больцмана, T_l — температура соответствующего резонатора.

Для обобщения результатов на случай тепловых полей резонаторов нужно решить квантовое уравнение Лиувилля

$$i\hbar \frac{\partial \hat{\rho}_{ABC F_1 F_2}(t)}{\partial t} = [\hat{H}_{Int}, \hat{\rho}_{ABC F_1 F_2}(t)], \quad (15)$$

т.е. найти матрицу плотности полной системы $\hat{\rho}_{ABC F_1 F_2}(t)$. Зная явный вид волновых функций $|\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle$ в последующие моменты времени $t > 0$ в случае фоковских состояний полей резонаторов, можно вычислить матрицу плотности следующим образом:

$$\hat{\rho}_{ABC F_1 F_2}(t) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} p_{n_1} p_{n_2} |\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle \langle \psi_{n_1 n_2}(t)|. \quad (16)$$

Для состояний (10), (13), (14) полная матрица плотности принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ABC F_1 F_2}(t) = & \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} p_{n_1} p_{n_2} |\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle \langle \psi_{n_1 n_2}(t)| \\ & + p_{01} \sum_{n_2=2}^{\infty} p_{n_2} |\psi_{01 n_2}(t)\rangle \langle \psi_{01 n_2}(t)| \\ & + p_{12} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} |\psi_{n_1 12}(t)\rangle \langle \psi_{n_1 12}(t)| \\ & + p_{02} \sum_{n_1=1}^{\infty} |\psi_{n_1 02}(t)\rangle \langle \psi_{n_1 02}(t)| + p_{01} p_{12} |\psi_{01 12}(t)\rangle \langle \psi_{01 12}(t)| \\ & + p_{01} p_{02} |\psi_{01 02}(t)\rangle \langle \psi_{01 02}(t)|, \end{aligned}$$

и для состояний (11), (12) представляется в виде

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_{ABC F_1 F_2}(t) = & \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_1} p_{n_2} |\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle \langle \psi_{n_1 n_2}(t)| \\ & + p_{01} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_2} |\psi_{01 n_2}(t)\rangle \langle \psi_{01 n_2}(t)| \\ & + p_{02} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} |\psi_{n_1 02}(t)\rangle \langle \psi_{n_1 02}(t)| + p_{01} p_{02} |\psi_{01 02}(t)\rangle \langle \psi_{01 02}(t)|. \end{aligned}$$

Таким образом, используя решения для фоковских состояний полей резонаторов, путем трудоемких вычислений можно обобщить результаты на случай тепловых состояний полей резонаторов (16) и решить квантовое уравнение Лиувилля (15).

Для исследования эволюции подсистемы кубитов нам нужно вычислить редуцированные трех- и двухкубитные матрицы плотности, которые связаны с полной матрицей плотности (16) с помощью операции взятия следа по переменным всех полей и/или кубитов следующим образом: $\hat{\rho}_{ABC}(t) = \text{Tr}_{F_1} \text{Tr}_{F_2} \hat{\rho}_{ABC F_1 F_2}(t)$, $\hat{\rho}_{ij}(t) = \text{Tr}_k \hat{\rho}_{ABC}(t)$ соответственно. Здесь индексы принимают следующие значения: $i, j, k = A, B, C$ и выполняется условие $i \neq j \neq k$.

2. Выбор критериев перепутывания для исследуемой модели и их вычисление

В настоящей работе мы подробно анализируем трехкубитное и двухкубитное перепутывания. Для исследования трехкубитного перепутывания начальных состояний (12)–(14) мы используем в качестве критерия степень совпадения Φ , которая представляется в следующем виде [26]:

$$\Phi(t) = \text{Tr}(\hat{\rho}_{ABC}(0) \hat{\rho}_{ABC}(t)). \quad (17)$$

Таким образом, степень совпадения Φ показывает насколько трехкубитное состояние в произвольный момент времени $t > 0$ совпадает с изначальным трехкубитным состоянием. В случае бисепарабельных начальных состояний (10), (11) степень совпадения Φ малоинформативна. Мы опускаем подробный вывод выражений для степени совпадения (17) через элементы матрицы плотности трех кубитов $\hat{\rho}_{ABC}$ для экономии места и сразу приводим окончательные выражения для начальных состояний (12)–(14):

$$\Phi = A^2 \rho_{22} + B^2 \rho_{33} + C^2 \rho_{44} + 2AB \operatorname{Re} \rho_{23} + 2AC \operatorname{Re} \rho_{24} + 2BC \operatorname{Re} \rho_{34},$$

$$\Phi = C^2 \rho_{55} + B^2 \rho_{66} + A^2 \rho_{77} + 2AC \operatorname{Re} \rho_{57} + 2AB \operatorname{Re} \rho_{67} + 2BC \operatorname{Re} \rho_{56},$$

$$\Phi = \cos^2 \vartheta \rho_{11} + \sin^2 \vartheta \rho_{88} + 2 \cos \vartheta \sin \vartheta \operatorname{Re} \rho_{18},$$

