

05.09.10

## Примесный обратный магнитоэлектрический эффект в полупроводниковой квантовой яме

© А.Б. Грунин

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования „Пензенский государственный университет“, Пенза, Россия  
E-mail: grunin.sky@yandex.ru

Поступила в Редакцию 22 ноября 2025г.

В окончательной редакции 21 февраля 2026 г.

Принята к публикации 22 февраля 2026 г.

Проведено теоретическое изучение примесного обратного магнитоэлектрического эффекта (МЭ) в полупроводниковой квантовой яме (КЯ) с параболическим потенциалом конфайнмента, содержащей  $D^{(-)}$ -центр (отрицательный ион донора). В рамках модели потенциала нулевого радиуса в приближении эффективной массы получены дисперсионное уравнение, определяющее энергию связи примесного состояния, аналитические выражения для примесной волновой функции и дипольного магнитного момента, индуцированного электрическим полем, для примесного электрона в КЯ. Путем численного анализа выявлена асимметрия полевой зависимости дипольного магнитного момента относительно координаты примеси, обусловленная нарушением пространственно-временной симметрии наноструктуры. Для положений  $D^{(-)}$ -центра, смещенных относительно плоскости симметрии КЯ в направлении, противоположном напряженности электрического поля, полевая зависимость дипольного магнитного момента является немонотонной с максимумом в парамагнитной и переходом в диамагнитную область. Показана возможность управления рассмотренным МЭ как с помощью полей, так и преднамеренным селективным легированием.

**Ключевые слова:** тороидный момент, асимметричные наноструктуры, донорные примеси, метод функции Грина, метод эффективной массы, модель потенциала нулевого радиуса.

DOI: 10.61011/FTT.2026.02.62718.330-25

### 1. Введение

После предсказания в 1959 г. И.Е. Дзялошинским [1] возможности существования магнитоэлектрического эффекта (МЭ) в кристаллах магнитной структуры с точечной группой, не содержащей инверсию времени  $t \rightarrow -t$ , и экспериментального обнаружения Д.Н. Астровым в 1960 г. обратного МЭ [2], а позднее G.T. Rado и V.J. Folen — прямого МЭ [3] в кристаллах антиферромагнетика  $\text{Cr}_2\text{O}_3$ , интерес к системам с нарушенной пространственной и временной симметрией значительно усилился.

Известно, что нарушения макроскопической симметрии вызваны определенным типом упорядочения с характерным параметром порядка: в сегнетоэлектрическом состоянии — полярным вектором электрической поляризации  $\mathbf{P}$ , в ферромагнитной фазе — аксиальным вектором намагничивания (или магнитного момента)  $\mathbf{P}_m$ , в тороидном состоянии —  $t$ -нечетным полярным вектором тороидного момента  $\mathbf{T}$ ,  $t$ -четным аксиальным вектором  $\mathbf{G}$ , характеризующим упорядочение спиновых токов в системе.

Сосуществование электрического и магнитного упорядочения позволило синтезировать [4,5] и исследовать сегнетомагнитные соединения [6–8]. В работе [9] было теоретически обосновано введение в физику конденсированного состояния тороидного параметра порядка  $\mathbf{T}$  как спиновой, так и орбитальной природы. Тороидный

момент был зарегистрирован в сильном магнитном поле в  $\text{Cr}_2\text{O}_3$  [10], а также в ферромагнитном соединении  $\text{Ga}_{2-x}\text{Fe}_x\text{O}_3$  [11], а также в соединении  $\text{LiCoPO}_4$  оптическим методом генерации второй гармоники найдены тороидные домены [12].

Новый подкласс магнитоэлектриков, в более широком смысле, подкласс антиферромагнетиков — материалы с тороидным упорядочением или тороики характеризуются значительно высокими значениями магнитоэлектрического коэффициента [13,14]. При этом МЭ проявляется в наноструктурах более сильно, чем в объемных материалах, что связано с различием характерных пространственных масштабов изменения потенциальной энергии и волновых функций в этих системах [13]. В орбитальных тороиках МЭ может быть велик по сравнению со спиновыми тороиками из-за малости спин-орбитального взаимодействия. Наличие в системе вектора тороидного момента  $\mathbf{T}$  с симметрией, аналогичной симметрии квазиимпульса  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  носителей заряда, где  $\mathbf{k}$  — квазиволновой вектор, приводит к асимметрии спектра элементарных возбуждений по квазиимпульсу  $E(\mathbf{k}) \propto \mathbf{T} \cdot \mathbf{k}$  [13]. В работе [15] был изучен сильный нерелятивистский орбитальный продольный и поперечный МЭ в туннельно связанных асимметричных квантовых ямах (АКЯ) в продольном по отношению к их плоскости магнитном поле  $\mathbf{B}$ , имитирующем нарушение временной симметрии. Авторами был отмечен нелинейный характер зависимости вектора поляризации

$\mathbf{P} \propto [\mathbf{V}, \mathbf{T}] = (\mathbf{V}, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{V} - \mathbf{I} \cdot \mathbf{V}^2$  от вектора магнитной индукции, при этом  $\mathbf{T} \propto [\mathbf{V}, \mathbf{I}]$ , где  $\mathbf{I}$  — полярный вектор, направленный вдоль оси роста АКЯ.

