

04

Комплекс программ для вычисления реализуемых конфигураций плазмы в токамаке Глобус-М2

© В.И. Кружков¹, А.Е. Коньков¹, П.С. Коренев¹, Н.В. Сахаров², В.Б. Минаев², Ю.В. Петров²

¹ Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва, Россия

² ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: kruzchkov@ipu.ru

Поступило в Редакцию 15 декабря 2025 г.

В окончательной редакции 6 февраля 2026 г.

Принято к публикации 17 февраля 2026 г.

Представлен комплекс программ для планирования эксперимента на сферическом токамаке Глобус-М2, позволяющий определять достижимые конфигурации плазмы с учетом ограничений электромагнитной системы. Область достижимости вычисляется по линейной модели плазмы с переменными параметрами при заданных ограничениях на напряжения и токи в обмотках полоидального магнитного поля. Алгоритм использует экспериментальные данные разрядов и представляет интерактивный интерфейс для последовательной оценки реализуемой формы плазмы.

Ключевые слова: токамак, форма плазмы, область достижимости, линейная модель.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.10.62740.20601

Токамак Глобус-М2 [1], расположенный в ФТИ им. А.Ф. Иоффе, представляет собой сферический токамак с большим радиусом $R = 0.36$ м, малым радиусом $a = 0.24$ м и аспектным отношением $A = 1.5$.

Для создания требуемой формы плазмы в ходе эксперимента задаются программы токов в обмотках полоидального магнитного поля. При этом следует учитывать, что питание обмоток электромагнитной системы осуществляется источниками большой мощности. В связи с этим необходимо формировать заведомо реализуемый сценарий плазменного разряда с учетом ограничений на напряжения и токи в обмотках токамака. В настоящей работе под формой плазмы понимается набор зазоров между границей плазмы и лимитером (рис. 1).

Поскольку множество достижимости линейной модели при ограниченных управлениях на конечном интервале времени является ограниченным [2], для поиска реализуемых конфигураций формы плазмы был разработан комплекс программ [3]. В основе алгоритма лежит метод [4] нахождения реализуемых выходов линейной модели плазмы в токамаке с переменными параметрами [5] с учетом заданных ограничений.

Метод [4] основан на использовании матричной связи между входами и выходами линейной динамической системы на k -м шаге. Матрица M_k связывает управляющие сигналы на текущем и предшествующем тактах с выходным сигналом на текущем такте, а матрица H_k связывает управляющие сигналы на текущем и предшествующем тактах с выходным сигналом на текущем и предшествующем тактах. Для рассматриваемых далее моделей плазмы записывается матричная связь

$$\begin{aligned} y_k &= M_k U_k, \\ Y_k &= H_k U_k, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_k — вектор-столбец выходов на k -м шаге, u_k — вектор-столбец входов на k -м шаге, $Y_k = [y_2^T, \dots, y_k^T]^T \in \mathbb{R}^{33(k-1)}$ — объединенный вектор выходов, $U_k = [u_1^T, u_2^T, \dots, u_{k-1}^T]^T \in \mathbb{R}^{6(k-1)}$ — объединенный вектор входов. Отсутствие в объединенных векторах элементов u_k и y_1 связано с нулевыми начальными условиями и отсутствием в модели плазмы матрицы прямой связи D [5]. Ограничения на входы и выходы на каждом такте задаются в виде отрезков

$$\begin{aligned} u_{k,\min}^{(i)} &\leq u_k^{(i)} \leq u_{k,\max}^{(i)}, \\ y_{k,\min}^{(j)} &\leq y_k^{(j)} \leq y_{k,\max}^{(j)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и далее верхние индексы обозначают элемент вектора. Таким образом, задача нахождения области достижимости (ОД) для каждой компоненты выходного вектора сводится к нахождению максимума и минимума при условиях (1) и (2):

$$\begin{aligned} \min\{y_k^{(j)} = M_k^{(j)} U_k\}, \\ \max\{y_k^{(j)} = M_k^{(j)} U_k\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Экспериментальные данные плазменных разрядов токамака Глобус-М2 включают измерения напряжений и токов в обмотках полоидального магнитного поля, а также восстановленные по магнитным измерениям координаты центра плазменного шнура и зазоры между границей плазмы и лимитером с шагом дискретизации $100 \mu\text{s}$ (рис. 1, с). Восстановление равновесия плазмы выполнялось с помощью алгоритма FCDI-IT [6]. Ограничения на эти сигналы могут быть заданы как на отклонения от сценария, так и на полные сигналы (рис. 2).