соответственно. Здесь введены следующие переменные $A = \cos \theta$, $B = \sin \theta \sin \varphi$, $C = \sin \theta \cos \varphi$. В качестве примера запишем элементы трехкубитной матрицы плотности $\hat{\rho}_{ABC}$, которые используются при вычислении степени совпадения Φ , для состояния (14):

$$\rho_{11} = \sin^2 \vartheta \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} p_{n_1} p_{n_2} |U_{18}|^2 + \cos^2 \vartheta \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} p_{n_1} p_{n_2} |U_{11}|^2,$$

$$\rho_{88} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} p_{n_1} p_{n_2} \left[\cos^2 \vartheta |U_{81}|^2 + \sin^2 \vartheta |U_{88}|^2 \right]$$

$$+ p_{01} \sum_{n_2=2}^{\infty} p_{n_2} \left[\cos^2 \vartheta |U_{81}|^2 + \sin^2 \vartheta |V_{10,10}|^2 \right]$$

$$+ p_{12} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \left[\cos^2 \vartheta |U_{81}|^2 + \sin^2 \vartheta |V_{66}|^2 \right]$$

$$+ p_{02} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \left[\cos^2 \vartheta |U_{81}|^2 + \sin^2 \vartheta |S_{22}|^2 \right]$$

$$+ p_{01} p_{12} \left[\cos^2 \vartheta |U_{81}|^2 + \sin^2 \vartheta |S_{55}|^2 \right]$$

$$+ p_{01} p_{02} \left[\cos^2 \vartheta |U_{81}|^2 + \sin^2 \vartheta \right],$$

$$\rho_{18} = \cos \vartheta \sin \vartheta \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} p_{n_1} p_{n_2} U_{11} U_{88}^* + p_{01} \sum_{n_2=2}^{\infty} p_{n_2} U_{11} \right.$$

$$\times V_{10,10}^* + p_{12} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} U_{11} V_{66}^* + p_{02} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} U_{11} S_{22}^*$$

$$\left. + p_{01} p_{12} U_{11} S_{55}^* + p_{01} p_{02} U_{11} \right\}.$$

где введены обозначения

$$U_{i1} \equiv U_{i1}(n_1, n_2, t),$$

$$U_{i8} \equiv U_{i8}(n_1 - 1, n_2 - 2, t),$$

$$V_{10,10} \equiv V_{10,10}(n_2 - 2, t),$$

$$V_{66} \equiv V_{66}(n_1 - 1, t),$$

$$S_{22} \equiv S_{22}(n_1 - 1, t),$$

$$S_{55} \equiv S_{55}(t)$$

с соответствующими числами фотонов n_1 и n_2 в резонаторах.

При исследовании динамики попарного перепутывания кубитов в рассматриваемой модели для бисепарабельных и истинно перепутанных состояний W-типа в качестве количественного критерия перепутывания мы будем использовать критерий отрицательности пар кубитов. Критерий отрицательности двух кубитов i и j можно представить в следующем виде [27]:

$$\xi_{ij} = -2 \sum_k (\lambda_{ij})_k^-, \quad (18)$$

где λ_{ij} — все возможные отрицательные собственные значения двухкубитной матрицы плотности $\hat{\rho}_{ij}^T(t)$, над которой провели операцию частичного транспонирования по переменным первого кубита. Двухкубитная матрица плотности $\hat{\rho}_{ij}^T(t)$ имеет для начальных бисепарабельных состояний (10), (11) и начальных W-состояний (12), (13) следующий вид:

$$\hat{\rho}_{ij}^T(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11}^{ij} & 0 & 0 & \rho_{32}^{ij} \\ 0 & \rho_{22}^{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_{33}^{ij} & 0 \\ \rho_{23}^{ij} & 0 & 0 & \rho_{44}^{ij} \end{pmatrix}, \quad \left(\begin{array}{l} |+, +\rangle \\ |+, -\rangle \\ |-, +\rangle \\ |-, -\rangle \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right).$$

Тогда выражение для отрицательности примет вид

$$\xi_{ij} = \sqrt{(\rho_{44}^{ij} - \rho_{11}^{ij})^2 + 4|\rho_{23}^{ij}|^2} - \rho_{11}^{ij} - \rho_{44}^{ij}.$$

В качестве примера запишем элементы двухкубитной матрицы плотности (19), которые используются для вычисления отрицательности (18) в случае кубитов A

и B , для начального состояния кубитов (12):