Также в работе [15] показана высокая чувствительность МЭ к степени неравновесности системы, особенно в случае легированных асимметричных гетероструктур [13], когда эффект компенсируется свободными носителями заряда. Следует отметить, что большое количество работ посвящено теоретическому и экспериментальному изучению прямого в отличие от обратного МЭ, последний из которых находит важное практическое применение в созданных резонаторах, фильтрах СВЧ-диапазона, СВЧ-аттенуаторах, управляемых электрическим полем [16–18], а также в перспективных магнитных элементах памяти с электрической записью и считыванием информации [19,20].

Перечисленные причины делают актуальным исследование обратного МЭ для носителей заряда, локализованных на примесных центрах, в асимметричных наноструктурах с нарушенной пространственно-временной симметрией.

Цель настоящей работы состоит в теоретическом изучении обусловленного донорной примесью с дополнительным электроном ( $D^{(-)}$ -центр) обратного МЭ в асимметричной полупроводниковой квантовой яме (КЯ) с нарушением пространственной и временной симметрии, т.е. примесного обратного МЭ. Пространственная асимметрия создается электрическим полем, а временная имитируется магнитным. Эффект рассматривается при низких температурах  $T$ , когда средняя тепловая энергия  $k_B T \ll |E_i|$ , где  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $|E_i|$  — энергия ионизации примесного центра.

## 2. Теоретическое обоснование

Поместим полупроводниковую КЯ с параболическим потенциалом конфинмента в продольное по отношению к ее оси размерного квантования постоянное электрическое поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  и поперечное (лежащее в плоскости КЯ) постоянное магнитное поле с индукцией  $\mathbf{B}$ .

Для теоретического описания одноэлектронных состояний в полупроводниковых наноструктурах часто используется модель „жестких стенок“ [21], т.е. потенциал конфинмента выбирается в виде потенциальной ямы соответствующей мерности с бесконечно высокими стенками. В этом случае, хотя дно потенциальной ямы является плоским, решение уравнения Шрёдингера является нерегулярным: электронная плотность в КЯ распределена неравномерно. Аппроксимация КЯ прямоугольным потенциальным профилем при отсутствии локальной электронейтральности приводит к внутреннему противоречию модели: вид одноэлектронных волновых функций означает неоднородное распределение заряда (и потенциала), тогда как дно ямы остается плоским. Как показывает анализ самосогласованного численного решения уравнения Пуассона и уравнения Шрёдингера

в случае КЯ [22], потенциал конфинмента представляет собой почти параболический потенциал, но с отсеченной нижней частью [22,23]. Такая форма потенциала достаточно близка к параболической, что позволяет считать последний вполне реалистическим [24].

Пусть плоскость симметрии КЯ совпадает с плоскостью  $xu$ , вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}$  направлен в этой плоскости вдоль оси  $y$ , а ось  $z$  направлена вдоль оси размерного квантования КЯ. В асимметричной калибровке векторный потенциал  $\mathbf{A}$  имеет вид

$$\mathbf{A} = B_y \cdot z \cdot \mathbf{e}_x, \quad (1)$$

где  $\mathbf{B}(0, B_y, 0)$ ;  $\mathbf{e}_x$  — единичный вектор оси  $x$ .

Уравнение Шрёдингера для движения электрона в зоне проводимости (ЗП) КЯ в рассматриваемых электрическом и магнитном полях записывается в виде

$$\hat{H}\Psi_{n,k_x,k_y}(x, y, z) = E_n(k_x, k_y)\Psi_{n,k_x,k_y}(x, y, z), \quad (2)$$

здесь гамильтониан равен

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m^*} \nabla^2 - i\hbar\omega_c \cdot z \frac{\partial}{\partial x} + \frac{m^* \Omega^2 z^2}{2} + e \cdot E_z \cdot z, \quad (3)$$

$\nabla^2$  — оператор Лапласа;  $\omega_c = eB_y/m^*$  — циклотронная частота;  $\mathbf{E} = (0, 0, E_z)$ ;  $e$  — элементарный электрический заряд,  $m^*$  — эффективная масса электрона;  $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}$  — гибридная частота,  $\omega_0$  — частота параболического удерживающего потенциала КЯ

$$V(z) = \frac{m^* \omega_0^2 z^2}{2}, \quad (4)$$

с амплитудой  $U_0 = m^* \omega_0^2 L^2 / 2$ , где  $2L$  — ширина КЯ.

Поскольку удерживающий потенциал КЯ должен иметь конечную глубину, то в выбранной осцилляторной модели потенциала конфинмента амплитуда потенциала  $U_0$  является эмпирическим параметром. Считаем, что  $U_0$  удовлетворяет условию [25]

$$\frac{U_0}{\hbar\omega_0} \ll 1. \quad (5)$$

Известно, что решение стационарного уравнения Шрёдингера (2) с гамильтонианом типа (3) без электрического поля рассматривалось в ряде работ [26,27].