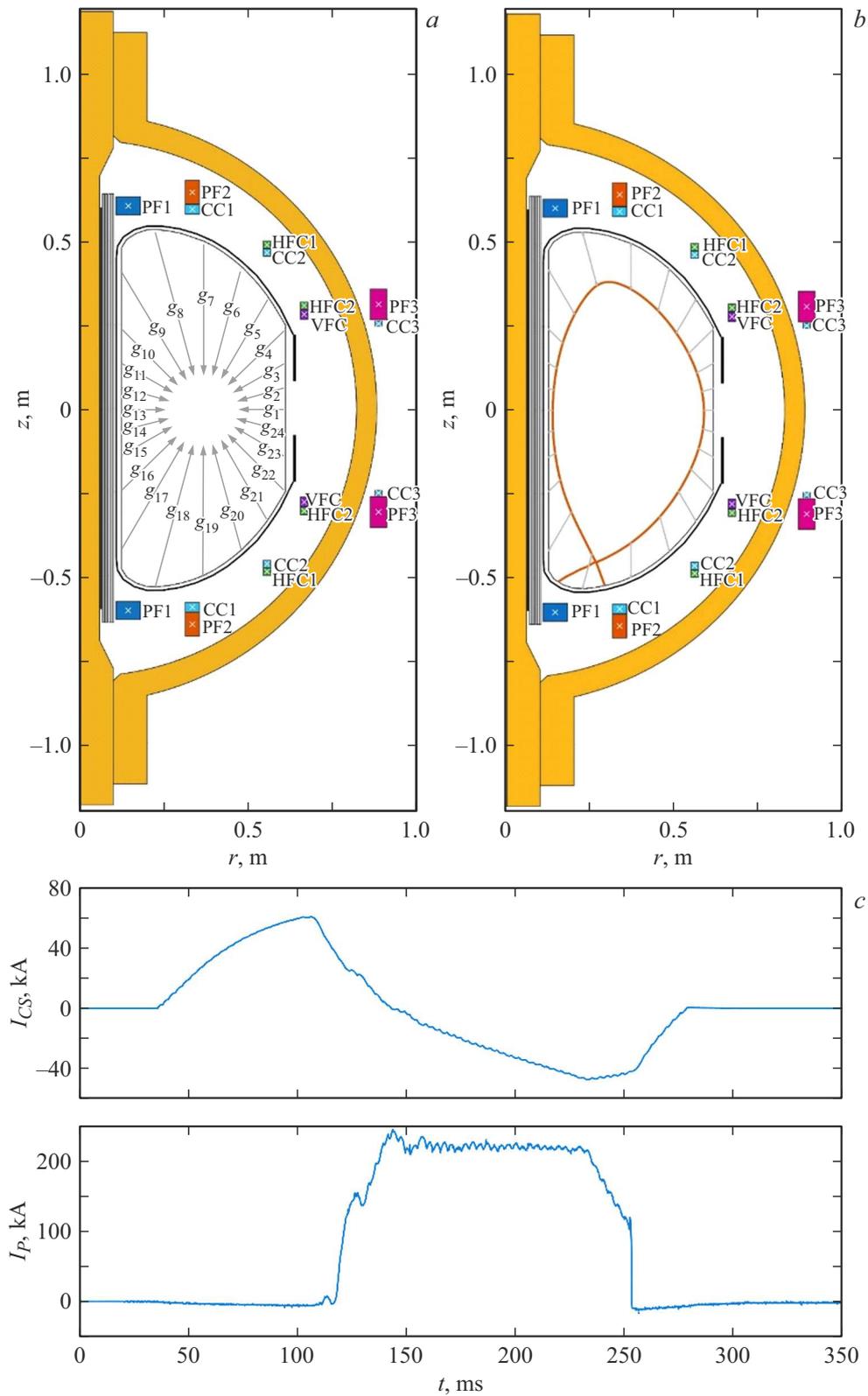


Рис. 1. Вертикальное сечение токамака Глобус-М2 и зазоры. *a* — направления, вдоль которых измеряются зазоры g_1 – g_{24} между границей плазмы и лимитером токамака; *b* — зазоры между лимитером и границей плазмы для некоторой конфигурации; *c* — ток в центральном соленоиде и ток плазмы в разряде № 41805.