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}_{11}^{AB} &= \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_2} \left\{ \left[AU_{12} + BU_{13} \right] \left[AU_{12}^* + BU_{13}^* \right] \right. \\
&+ \left. \left[AU_{22} + BU_{23} \right] \left[AU_{22}^* + BU_{23}^* \right] + C^2 \left[|U_{14}|^2 + |U_{24}|^2 \right] \right\} \\
&+ p_{0_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_2} \left\{ \left[AU_{12} + BU_{13} \right] \left[AU_{12}^* + BU_{13}^* \right] \right. \\
&+ \left. \left[AU_{22} + BU_{23} \right] \left[AU_{22}^* + BU_{23}^* \right] \right\} \\
&+ p_{0_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \left\{ \left[AV_{11} + BV_{12} \right] \left[AV_{11}^* + BV_{12}^* \right] \right. \\
&+ \left. C^2 \left[|U_{14}|^2 + |U_{24}|^2 \right] \right\} + p_{0_1} p_{0_2} \left[AV_{11} + BV_{12} \right] \\
&\times \left[AV_{11}^* + BV_{12}^* \right], \\
\mathcal{S}_{23}^{AB} &= C \left\{ \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_2} \left[(AU_{32} + BU_{33}) U_{44}^* \right. \right. \\
&+ \left. \left. (AU_{52} + BU_{53}) U_{64}^* \right] + p_{0_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_2} \left[(AU_{32} + BU_{33}) V_{77}^* \right. \right. \\
&+ \left. \left. (AU_{52} + BU_{53}) V_{87}^* \right] + p_{0_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \left[(AV_{21} + BV_{22}) U_{44} \right. \right. \\
&+ \left. \left. (AV_{31} + BV_{32}) U_{64} \right] + p_{0_1} p_{0_2} \left[(AV_{21} + BV_{22}) V_{77}^* \right. \right. \\
&+ \left. \left. (AV_{31} + BV_{32}) V_{87}^* \right] \right\}, \\
\mathcal{S}_{44}^{AB} &= \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_2} \left\{ \left[AU_{72} + BU_{73} \right] \left[AU_{72}^* + BU_{73}^* \right] \right. \\
&+ \left. \left[AU_{82} + BU_{83} \right] \left[AU_{82}^* + BU_{83}^* \right] + C^2 \left[|U_{74}|^2 + |U_{84}|^2 \right] \right\} \\
&+ p_{0_1} \sum_{n_2=1}^{\infty} p_{n_2} \left\{ \left[AU_{72} + BU_{73} \right] \left[AU_{72}^* + BU_{73}^* \right] \right. \\
&+ \left. \left[AU_{82} + BU_{83} \right] \left[AU_{82}^* + BU_{83}^* \right] + C^2 \left[|V_{97}|^2 + |V_{107}|^2 \right] \right\} \\
&+ p_{0_2} \sum_{n_1=1}^{\infty} p_{n_1} \left\{ \left[AV_{51} + BV_{52} \right] \left[AV_{51}^* + BV_{52}^* \right] \right. \\
&+ \left. \left[AV_{61} + BV_{62} \right] \left[AV_{61}^* + BV_{62}^* \right] + C^2 \left[|U_{74}|^2 + |U_{84}|^2 \right] \right\} \\
&+ p_{0_1} p_{0_2} \left\{ \left[AV_{51} + BV_{52} \right] \left[AV_{51}^* + BV_{52}^* \right] + \left[AV_{61} + BV_{62} \right] \right. \\
&\times \left. \left[AV_{61}^* + BV_{62}^* \right] + C^2 \left[|V_{97}|^2 + |V_{107}|^2 \right] \right\},
\end{aligned}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned}
U_{i2(i3)} &\equiv U_{i2(i3)}(n_1, n_2 - 1, t), \\
U_{i4} &\equiv U_{i4}(n_1 - 1, n_2, t), \\
V_{k1(k2)} &\equiv V_{k1(k2)}(n_1, t), \\
V_{j7} &\equiv V_{j7}(n_2, t)
\end{aligned}$$

с соответствующими числами фотонов n_1 и n_2 в резонаторах ($i = 1, 2, \dots, 8$, $k = 1, 2, \dots, 6$, $j = 1, 2, 3, 4$). Остальные элементы двухкубитной матрицы плотности не приводятся здесь для экономии места ввиду громоздкости данных выражений.

3. Результаты компьютерного моделирования и обсуждение

На рис. 2 продемонстрирована динамика критерия отрицательности $\xi_{ij}(\gamma t)$ для различных пар кубитов i и j от масштабируемого времени γt для различных значений среднего числа тепловых фотонов в обоих резонаторах при условии $\bar{n}_1 = \bar{n}_2$ для начального бисепарабельного трехкубитного состояния (10). Все графики построены при условии, что кубиты A и B находятся в начальный момент времени $t = 0$ в максимально перепутанном белловском состоянии ($\xi_{AB}(0) = 1$), т.е. начальный параметр перепутывания выбран равным $\alpha = \pi/4$. Из рис. 2, *a* хорошо видно, что начальная белловская перепутанность быстро разрушается даже при достаточно низких интенсивностях полей резонаторов ($\bar{n}_1 \rightarrow 0$, $\bar{n}_2 \rightarrow 0$), поскольку отрицательность никогда в процессе эволюции не принимает исходное значение ($\xi_{AB}(t) \neq 1$) и, более того, отрицательность регулярно принимает нулевые значения, что говорит о наличии паразитного эффекта мгновенной смерти перепутывания. Кубиты A и C и B и C в начальный момент времени находились в неперепутанном состоянии, что полностью согласуется с рис. 2, *b, c*. Однако в процессе эволюции тепловые поля резонаторов индуцируют перепутанность различной степени между указанными парами кубитов. Такой эффект прогнозировался ранее для двухкубитных систем. Наиболее устойчивой перепутанностью по отношению к тепловым полям резонаторов обладают кубиты A и B , поскольку даже для относительно большого среднего числа тепловых фотонов $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.5$ наблюдается перепутанность на некоторых временных интервалах. Напротив, кубиты B и C слабо перепутываются в процессе эволюции, так как парная отрицательность не превышает значение $\xi_{BC}(\gamma t) \leq 0.04$ на всем временном интервале, что является достаточно интересным результатом.