Тогда собственные волновые функции и энергетический спектр электрона для гамильтониана (3) с учетом (5) можно записать как

$$\Psi_{n,k_x,k_y}(x, y, z) = (2^n n! \sqrt{\pi} a_\Omega L_x L_y)^{-1/2} \cdot H_n \left( \frac{z - z_0(k_x)}{a_\Omega} \right) \times \exp \left( -\frac{(z - z_0(k_x))^2}{2 \cdot a_\Omega^2} \right) \exp(ik_x x + ik_y y), \quad (6)$$

$$E_n(k_x, k_y) = \hbar\Omega \left( n + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)}{2m^*} - \frac{m^* \Omega^2 z_0^2(k_x)}{2}, \quad (7)$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $H_n(z)$  — многочлены Эрмита;  $a_\Omega = \sqrt{\hbar/(m^* \Omega)}$  — гибридная длина;  $L_x, L_y$  — линейные размеры КЯ в плоскости  $xu$ ;  $k_x, k_y$  — проекции

квазиволнового вектора  $\mathbf{k}$  электрона;

$$z_0(k_x) = -\frac{e \cdot E_z + \hbar \cdot \omega_c k_x}{m^* \Omega^2}, \quad (8)$$

координата центра гибридного осциллятора в электромагнитном поле, определяющая анизотропию энергии электрона

$$E_n(k_x, k_y) \neq E_n(-k_x, k_y). \quad (9)$$

Локальные электронные состояния, наведенные дефектами, лежащими внутри КЯ, в связи с развитием технологии  $\delta$ -легирования интенсивно изучались в работах [28,29]. Теоретические работы, посвященные локальным  $D^{(-)}$ -состояниям в полупроводниковой КЯ в отсутствие [21,30] и при наличии [25] продольного по отношению к оси роста КЯ магнитного поля, использовали для потенциала дефекта модель потенциала нулевого радиуса. Известно [30], что модель потенциала нулевого радиуса хорошо описывает как  $D^{(-)}$ -состояния, так и состояния отрицательного иона водорода  $H^-$ , т.к. эти состояния являются мелкими (их энергия связи порядка 5% от боровской энергии) и, следовательно, соответствующий радиус локализации связанного электрона существенно больше эффективного радиуса потенциала, т.к. последний определяется боровским радиусом. Эта модель позволяет получить аналитическое решение для волновой функции, а также дисперсионное уравнение электрона, локализованного на  $D^{(0)}$ -центре.

Пусть  $D^{(-)}$ -центр локализован в точке  $\mathbf{R}_a = (x_a, y_a, z_a)$ . Потенциал примеси описывается в рамках модели потенциала нулевого радиуса  $\hat{V}_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a)$  мощностью  $\gamma = 2\pi\hbar^2/(\alpha m^*)$ :

$$\hat{V}_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a) = \gamma \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a) (1 + (\mathbf{r} - \mathbf{R}_a) \nabla_{\mathbf{r}}), \quad (10)$$

где  $\alpha$  определяется энергией  $E_i = -\hbar^2 \alpha^2 / (2m^*)$  связанного состояния этого же  $D^{(-)}$ -центра в объемном материале;  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака;  $\nabla_{\mathbf{r}}$  — оператор градиента в координатном пространстве. С учетом выражения (10) уравнение Шрёдингера для локализованного на  $D^{(0)}$ -центре электрона в КЯ в электрическом и магнитном полях примет вид

$$(\hat{H} + \hat{V}_\delta(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a)) \Psi_\lambda^{(QWell)}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a) = E_\lambda \cdot \Psi_\lambda^{(QWell)}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a), \quad (11)$$

здесь  $E_\lambda = -\hbar^2 \lambda^2 / (2m^*)$  — собственные значения гамльтониана в (11).

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a; E_\lambda) = & -\frac{\sqrt{\pi}}{a_\Omega a_d^2 E_d} \left( \int_0^{+\infty} dt \cdot t^{-1/2} \exp(-\varepsilon_s t) \exp\left(-\frac{(y - y_a)^2}{4a_d^2 t}\right) \right) \\ & \times \left\{ [f(\Omega, t)]^{-1/2} \exp\left[\frac{|\Delta\varepsilon_{St}| \cdot t}{f(\Omega, t)} \left( \left(\frac{\omega_c}{\Omega}\right)^2 \cdot r(\Omega, t) - \left(\frac{a_\Omega}{a_d}\right)^2 \text{th}(u) \right)\right] (1 - \exp[-4u])^{-1/2} \exp\left(-\frac{(y - y_a)^2}{4a_d^2 t}\right) \right. \\ & \times \exp\left[-\frac{(z_a^2 + z^2)}{2a_\Omega^2} \frac{g(\Omega, t)}{f(\Omega, t)}\right] \exp\left(\frac{z_a z \cdot h(\Omega, t)}{2a_d^2 \cdot f(\Omega, t)}\right) \exp\left(-\frac{(z + z_a) \sqrt{|\Delta\varepsilon_{St}|} \text{th}(u)}{a_d f(\Omega, t)}\right) \exp\left\{-\frac{i \frac{\omega_c}{\Omega} (x - x_a)(z + z_a) \text{th}(u)}{2a_\Omega^2 f(\Omega, t)}\right\} \\ & \times \exp\left(-\frac{(x - x_a)^2}{4a_d^2 f(\Omega, t)} + \frac{i \frac{\omega_c}{\Omega} (x - x_a) \sqrt{|\Delta\varepsilon_{St}|} r(\Omega, t)}{a_d \cdot f(\Omega, t)}\right) - \frac{a_\Omega}{2a_d t} \exp\left[-\frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R}_a)^2}{4a_d^2 t}\right] \left. \right\} + \sqrt{\pi} a_\Omega \frac{\exp\{-\sqrt{\varepsilon_s} \cdot \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_a|}{a_d}\}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}_a|}, \quad (14) \end{aligned}$$

где  $i^2 = -1$ .