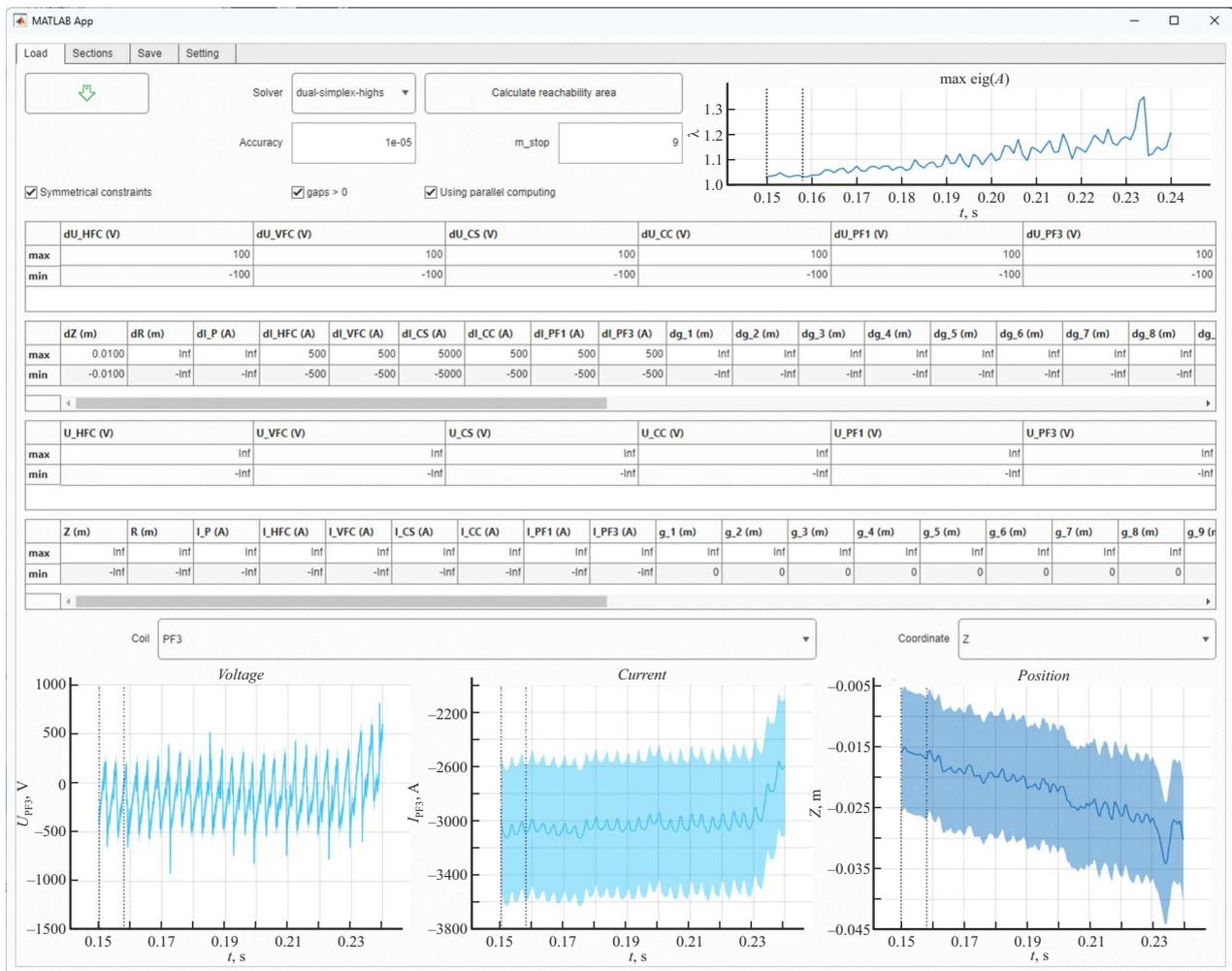


Рис. 2. Интерфейс приложения, вкладка „Загрузка“ („Load“), разряд № 41805. Доступен выбор ограничений на управляющие и выходные сигналы, показаны токи и напряжения в обмотках и область возможных отклонений по этим сигналам.

Таким образом, ограничения на отклонения на каждом шаге определяются следующим образом:

$$\begin{cases} y_{\min} \leq y_k + \delta y_k \leq y_{\max} \\ \delta y_{\min} \leq \delta y_k \leq \delta y_{\max} \end{cases}$$

$$\rightarrow \max(\delta y_{\min}, y_{\min} - y_k) \leq \delta y_k \leq \min(\delta y_{\max}, y_{\max} - y_k), \quad (4)$$

аналогично для входных сигналов.