На рис. 3 мы строим зависимости, аналогичные тем, что представлены на рис. 2, но для бисепарабельного трехкубитного состояния (11). В целом результаты для состояния (11) совпадают с выводами для бисепарабельного состояния (10), но есть ряд принципиальных отличий. Во-первых, перепутанность между кубитами

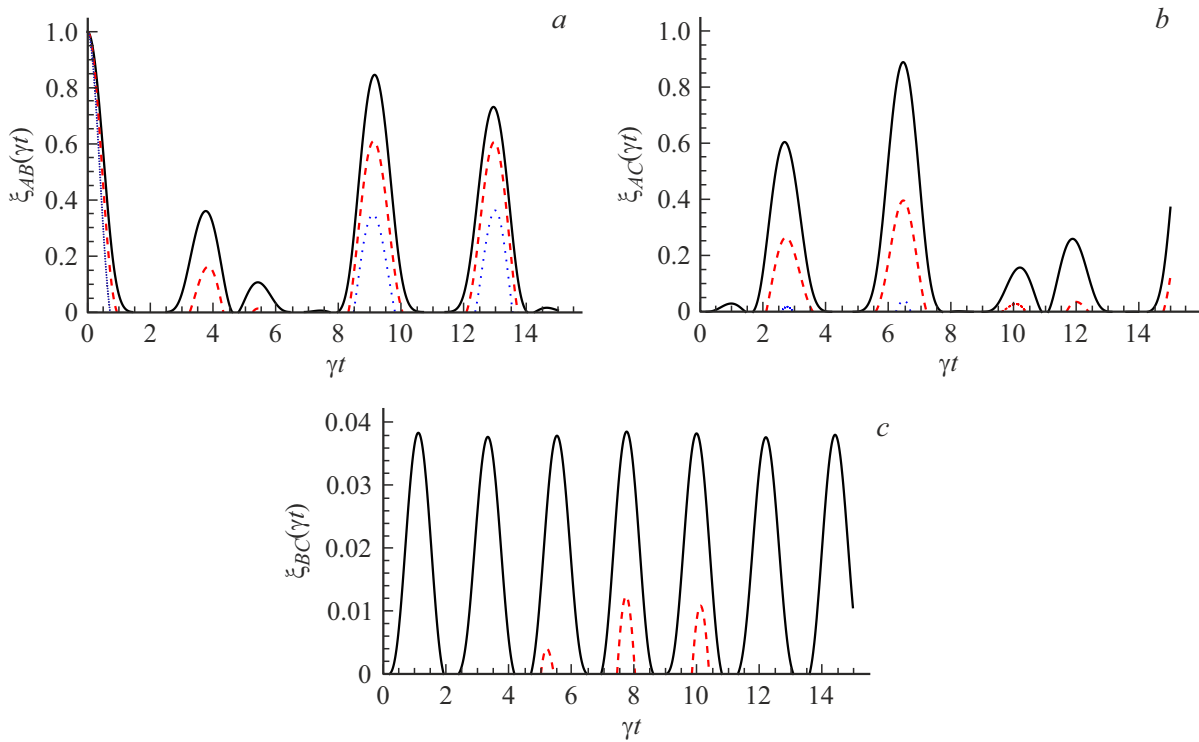


Рис. 2. Зависимость критерия отрицательности $\xi_{ij}(\gamma t)$ для i - и j -кубитов от приведенного времени γt для начального состояния кубитов (10) в случае $\alpha = \pi/4$. Интенсивность тепловых полей: $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.01$ (черная сплошная линия), $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.2$ (красная штриховая линия), $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.5$ (синяя пунктирная линия).

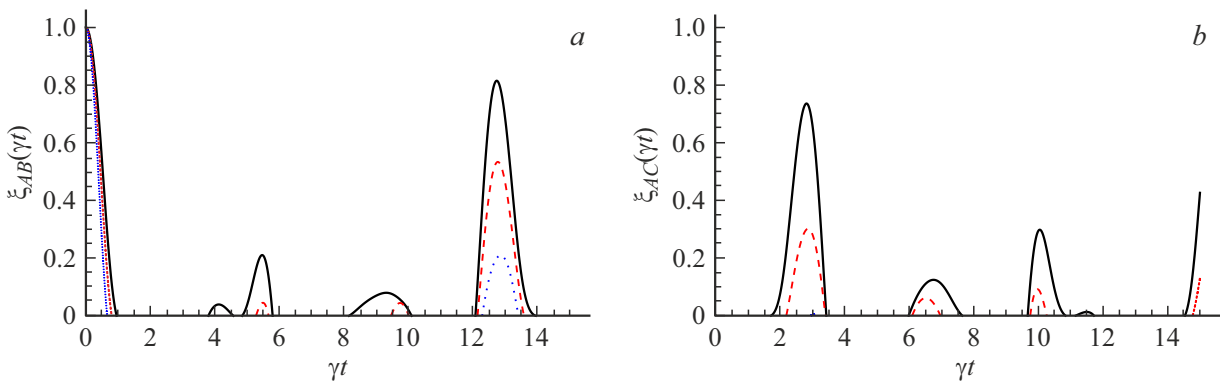


Рис. 3. Аналогично рис. 2, но для начального состояния кубитов (11) в случае $\alpha = \pi/4$.