Следуя известной стандартной процедуре (например, [31]), решение уравнения (11) выполняется методом функции Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a; E_\lambda)$ , которая отличается постоянным множителем от волновой функции  $D^{(-)}$ -состояния:

$$\Psi_\lambda^{(QWell)}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a) = -C_\lambda^{(QWell)} a_\Omega a_d^2 E_d G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a; E_\lambda), \quad (12)$$

здесь нормировочный множитель  $C_\lambda^{(QWell)}$  равен

$$\begin{aligned} C_\lambda^{(QWell)} = & \left[ \frac{\partial G(\mathbf{R}_a, \mathbf{R}_a; E_\lambda)}{\partial \varepsilon_s} \right]^{-1/2} = a_\Omega^{-1/2} a_d^{-1} \pi^{-1/4} \\ & \times \left[ \int_0^{+\infty} dt \cdot t^{1/2} \exp(-\varepsilon_s t) [f(\Omega, t)]^{-1/2} \cdot (1 - \exp[-4u])^{-1/2} \right. \\ & \times \exp\left[\frac{|\Delta\varepsilon_{St}| \cdot t}{f(\Omega, t)} \left( \left(\frac{\omega_c}{\Omega}\right)^2 \cdot r(\Omega, t) - \left(\frac{a_\Omega}{a_d}\right)^2 \text{th}(u) \right)\right] \\ & \times \exp\left[-\frac{z_a^2}{a_\Omega^2 f(\Omega, t)} \left( g(\Omega, t) - \frac{a_\Omega^2}{2a_d^2} h(\Omega, t) \right)\right] \\ & \left. \times \exp\left(-\frac{2z_a \sqrt{|\Delta\varepsilon_{St}|} t \cdot \text{th}(u)}{a_d f(\Omega, t)}\right)\right]^{-1/2}, \quad (13) \end{aligned}$$

$E_d = \hbar^2 / (2m^* a_d^2)$ ,  $a_d = 4\pi \varepsilon \varepsilon_0 \hbar^2 / (m^* e^2)$  — эффективные боровская энергия и боровский радиус соответственно;  $\varepsilon$  — статическая диэлектрическая проницаемость вещества,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\varepsilon_s = (E_0(0, 0) - E_\lambda) / E_d$  — энергия связи электрона на примеси, отсчитываемая от энергии основного состояния  $E_0(0, 0)$  электрона (7) в КЯ при  $n = 0$ ,  $k_x = 0$  и  $k_y = 0$  в единицах эффективной боровской энергии;  $\Delta\varepsilon_{St} = -(eE_z)^2 / (2m^* \Omega^2 E_d)$  — штарковский сдвиг уровней энергии;  $u = (a_d / a_\Omega)^2 t$ ;  $f(\Omega, t) = (\omega_0 / \Omega)^2 t + (\omega_c / \Omega)^2 (a_\Omega / a_d)^2 \text{th}(u)$ ,  $r(\Omega, t) = t - (a_\Omega / a_d)^2 \text{th}(u)$ ,  $g(\Omega, t) = (\omega_0 / \Omega)^2 t \text{cth}[2u] + (\omega_c / \Omega)^2 (a_\Omega / a_d)^2 / 2$ ,  $h(\Omega, t) = 2(\omega_0 / \Omega)^2 (a_d / a_\Omega)^2 \frac{t}{\text{sh}(2u)} + (\omega_c / \Omega)^2$ ,  $\text{th}(x)$ ,  $\text{cth}(x)$ ,  $\text{sh}(x)$  — гиперболический тангенс, котангенс и синус соответственно; одноэлектронная функция Грина  $G(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a; E_\lambda)$  в приближении эффективной массы с выделенной расходящейся частью [31]:

Согласно известной методике [31], запишем явный вид дисперсионного уравнения, определяющего зависимость энергии связи  $D^{(-)}$ -состояния от параметров КЯ, находящейся в продольном по отношению к ее оси размерного квантования постоянном электрическом поле с напряженностью  $\mathbf{E}$  и поперечном постоянном магнитном поле с индукцией  $\mathbf{B}$ , положения примесного центра:

$$\begin{aligned} \alpha = & 4\pi^{3/2} a_{\Omega}^{-1} \left\{ \int_0^{+\infty} dt \cdot t^{-1/2} \exp(-\varepsilon_s t) \right. \\ & \times \left[ f(\Omega, t)^{-1/2} \cdot (1 - \exp[-4u])^{-1/2} \right. \\ & \times \exp \left[ - \left( \left( \frac{z_a}{a_{\Omega}} \right)^2 + 2 \frac{z_a}{a_d} \sqrt{|\Delta\varepsilon_{St}|} + \left( \frac{a_{\Omega}}{a_d} \right)^2 |\Delta\varepsilon_{St}| \right) \text{th}(u) \right] \\ & \times \exp \left[ \left( \frac{\omega_c}{\Omega} \right)^2 \frac{\left( -\frac{z_a}{a_d} \text{th}(u) + \sqrt{|\Delta\varepsilon_{St}|} \cdot r(\Omega, t) \right)^2}{f(\Omega, t)} \right] - \frac{a_{\Omega}}{2a_d t} \right. \\ & \left. \left. - \sqrt{\pi} \frac{a_{\Omega}}{a_d} \sqrt{\varepsilon_s} \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Вычислим среднее значение проекции дипольного магнитного момента  $\langle p_y^{(m)} \rangle(\mathbf{E}, \mathbf{B}, z_a)$  примесного электрона, используя выражение для волновой функции примесного состояния (12) с учетом (13) и (14)