Линейные модели плазмы, использованные в настоящей работе, были рассчитаны для равновесий, восстановленных алгоритмом FCDI-IT [5,6] по сигналам магнитной диагностики токамака Глобус-М2. Модели получены согласно методике, описанной в [7], на основе законов Кирхгофа для контуров тока в обмотках, камере и плазме, а также уравнения баланса сил, действующих на плазму.

Опишем подробнее получение моделей. Алгоритмом FCDI-IT восстановлено распределение плотности тороидального тока плазмы $J(r, z)$ с минимизацией невязки

между моделируемыми и измеренными значениями полоидального потока на магнитных петлях и тока плазмы, а также невязки между моделируемым распределением тока на камере и его оценкой, рассчитанной из закона Фарадея [6]. Плазма моделировалась одной цепью с плотностью тока $J(r, z)$, центр которой расположен в точке с координатами (r_P, z_P) . Закон Кирхгофа записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} M_{PC} \frac{dI_C}{dt} + M_{PV} \frac{dI_V}{dt} + L_P \frac{dI_P}{dt} \\ + R_P I_P + \frac{\partial \Psi_P}{\partial r_P} \frac{dr_P}{dt} + \frac{\partial \Psi_P}{\partial z_P} \frac{dz_P}{dt} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где I_C — вектор токов катушек токамака, I_V — вектор токов камеры токамака, $I_P = \int \int J(r, z) dz dr$ — полный ток плазмы, R_P — сопротивление плазмы, L_P — собственная индуктивность плазмы, Ψ_P — магнитный поток через контур плазмы, M_{PC} — матрица индуктивности между плазмой и катушками, M_{PV} — матрица индуктивности между плазмой и камерой.

Сопrotивление плазмы оценивалось как $R_P = -\Delta\psi_a/\bar{I}_P\Delta t$, где $\Delta\psi_a$ — полученное при восстановлении равновесия изменение магнитного полоидального потока на магнитной оси плазмы в течение плато тока Δt , \bar{I}_P — усредненный на плато ток плазмы.

Линеаризованные уравнения баланса сил имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_r}{\partial r_P}\delta r_P + \frac{\partial F_r}{\partial z_P}\delta z_P + \frac{\partial F_r}{\partial I_C}\delta I_C + \frac{\partial F_r}{\partial I_V}\delta I_V + \frac{\partial F_r}{\partial I_P}\delta I_P &= 0, \\ \frac{\partial F_z}{\partial r_P}\delta r_P + \frac{\partial F_z}{\partial z_P}\delta z_P + \frac{\partial F_z}{\partial I_C}\delta I_C + \frac{\partial F_z}{\partial I_V}\delta I_V + \frac{\partial F_z}{\partial I_P}\delta I_P &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

В вертикальную составляющую силы F_z входят лишь действующие на плазму силы Ампера, а в горизонтальную кроме сил Ампера $F_{r,vac}$ также входит расталкивающая сила $F_{r,hoop}$, зависящая в том числе и от давления плазмы. Поскольку в равновесии полная сила, действующая на плазму, равна нулю ($F_r = F_{r,vac} + F_{r,hoop} = 0$), то $F_{r,hoop} = -F_{r,vac}$.

Расталкивающую силу также можно аппроксимировать как [8]:

$$F_{r,hoop} = \frac{\mu_0 I_P^2}{2} \left(\ln \frac{8r_P}{a} + \beta_P + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} \right). \quad (7)$$

Согласно этой аппроксимации, расталкивающая сила не зависит от z_P , зависит логарифмически от r_P и квадратично от I_P , что позволяет оценить производные, входящие в линеаризованное уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r_P} F_{r,hoop} &= \frac{\mu_0 I_P^2}{2r_P}, & \frac{\partial}{\partial z_P} F_{r,hoop} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial I_P} F_{r,hoop} &= \mu_0 I_P \left(\ln \frac{8r_P}{a} + \beta_P + \frac{l_i}{2} - \frac{3}{2} \right) = \frac{2F_{r,hoop}}{I_P} = -\frac{2F_{r,vac}}{I_P}. \end{aligned} \quad (8)$$

Таким образом, для учета расталкивающей силы в уравнении баланса сил не использовалось давление плазмы, а использовались лишь силы Ампера, рассчитываемые на основе измеренных в эксперименте токов катушек I_C и восстановленных распределений тока плазмы $J(r, z)$ и токов камеры I_V .