B и C не индуцируется даже для вакуумных полей резонаторов, т.е. в случае $n_1 = n_2 = 0$. Во-вторых, степень перепутывания между парами кубитов A и B и A и C в последующие моменты времени $t > 0$ для начального бисепарабельного состояния (11) намного меньше, чем степень парного перепутывания у бисепарабельного состояния (10). В-третьих, увеличение интенсивности тепловых полей резонаторов \bar{n}_1, \bar{n}_2 существенно быстрее уменьшает максимальную степень перепутывания кубитов в случае бисепарабельного состояния кубитов (11). Таким образом, начальное состояние кубитов (11) крайне чувствительно к тепловому шуму резонаторов. Отметим, что указанные выше выводы

для бисепарабельных состояний (10), (11) достаточно сильно отличаются от результатов для модели с тремя кубитами в общем резонаторе, которая изучалась нами ранее в работе [25].

На рис. 4, 5 мы демонстрируем результаты компьютерного моделирования критерия отрицательности ξ_{AB} или ξ_{AC} (а), ξ_{BC} (б) и степени совпадения Φ в зависимости от приведенного времени γt для истинно перепутанного трехкубитного W -состояния (12) и (13) в случае $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, $\varphi = \pi/4$. Данный выбор начальных параметров перепутывания θ и φ обусловлен тем, что при указанных значениях W -состояния (12) и (13) переходят в максимально симметричное состо-

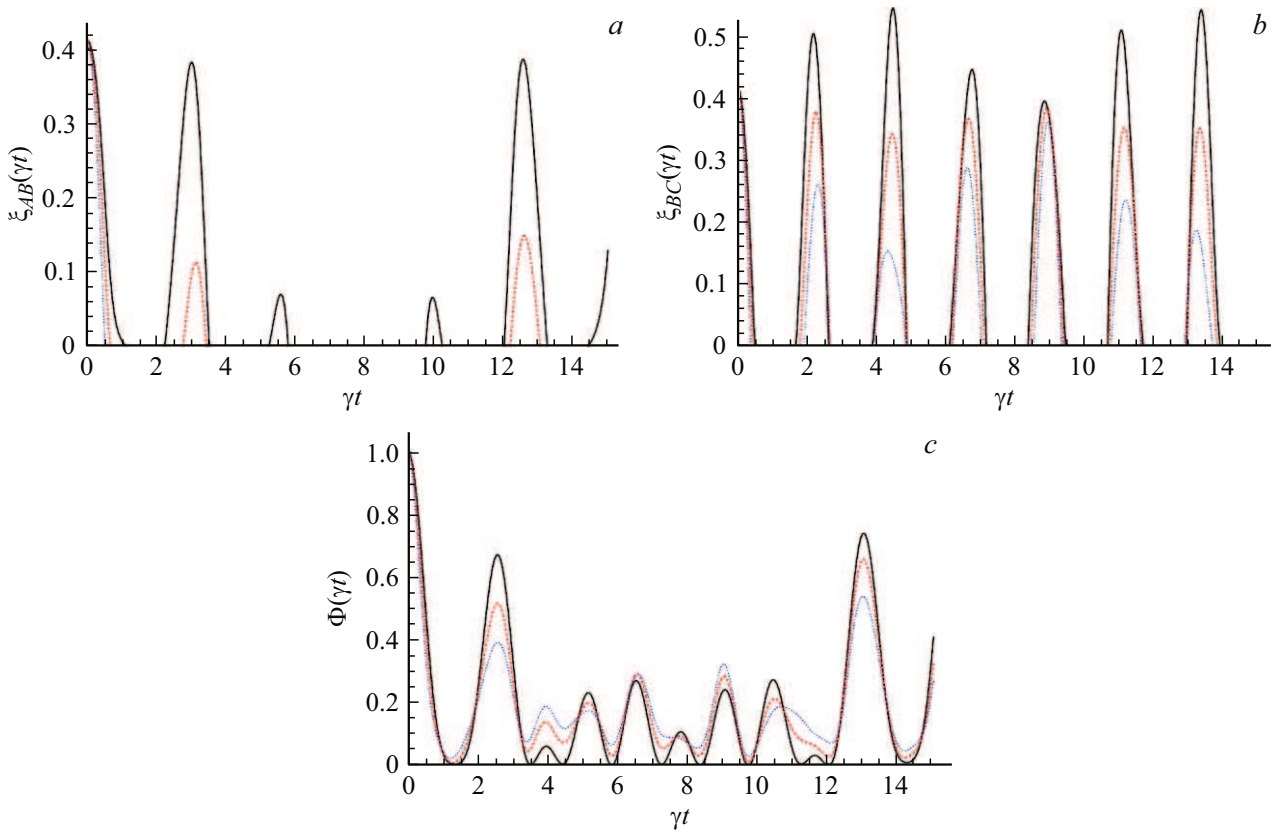


Рис. 4. Зависимость критерия отрицательности $\xi_{ij}(\gamma t)$ для i и j -кубитов и степени совпадения Φ трех кубитов от приведенного времени γt для начального состояния кубитов (12) в случае $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, $\varphi = \pi/4$. Интенсивность тепловых полей: $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.01$ (черная сплошная линия), $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.2$ (красная пунктирная линия), $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.5$ (синяя точечная линия).