$$\begin{aligned} \langle p_y^{(m)} \rangle(\mathbf{E}, \mathbf{B}, z_a) = & \frac{i\hbar}{2m^*} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d^3\mathbf{r} \left( \Psi_{\lambda}^{(\text{QWell})}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a) \right)^* \\ & \times \left( z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \Psi_{\lambda}^{(\text{QWell})}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a). \quad (16) \end{aligned}$$

Дополнительный дипольный магнитный момент  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle(\mathbf{E}, \mathbf{B}, z_a)$  электрона на  $D^{(0)}$ -центре, вызванный совместным действием взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей, определяется выражением

$$\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle(\mathbf{E}, \mathbf{B}, z_a) = \langle p_y^{(m)} \rangle(\mathbf{E}, \mathbf{B}, z_a) - \langle p_y^{(m)} \rangle(\mathbf{0}, \mathbf{B}, z_a). \quad (17)$$

Аналитическое вычисление в формуле (16) интегралов по координатным переменным выполняется с использованием известных интегралов типа Пуассона [32]:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n \exp(-px^2 + 2qx) = & n! \left( \frac{q}{p} \right)^n \sqrt{\frac{\pi}{p}} \\ & \times \exp\left( \frac{q^2}{p} \right) \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{1}{(n-2k)! k!} \left( \frac{p}{4q^2} \right)^k, \quad (18) \end{aligned}$$

здесь  $p > 0$  и  $[n/2]$  — целая часть числа  $n/2$ .

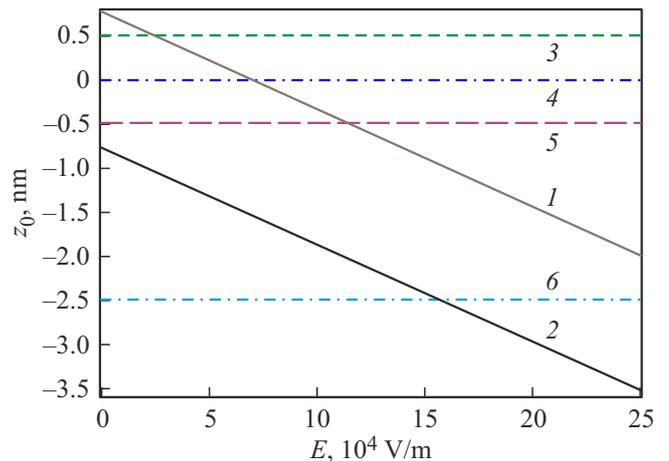
Внутренний двойной интеграл в (16) по переменным  $t$  и  $t_1$  (изменяется в тех же пределах, что и  $t$  в

выражении (14)), содержащимся в интегральных представлениях комплексно сопряженных волновых функций  $\Psi_{\lambda}^{(\text{QWell})}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a)$  и  $(\Psi_{\lambda}^{(\text{QWell})}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_a))^*$  примесного состояния, находится численным интегрированием с помощью кубатурных формул [33,34].

### 3. Обсуждение результатов

На рис. 1 представлена зависимость координаты  $z_0(k_x, \mathbf{E}, \mathbf{B})$  центра гибридного осциллятора от напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  для двух противоположных проекций  $k_x$  квазиволнового вектора  $\mathbf{k}$  и фиксированного значения магнитной индукции  $\mathbf{B}$ . Т.к. для  $k_x < 0$  и  $k_x > 0$  центры осцилляторов пространственно разнесены, а волновая функция примесного состояния строится из волновых функций состояний ЗП КЯ, то преимущественный вклад в состояние  $D^{(-)}$ -центра вносят состояния с такими  $k_x$ , для которых центры осцилляторов близки к положению  $z_a$  примесного центра, т.е.  $|z_a - z_0(k_x)| \ll a_{\Omega}$ . Поэтому для  $z_a > 0$  (линия 3),  $z_a = 0$  (линия 4) значительный вклад вносят состояния с  $k_x < 0$  (прямая 1). Для  $z_a < 0$  на рис. 1 на примере  $z_a^{(1)} > z_0(k_x > 0, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B})$  (линия 5) видно изменение преимущественного вклада состояний с  $k_x > 0$  (прямая 2) на вклад состояний с  $k_x < 0$  с увеличением напряженности. Если же, не меняя электрического поля, перемещать примесный центр противоположно вектору напряженности  $\mathbf{E}$  в положение  $z_a^{(2)} < z_0(k_x > 0, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B})$  (линия 6), будет происходить переход от большего вклада состояний с  $k_x < 0$  к преимущественному вкладу состояний ЗП с  $k_x > 0$ .