В результате получены уравнения, линеаризованные для малых отклонений токов от восстановленного равновесия. Также для малых отклонений токов и смещений плазмы решалась задача нахождения магнитного потока по известным токам и находилась наибольшая замкнутая линия уровня потока, из ее изменения находились коэффициенты, связывающие форму плазмы с отклонениями токов в линейной модели. Эти коэффициенты вместе с коэффициентами линеаризованных уравнений Кирхгофа и баланса сил определяют матрицы A_k , B_k и C_k в линейной модели. Вектор состояний x имеет физический смысл вектора отклонений токов и включает в себя шесть токов в обмотках, десять токовых мод

вакуумной камеры и ток плазмы [9]. Следует отметить, что представленная программа может работать и с другими линейными моделями, например полученными линеаризацией кода, решающего задачу равновесия. В виде модели в пространстве состояний динамика плазмы записывается следующим образом [5]:

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k \delta u_k, \\ \delta y_k = C_k x_k, \end{cases} \quad (9)$$

где $x \in \mathbb{R}^{17}$ — вектор состояний, $\delta u = [\delta U_{HFC}, \delta U_{VFC}, \delta U_{CS}, \delta U_{CC}, \delta U_{PF1}, \delta U_{PF3}] \in \mathbb{R}^6$ — отклонения напряжений от сценарных значений в управляющих обмотках, $\delta y = [\delta Z, \delta R, \delta I_P, \delta I_{HFC}, \delta I_{VFC}, \delta I_{CS}, \delta I_{CC}, \delta I_{PF1}, \delta I_{PF3}, \delta g_1, \dots, \delta g_{24}] \in \mathbb{R}^{33}$ — отклонения по положению, току плазмы, току в обмотках и зазорам. В данном случае при условии нулевого вектора состояний в начальный момент времени матрицы M_k , H_k для $k \geq 2$ вычисляются рекуррентно с использованием вспомогательной матрицы Q [4]:

$$\begin{aligned} Q_2 &= B_1, & Q_{k+1} &= A_k Q_k, \\ M_k &= C_k Q_k, \\ H_k &= \begin{bmatrix} H_{k-1} & 0_{33(k-1) \times 6} \\ & M_k \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $M_k \in \mathbb{R}^{33 \times 6(k-1)}$, $H_k \in \mathbb{R}^{33(k-1) \times 6(k-1)}$, $Q_k \in \mathbb{R}^{17 \times 6(k-1)}$, $0_{33(k-1) \times 6}$ — нулевая матрица соответствующей размерности. Ограничения на отклонения по напряжениям в управляющих обмотках были рассмотрены на уровне $|\delta u| \leq 100$ В, по полоидальным токам — $|\delta I_{PF}| \leq 500$ А, по току в индукторе — $|\delta I_{CS}| \leq 5$ кА, по вертикальному положению — $|\delta Z| \leq 1$ см, область изменений по форме ограничена размером вакуумной камеры. Ограничение на напряжение определяет скорости изменения токов в обмотках, что влияет на характерное время эволюции плазмы. Результат решения задачи для модели вида этого разряда представлен на рис. 3. Дополнительным результатом работы алгоритма решения задачи являются отклоненные сценарные сигналы, реализующие данную конфигурацию. Результаты численного моделирования с использованием найденных управлений подтвердили реализуемость рассчитанных конфигураций (рис. 4).

Пользовательский интерфейс приложения [3] для определения достижимых конфигураций формы плазмы состоит из двух основных вкладок: „Загрузка“ („Load“) и „Сечения“ („Sections“). На вкладке „Загрузка“ (рис. 2) реализована возможность загрузки модели вида (9), задания ограничений на сигналы согласно (4) и просмотра графиков экспериментальных сигналов. Также доступен выбор алгоритма и точности решения оптимизационной задачи (3): симплекс-метод [10] или метод внутренней точки [11]. Возможно решение задачи (3) с использованием параллельных вычислений для одновременного расчета ОД различных компонент выходов $y^{(j)}$.