яние, т.е. для всех пар кубитов критерий отрицательности принимает значение, равное $\xi_{ij}(0) = (\sqrt{5} - 1)/3$. На графиках хорошо видно, что увеличение интенсивностей тепловых полей резонаторов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 приводит к существенному уменьшению максимальной степени попарного перепутывания кубитов для обоих W-состояний. Стоит отметить, что уменьшение степени попарного перепутывания кубитов происходит гораздо быстрее в данной модели, чем в схеме с тремя кубитами в общем резонаторе [25]. Более того, в данной модели степень совпадения Φ никогда в процессе эволюции не возвращается к своему исходному значению ($\Phi(\gamma t) \neq 1$) для обоих W-состояний (12), (13) даже в случае вакуумных полей резонаторов $\bar{n}_1 \rightarrow 0$, $\bar{n}_2 \rightarrow 0$, что принципиально отличается от результатов для трехкубитных моделей, изучаемых нами ранее [22–25]. Интересным результатом также является то, что попарное перепутывание кубитов B и C в случае W-состояния (12) может превышать в некоторые моменты времени исходное значение критерия отрицательности $\xi_{BC} \geq (\sqrt{5} - 1)/3$, чего не наблюдается для второго W-состояния (13). Также стоит отметить, что для данной пары кубитов B и C при любых интенсивностях тепловых полей резонаторов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 области с эффектом мгновенной смерти перепутывания

гораздо меньше для второго W-состояния (13), чем для первого W-состояния (12).

Наконец, на рис. 6 мы демонстрируем зависимость степени совпадения Φ от масштабируемого времени γt для различных значений интенсивностей тепловых полей резонаторов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 для начального GHZ-состояния (14) в случае $\vartheta = \pi/4$. Как и для W-состояний (12)–(13), тепловой шум резонаторов существенно уменьшает максимальное значение степени совпадения Φ и, более того, три кубита в последующие моменты времени t никогда не возвращаются в исходное GHZ-состояние (14) даже в случае вакуумных полей резонаторов $\bar{n}_1 \rightarrow 0$, $\bar{n}_2 \rightarrow 0$. Расчеты показывают, что попарная отрицательность ξ_{ij} в случае GHZ-состояния (14) принимает нулевые значения на всем временном интервале при любых интенсивностях тепловых полей резонаторов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 . Дополнительное компьютерное моделирование также показывает, что все вышеуказанные выводы справедливы для начальных состояний (10)–(14) при различных начальных параметрах перепутывания α , θ , φ и ϑ . Отметим достаточно сложное поведение параметров перепутывания ξ_{ij} , Φ для всех начальных трехкубитных состояний (10)–(14) при любых интенсивностях резонаторов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 , что не позволяет провести подробный анализ поведения критерия

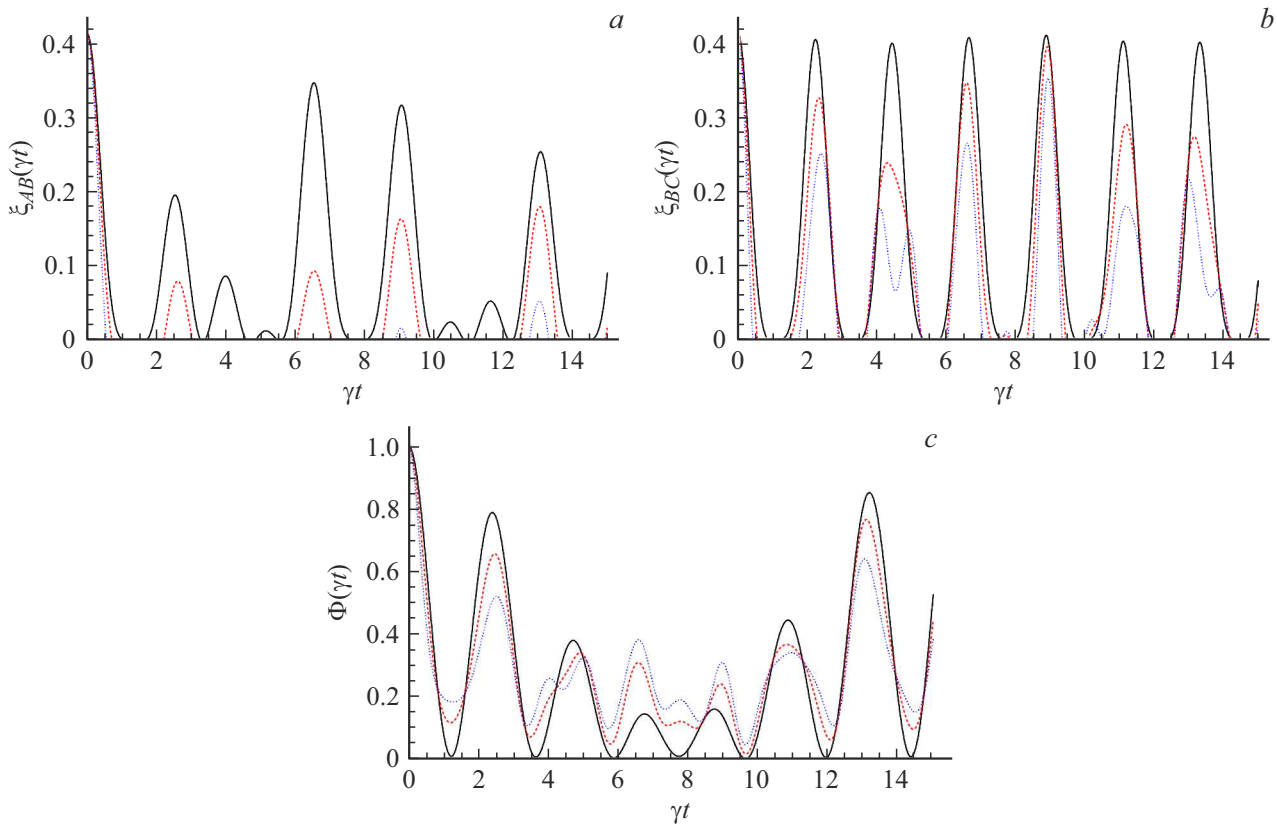


Рис. 5. Аналогично рис. 4, но для начального состояния кубитов (13) в случае $\theta = \arccos(1/\sqrt{3})$, $\varphi = \pi/4$.