Рассмотренный механизм изменения волновой функции примесного состояния в зависимости от координаты

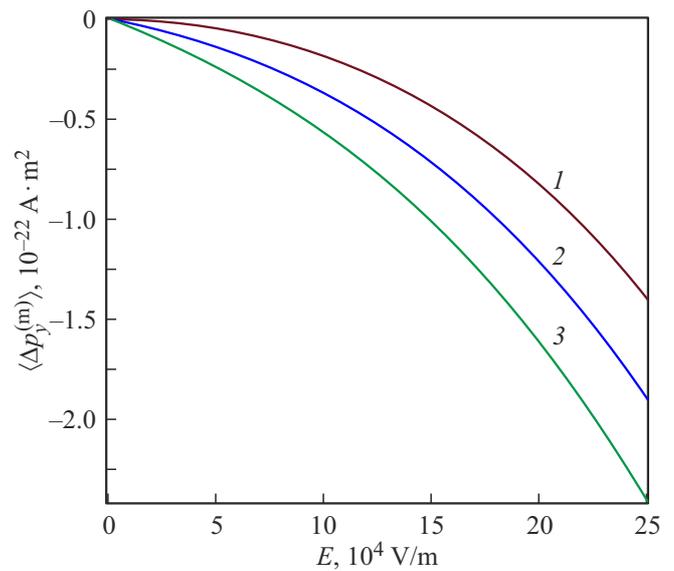


**Рис. 1.** Зависимость координаты центра осциллятора  $z_0(k_x)$  в КЯ на основе InSb с параметрами  $L = 72$  nm,  $U_0 = 0.2$  eV от значения напряженности электрического поля в магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Т для двух противоположных проекций квазиволнового вектора  $\mathbf{k}$ : кривая 1 —  $k_x < 0$ ; 2 —  $k_x > 0$ . Линии изображают положения  $D^{(0)}$ -центра с различными  $z_a$ : кривая 3 —  $z_a > 0$ , 4 —  $z_a = 0$ ; 5 —  $z_0(k_x > 0, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B}) < z_a < 0$ ; 6 —  $z_a < z_0(k_x > 0, \mathbf{E} = 0, \mathbf{B}) < 0$ .

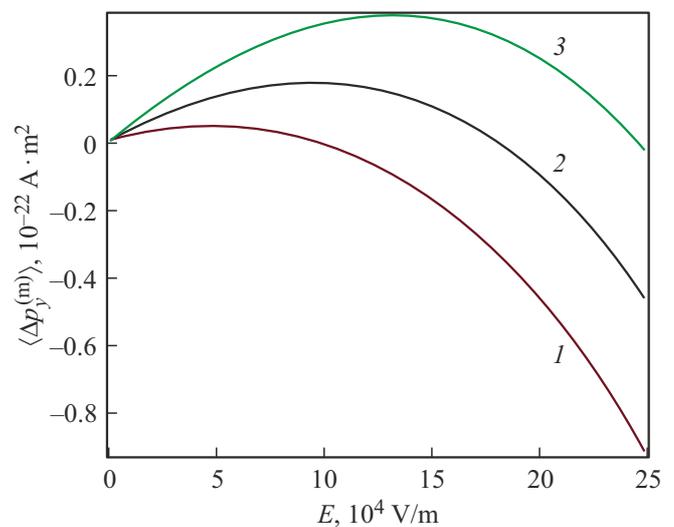
$z_a$   $D^{(0)}$ -центра и напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  определяет характер зависимости среднего значения проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle(\mathbf{E}, \mathbf{B}, z_a)$  примесного электрона на направление магнитной индукции  $\mathbf{B}$  от электрического поля. Так, на рис. 2 показана зависимость  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle$  от напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  для  $z_a \geq 0$ . Кривая 1 показывает, что в слабых электрических полях дополнительный дипольный магнитный момент направлен противоположно вектору магнитной индукции  $\mathbf{B}$  и по абсолютному значению  $\propto E^2$ . С увеличением координаты  $z_a$  дополнительный магнитный момент также возрастает (см. кривые 2 и 3 рис. 2). На рис. 3 изображена зависимость  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle$  от напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  для  $z_a < 0$ . В соответствии с пояснением к рис. 1 и сказанным выше, начальный участок кривой 1 на рис. 3 соответствует незначительному вкладу состояний с  $k_x > 0$  с последующим преобладанием состояний с  $k_x < 0$ . С увеличением абсолютного значения  $|z_a|$  происходит незначительное (кривая 2), а затем более заметное (кривая 3) отклонение от монотонной зависимости с характерным максимумом в области  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle > 0$  и изменением направления вектора дипольного магнитного момента  $\langle \Delta \mathbf{p}^{(m)} \rangle$  на противоположное с дальнейшим возрастанием абсолютного значения проекции  $|\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle| \propto E^2$  в слабых полях (кривые 2 и 3). Как показывает численный анализ, с увеличением магнитной индукции  $B$  точка максимума  $E_{\max}$  и напряженность электрического поля  $E_0$ , при которой дополнительный дипольный магнитный момент  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle = 0$ , не изменяются, а максимальное значение увеличивается —  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle(E_{\max}) \propto B$ .