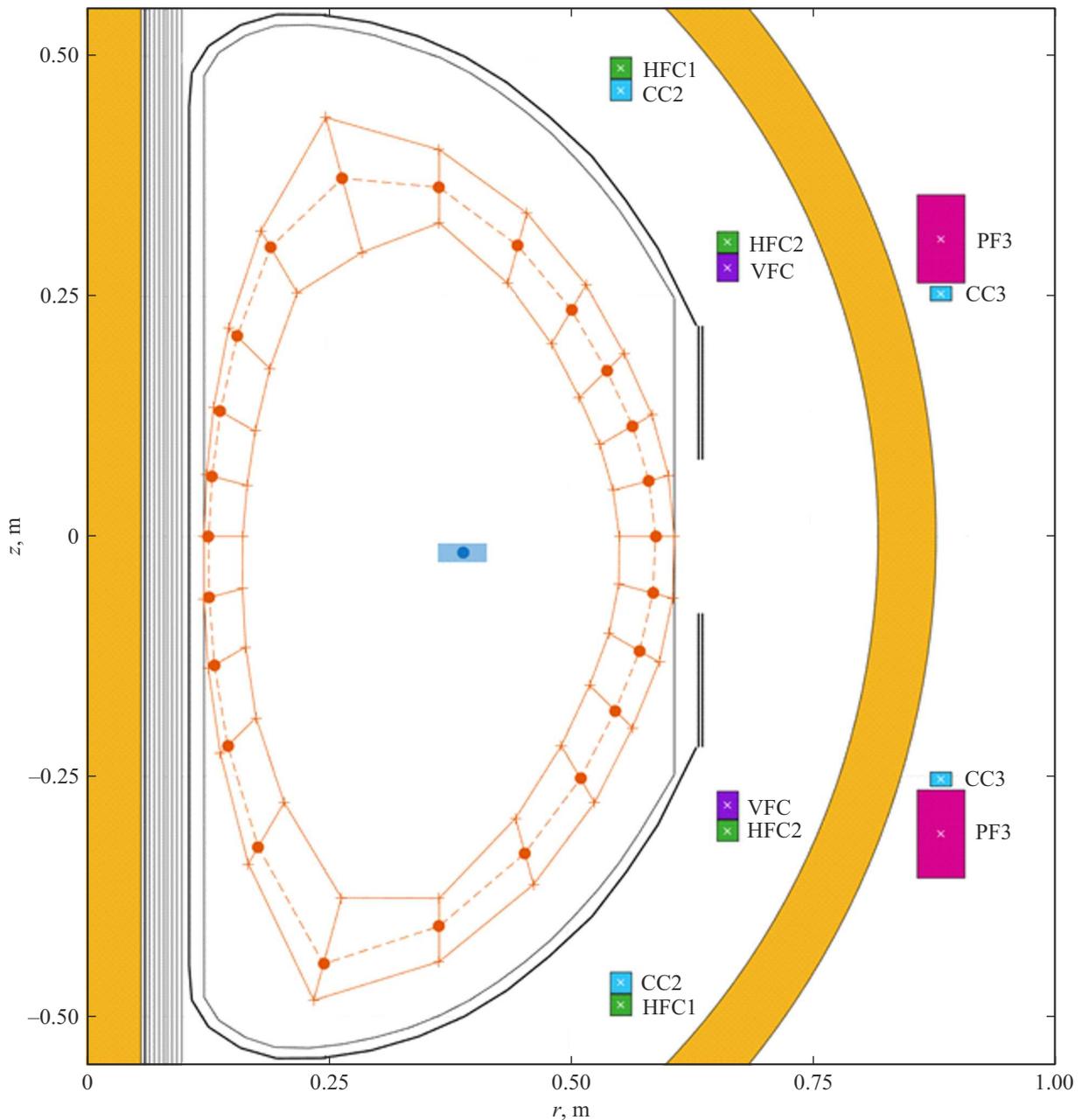


Рис. 3. Интерфейс приложения, элемент вкладки „Сечения“ („Sections“), разряд № 41805, $t = 158$ ms. Область возможных изменений каждой из составляющей вертикального (полоидального) сечения плазмы.