отрицательности ξ_{ij} и степени совпадения Φ для вакуумных полей резонаторов. Этот результат принципиально отличается от тех результатов, которые были получены нами для других типов трехкубитных моделей [22–25]. Данное обстоятельство объясняется различной динамикой кубита A в первом резонаторе и кубитов B и C во втором резонаторе. Указанную динамику кубитов в случае вакуумных полей резонаторов $n_1 = n_2 = 0$ можно исследовать с помощью анализа инверсии населенности одного кубита $W_j = \rho_{11}^j - \rho_{22}^j$, определяемую через элементы соответствующей однокубитной матрицы плотности $\hat{\rho}_j$, и временной волновой функции $|\psi_{n_1 n_2}(t)\rangle$. Подробный анализ динамики инверсии населенности в случае вакуумных полей резонаторов $n_1 = n_2 = 0$ ввиду громоздкости будет представлен в нашей следующей работе.

Заключение

Таким образом, в работе мы нашли точное выражение для оператора эволюции для новой трехчастичной модели, состоящей из одного кубита Джейнса–Каммингса и двух кубитов Тависа–Каммингса, запертых в независимые идеальные высокодобротные резонаторы и резонансно взаимодействующих с соответствующими выделенными квантовыми модами этих резонаторов. С его помощью было найдено точное решение квантового

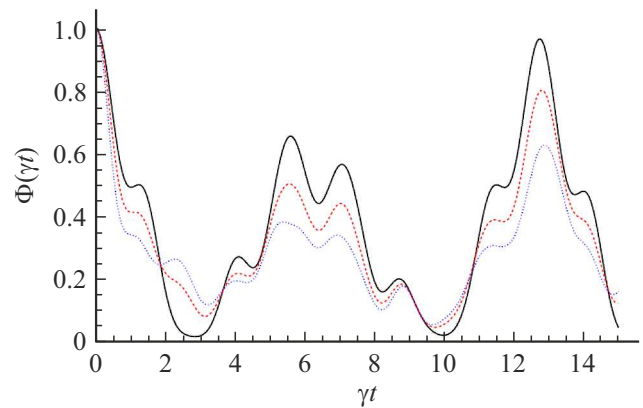


Рис. 6. Зависимость степени совпадения Φ от приведенного времени γt для начального состояния кубитов (14) в случае $\vartheta = \pi/4$. Интенсивность тепловых полей: $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.01$ (черная сплошная линия), $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.2$ (красная пунктирная линия), $\bar{n}_1 = \bar{n}_2 = 0.5$ (синяя точечная линия).

уравнения Лиувилля для тепловых состояний полей резонаторов и различных состояний кубитов: бисепарабельных и истинно перепутанных W - и GHZ -типа. Нами с помощью редуцированных матриц плотностей кубитов был проведен расчет двух параметров перепутывания: парной отрицательности ξ_{ij} и степени совпадения Φ . В результате, нами было показано, что кубиты в про-

цессе эволюции не возвращаются в исходные состояния ни при каких интенсивностях тепловых полей резонаторов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 , что принципиально отличает поведение исследуемой модели от поведения рассмотренных ранее трехкубитных моделей [22–25]. Для кубитов, захваченных в различные резонаторы и изначально находящихся в перепутанном состоянии, на протяжении всего временного интервала эволюции имеет место эффект мгновенной смерти и возрождения парного перепутывания для достаточно широкого диапазона тепловых интенсивностей \bar{n}_1 и \bar{n}_2 . Однако, существенное отклонение интенсивностей тепловых полей резонаторов \bar{n}_1 и \bar{n}_2 от вакуумных состояний достаточно быстро приводит к полной декогеренции перепутывания для всех пар кубитов и к отсутствию какого-либо возрождения парного перепутывания кубитов. При этом в ранее изученных трехкубитных моделях [22–25] уменьшение максимальной степени парного перепутывания кубитов и степени совпадения во времени для тех же значений интенсивностей полей резонаторов происходит гораздо медленнее. Мы также отмечаем значительно более сложное временное поведение параметров перепутывания в сравнении с рассмотренными ранее трехкубитными моделями даже для вакуумных полей резонаторов $\bar{n}_1 \rightarrow 0$, $\bar{n}_2 \rightarrow 0$, что не позволяет провести подробный анализ динамики кубитов и рассчитать период колебаний осцилляций Раби в аналитическом виде. В целом данное исследование существенно улучшает наше понимание ключевых особенностей динамики перепутывания кубитов в рассматриваемой трехчастичной модели.