На рис. 4 показана зависимость относительного изменения среднего значения проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $\delta \langle p_y^{(m)} \rangle$  от координаты примесного центра  $z_a$ . При смещении  $D^{(0)}$ -центра в направлении напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  от значений  $z_a < 0$  до  $z_a > 0$  проекция  $\delta \langle p_y^{(m)} \rangle$  линейно уменьшается до нуля и, изменив знак линейно возрастает. В области  $z_a < 0$  дипольный магнитный момент приобретает парамагнитную добавку, а в области  $z_a \geq 0$  — диамагнитную (см. кривую 1). С увеличением напряженности электрического поля диамагнитная область смещается в сторону отрицательных значений  $z_a$ , а сами значения диамагнитной и парамагнитной поправок возрастают (см. кривую 2).

На рис. 5 представлена зависимость относительного изменения среднего значения проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $\delta \langle p_y^{(m)} \rangle$  от напряженности электрического поля  $E$  и различных положений  $z_a$   $D^{(0)}$ -центра. В слабых электрических полях рассматриваемая зависимость является квадратической (кривые 1–3) с характерным максимумом на кривой 1 для  $z_a < 0$ . Заметим, что при смещении  $D^{(0)}$ -центра по направлению электрического поля величина относительного изменения  $\delta \langle p_y^{(m)} \rangle$  возрастает (см. кривые 1–3), изменяясь приблизительно от 10 до 50%.

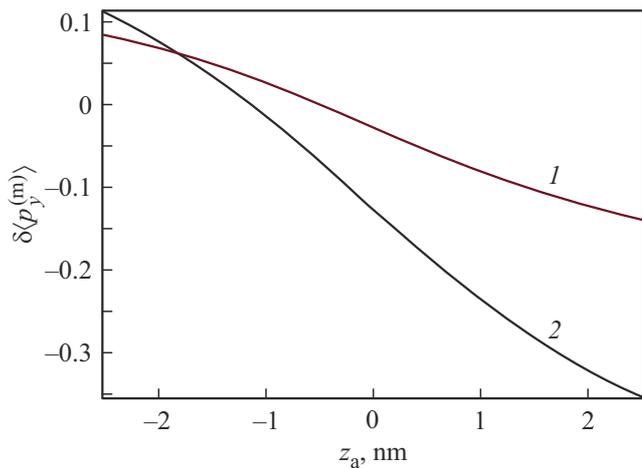


**Рис. 2.** Зависимость среднего значения  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle$  проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $D^{(-)}$ -центра ( $|E_i| = 0.03 \text{ eV}$ ) в КЯ на основе InSb ( $L = 72 \text{ nm}$ ,  $U_0 = 0.2 \text{ eV}$ ) от значения напряженности электрического поля  $E$  в магнитном поле с индукцией  $B = 1 \text{ T}$  для различных значений координат  $z_a \geq 0$ : кривая 1 —  $z_a = 0 \text{ nm}$ ; 2 —  $z_a = 0.5 \text{ nm}$ ; 3 —  $z_a = 1 \text{ nm}$ .

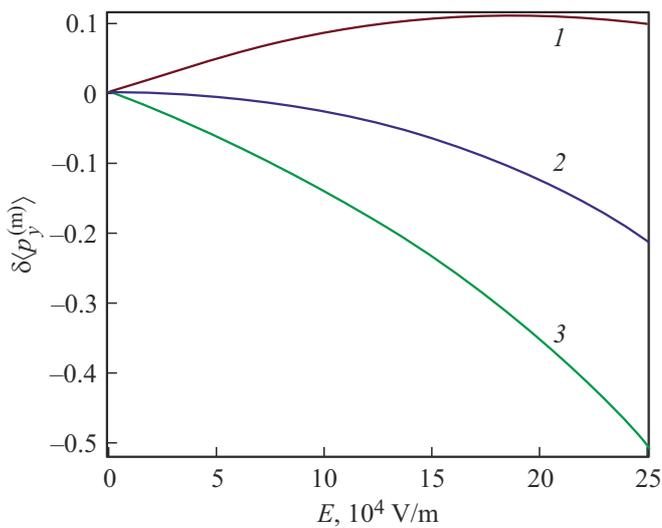


**Рис. 3.** Зависимость среднего значения  $\langle \Delta p_y^{(m)} \rangle$  проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $D^{(-)}$ -центра ( $|E_i| = 0.03 \text{ eV}$ ) в КЯ на основе InSb ( $L = 72 \text{ nm}$ ,  $U_0 = 0.2 \text{ eV}$ ) от значения напряженности электрического поля  $E$  в магнитном поле с индукцией  $B = 1 \text{ T}$  для различных значений координат  $z_a < 0$ : кривая 1 —  $z_a = -0.5 \text{ nm}$ ; 2 —  $z_a = -1 \text{ nm}$ ; 3 —  $z_a = -1.5 \text{ nm}$ .