На вкладке „Сечения“ (рис. 3 и 4) отображается вертикальное сечение токамака Глобус-М2, строится граница плазмы (в виде 24-угольника, штриховая линия) по сценарным сигналам и показываются возможные отклонения по каждой компоненте. Таким образом, конфигурации плазмы, выходящие за область, ограниченную сплошной линией, являются нереализуемыми. На графике доступен просмотр экспериментальных сигналов и отклонений от них, реализующих одну из возможных конфигураций плазмы. На этой вкладке пользователь выбирает одно из допустимых значений выходного сигнала, после чего алгоритм оценки ОД запускается

повторно с обновленными ограничениями (2), где одно из неравенств заменяется на равенство. В результате за несколько последовательных шагов формируется реализуемая конфигурация формы плазмы (рис. 4). Представленный комплекс программ планируется внедрить на УНУ (уникальную научную установку) „Сферический токамак Глобус-М“.

Финансирование работы

Разработка метода и комплекса программ для вычисления реализуемых конфигураций плазмы в токамаке

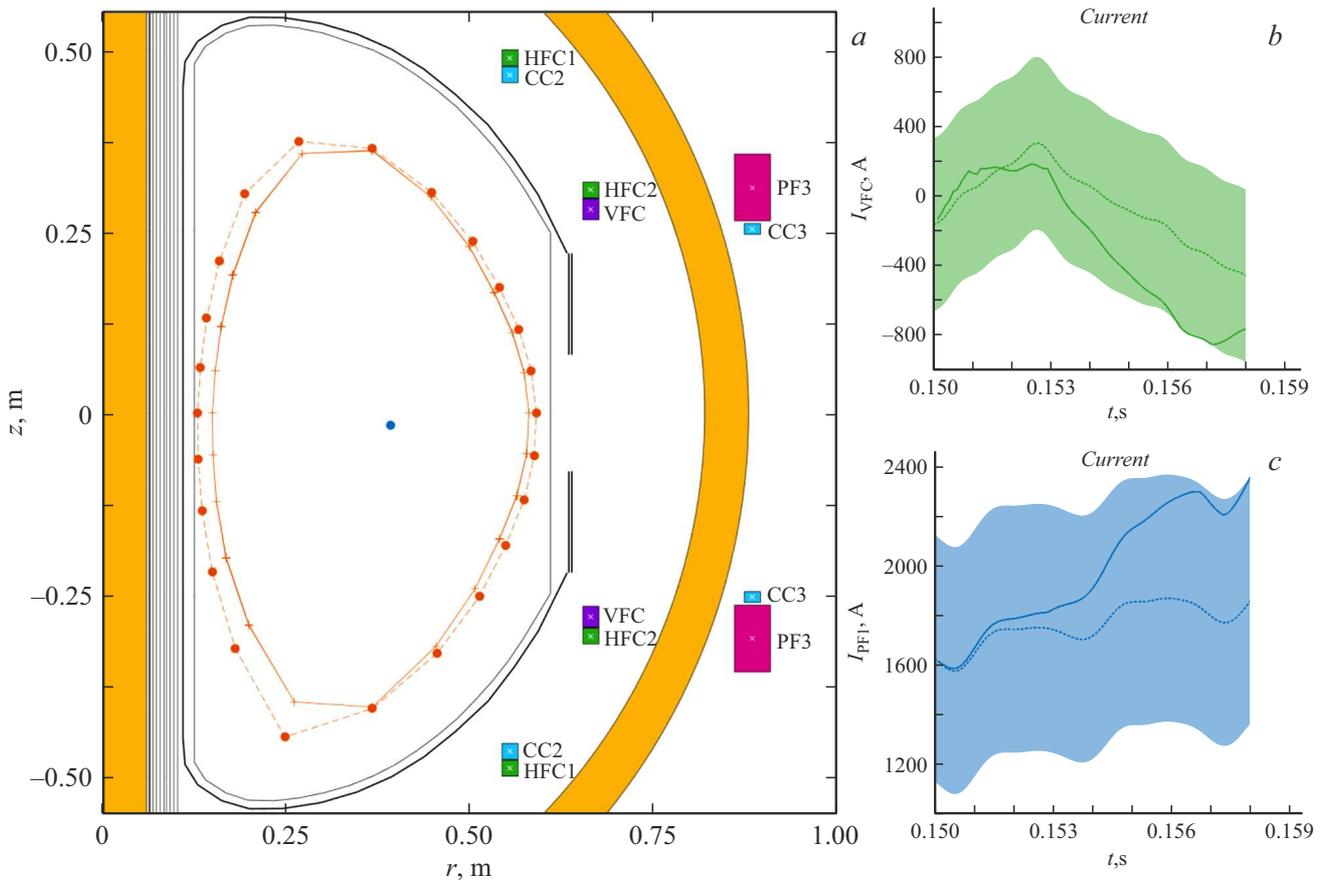


Рис. 4. Интерфейс приложения, элементы вкладки „Сечения“ („Sections“), разряд № 41805, $t = 158$ ms. *a* — возможная конфигурация вертикального (полоидального) сечения плазмы, найденная последовательным уточнением зазоров. Динамика изменения тока: *b* — в обмотке вертикального управляющего поля VFC, *c* — в обмотке полоидального тока PF1. Пунктирная линия — экспериментальный сигнал, сплошная — отклоненный сигнал, реализующий данную конфигурацию, заливка — область допустимых отклонений.