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, № FSSS-2025-0003.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] M.A. Nielsen, I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. 10th Anniversary Edition (Cambridge University Press: NY., USA, 2010), 702 p. DOI: 10.1017/CBO9780511976667
- [2] A. Barenco et al. *Phys. Rev. A*, **52**, 3457 (1995). DOI: 10.1103/PhysRevA.52.3457
- [3] Y. Shi. *Quantum Information and Computation*, **3**, 84 (2003).
- [4] E. Barnes, C. Arenz, A.J.G. Pitchford, S.E. Economou. *Phys. Rev. B*, **96** (2), 024504 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevB.96.024504
- [5] M. Li, L. Jia, J. Wang, S. Shen, S.M. Fei. *Phys. Rev. A*, **96**, 052314 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevA.96.052314
- [6] M.D. Reed, L. DiCarlo, S.E. Nigg, L. Sun, L. Frunzio, S.M. Girvin, R.J. Schoelkopf. *Nature*, **482**, 382 (2012). DOI: 10.1038/nature10786
- [7] A. Isar. *Open Systems Information Dynamics*, **16** (2), 205 (2009). DOI: 10.1142/S1230161209000153
- [8] L. Aolita, R. Chaves, D. Cavalcanti, A. Acin, L. Davidovich. *Phys. Rev. Lett.*, **100** (8), 080501 (2008). DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.080501
- [9] Z.-L. Xiang, S. Ashhab, J.Q. You, F. Nori. *Rev. Mod. Phys.*, **85**, 623 (2013). DOI: 10.1103/revmodphys.85.623
- [10] I.M. Georgescu, S. Ashhab, F. Nori. *Rev. Mod. Phys.*, **86**, 153 (2014). DOI: 10.1103/RevModPhys.86.153
- [11] G. Wendin. *Rep. Prog. Phys.*, **80** (10), 106001 (2017). DOI: 10.1088/1361-6633/aa7e1a
- [12] G.-Q. Li, X.-Y. Pan. *Chin. Phys. B*, **27** (2), 020304 (2018). DOI: 10.1088/1674-1056/27/2/020304
- [13] D.J. van Woerkom, P. Scarlino, J.H. Ungerer, C. Muller, J.V. Koski, A.J. Landig, C. Reichl, W. Wegscheider, T. Ihn, K. Ensslin, A. Wallraff. *Phys. Rev. X*, **8**, 041018 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevX.8.041018
- [14] B.W. Shore, P.L. Knight. *J. Mod. Opt.*, **40** (7), 1195 (1993). DOI: 10.1080/09500349314551321
- [15] J. Larson, T. Mavrogordatos. *The Jaynes-Cummings Model and Its Descendants: Modern research directions*. (IoP Publishing, Bristol 2021), 426 p. DOI: 10.1088/978-0-7503-3447-1
- [16] M. Neeley, R.C. Bialczak, M. Lenander, E. Lucero, M. Mariantoni, A.D. O’Connell, D. Sank, H. Wang, M. Weides, J. Wenner, Y. Yin, T. Yamamoto, A.N. Cleland, J.M. Martinis. *Nature*, **467**, 570 (2010). DOI: 10.1038/nature09418
- [17] L. DiCarlo, M.D. Reed, L. Sun, B.R. Johnson, J.M. Chow, J.M. Gambetta, L. Frunzio, S.M. Girvin, M.H. Devoret, R.J. Schoelkopf. *Nature*, **467**, 574 (2010). DOI: 10.1038/nature09416
- [18] Ch.F. Roos, M. Riebe, H. Höffner, W. Hönkel, J. Benhelm, G.P.T. Lancaster, Ch. Becher, F. Schmidt-Kaler, R. Blatt. *Nature*, **429**, 734 (2004). DOI: 10.1038/nature02570
- [19] D.C. Cole, J.J. Wu, S.D. Erickson, P.-Y. Hou, A.C. Wilson, D. Leibfried, F. Reiter. *New J. Phys.*, **23**, 073001 (2021). DOI: 10.1088/1367-2630/ac09c8
- [20] P. Neumann, N. Mizuochi, F. Rempp, P. Hemmer, H. Watanabe, S. Yamasaki, V. Jacques, T. Gaebel, F. Jelezko, J. Wrachtrup. *Science*, **320**, 1326 (2008). DOI: 10.1126/science.1157233
- [21] K. Takeda, A. Noiri, T. Nakajima, J. Yoneda, T. Kobayashi, S. Tarucha. *Nature Nanotechnol.*, **16**, 965 (2021). DOI: 10.1038/s41565-021-00925-0
- [22] А.Р. Багров, Е.К. Башкиров. *ЖТФ*, **94** (3), 341 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.03.57370.301-23
- [23] А.Р. Багров, Е.К. Башкиров. *ЖТФ*, **95** (5), 853 (2025). DOI: 10.61011/JTF.2025.05.60275.433-24
- [24] E.K. Bashkirov, A.R. Bagrov. *Quantum Inf. Process.*, **24** (5), 154 (2025). DOI: 10.1007/s11128-025-04772-z
- [25] E.K. Bashkirov, A.R. Bagrov. *Laser Phys.*, **35** (6), 065203 (2025). DOI: 10.1088/1555-6611/addd90
- [26] R. Jozsa. *J. Mod. Opt.*, **41**, 2315 (1994). DOI: 10.1080/09500349414552171
- [27] A. Peres. *Phys. Rev. Lett.*, **77** (8), 1413 (1996). DOI: 10.1103/PhysRevLett.77.1413