осуществлена при финансовой поддержке РНФ (проект № 21-79-20180-П, <https://rscf.ru/project/21-79-20180/>).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] V.B. Minaev, V.K. Gusev, N.V. Sakharov, V.I. Varfolomeev, N.N. Bakharev, P.N. Brunkov, F.V. Chernyshev, V.V. Dyachenko, S.A. Khitrov, N.A. Khromov, E.O. Kiselev, A.N. Konovalov, V.A. Kornev, G.S. Kurskiev, A.D. Melnik, M.I. Mironov, I.V. Miroshnikov, M.I. Patrov, Y.V. Petrov, A.N. Saveliyev, P.B. Shchegolev, O.N. Shcherbinin, A.D. Sladkomedova, V.V. Solokha, A.Y. Telnova, V.A. Tokarev, S.Y. Tolstyakov, V.A. Belyakov, E.N. Bondarchuk, A.A. Kavin, A.N. Labusov, A.B. Mineev, V.N. Tanchuk, V.I. Davydenko, I.V. Shikhovtsev, V.A. Rozhansky, I.Y. Senichenkov, E.G. Zhilin, Nucl. Fusion, **57** (6), 066047 (2017). DOI: 10.1088/1741-4326/aa69e0
- [2] Б.Т. Поляк, П.С. Щербаков, Стохастическая оптимизация в информатике, вып. 4, 3 (2008).
- [3] В.И. Кружков, А.Е. Коньков, Программа для итерационного нахождения области достижимости формы плазмы в токамаке по линейным моделям с переменными параметрам, свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025682596 РФ (рег. 25.08.2025).
- [4] В.И. Кружков, Автоматика и телемеханика, в печати (2026).
- [5] Y.V. Mitrishkin, P.S. Korenev, A.E. Konkov, V.I. Kruzhhkov, N.E. Ovsyannikov, Mathematics, **10** (1), 40 (2022). DOI: 10.3390/math10010040
- [6] П.С. Корнев, А.Е. Коньков, Ю.В. Митришкин, И.М. Балаченков, Е.О. Киселев, В.Б. Минаев, Н.В. Сахаров, Ю.В. Петров, Письма в ЖТФ, **49** (7), 36 (2023). DOI: 10.21883/PJTF.2023.07.54920.19468 [P.S. Korenev, A.E. Konkov, Yu.V. Mitrishkin, I.M. Balachenkov, E.O. Kiselev, V.B. Minaev, N.V. Sakharov, Yu.V. Petrov, Tech. Phys. Lett., **49** (4), 34 (2023). DOI: 10.21883/TPL.2023.04.55873.19468].
- [7] M.L. Walker, D.A. Humphreys, Fusion Sci. Technol., **50** (4), 473 (2006). DOI: 10.13182/FST06-A1271

- [8] В.Д. Шафранов, в сб. *Вопросы теории плазмы*, под ред. М.А. Леонтовича (Госатомиздат, М., 1963), вып. 2, с. 92.
- [9] А.Е. Коньков, П.С. Коренев, Ю.В. Митришкин, И.М. Балаченков, Е.О. Киселев, *Физика плазмы*, **49** (12), 1348 (2023). DOI: 10.31857/S0367292123600760 [A.E. Konkov, P.S. Korenev, Yu.V. Mitrishkin, I.M. Balachenkov, E.O. Kiselev, *Plasma Phys. Rep.*, **49** (12), 1552 (2023). DOI: 10.1134/S1063780X23601827].
- [10] G.B. Dantzig, A. Orden, P. Wolfe, *Pacific J. Math.*, **5** (2), 183 (1955). DOI: 10.2140/pjm.1955.5.183
- [11] Y. Zhang, *Optim. Meth. Software*, **10** (1), 1 (1998). DOI: 10.1080/10556789808805699