Оценка величины магнитоэлектрического коэффициента (МЭК)  $\alpha^{(ME)}$  путем численного анализа для одиночной КЯ, содержащей  $D^{(-)}$ -центры с поверхностной концентрацией  $N_s \approx 10^{10} \text{ cm}^{-2}$  [28] в плоскости с координатой  $z_a$ , внедренные путем планар-



**Рис. 4.** Зависимость относительного изменения среднего значения  $\delta\langle p_y^{(m)} \rangle$  проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $D^{(-)}$ -центра ( $|E_i| = 0.03$  eV) в КЯ на основе InSb ( $L = 72$  nm,  $U_0 = 0.2$  eV) от координаты примесного центра  $z_a$  в магнитном поле  $B = 1$  Т для различных значений напряженности электрического поля: кривая 1 —  $E = 1 \cdot 10^5$  V/m; 2 —  $E = 2 \cdot 10^5$  V/m.



**Рис. 5.** Зависимость относительного изменения среднего значения  $\delta\langle p_y^{(m)} \rangle$  проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $D^{(-)}$ -центра ( $|E_i| = 0.03$  eV) в КЯ на основе InSb ( $L = 72$  nm,  $U_0 = 0.2$  eV) от значения напряженности электрического поля  $E$  в магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Т для различных положений  $z_a$  примеси: кривая 1 —  $z_a = -2.5$  nm; 2 —  $z_a = 0$  nm; 3 —  $z_a = 2.5$  nm.

ного селективного легирования [28,35], дает значение  $\alpha^{(ME)} \sim 10^{-13} - 10^{-12}$  s · m<sup>-1</sup> для рассмотренных в работе параметров КЯ, характеристик примесного центра и значений напряженности  $E \approx 10^5$  V/m и магнитной индукции  $B \approx 1$  Т, что по порядку величины близко к однофазным магнитоэлектрическим материалам при температурах  $T \approx 10$  К [36]. Значение МЭК  $\alpha^{(ME)}$ , полу-

ченного в работе [13] для асимметричной нелегированной гетероструктуры с тремя туннельно связанными КЯ, при  $T = 5.8$  К и магнитной индукции  $B \approx 1$  Т составляет  $\sim 10^{-14} - 10^{-13}$  s · m<sup>-1</sup>. Это показывает, что вклад примесных состояний в МЭ в данных условиях является существенным.

## 4. Заключение

Проведено теоретическое изучение примесного обратного МЭ в КЯ с параболическим потенциалом confinement, находящейся в постоянных продольном по отношению к ее оси размерного квантования электрическом поле и поперечном магнитном поле. В модели потенциала нулевого радиуса в приближении эффективной массы получено дисперсионное уравнение для  $D^{(-)}$ -состояния, определяющее зависимость энергии связи примесного электрона от параметров  $D^{(0)}$ -центра, характеристик КЯ, напряженности электрического и индукции магнитного полей. Также методом функции Грина найдено аналитическое выражение для волновой функции  $D^{(-)}$ -состояния, с помощью которого вычислено среднее значение проекции дополнительного дипольного магнитного момента  $\Delta\langle p_y^{(m)} \rangle$  на направление магнитного поля. Как показало численное интегрирование, величина  $\Delta\langle p_y^{(m)} \rangle$  в слабых электрических полях изменяется по квадратичному закону и существенно зависит от положения примесного центра. Для  $D^{(0)}$ -центров, расположенных в плоскости симметрии КЯ или смещенных относительно нее в направлении электрического поля, дополнительный дипольный магнитный момент антипараллелен вектору магнитной индукции. Для  $D^{(0)}$ -центров, смещенных относительно плоскости симметрии КЯ противоположно напряженности электрического поля, зависимость дополнительного дипольного магнитного момента от напряженности электрического поля становится немонотонной: магнитоэлектрическая поправка  $\Delta\langle p_y^{(m)} \rangle$  на начальном участке полевой зависимости является парамагнитной с характерным максимумом; затем, уменьшаясь и изменяя знак, она становится диамагнитной. Максимум в области  $\Delta\langle p_y^{(m)} \rangle > 0$  смещается с увеличением расстояния от примеси до плоскости симметрии КЯ в сторону больших электрических полей. Изменение положения примесного центра позволяет управлять как значением, так и направлением дополнительного дипольного магнитного момента электрона на примеси.

## Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] И.Е. Дзялошинский. ЖЭТФ **37**, 3, 881 (1960).  
[I.E. Dzyaloshinskii. JETP **10**, 3, 628 (1960).]

- [2] Д.Н. Астров. ЖЭТФ **38**, 3, 984 (1960). [D.N. Astrov. JETP **11**, 3, 708 (1960).]
- [3] G.T. Rado, V.J. Folen. Phys. Rev. Lett. **7**, 8, 310 (1961).
- [4] Г.А. Смоленский, А.И. Аграновская. ЖТФ **28**, 7, 1491 (1958).
- [5] В.А. Боков, И.Е. Мыльникова, Г.А. Смоленский. ЖЭТФ **42**, 2, 643 (1962). [V.A. Bokov, I.E. Myl'nikova, G.A. Smolenskii. JETP **15**, 2, 447 (1962).]
- [6] Г.А. Смоленский, И.Е. Чупис. УФН **137**, 3, 415 (1982). [G.A. Smolenskii, I.E. Chupis. Sov. Phys. Usp. **25**, 7, 475 (1982).]
- [7] Z.V. Gabbasova, M.D. Kuz'min, A.K. Zvezdin, I.S. Dubenko, V.A. Murashov, D.N. Rakov, I.B. Krynetsky. Phys. Lett. A **158**, 9, 491 (1991).
- [8] W. Eerenstein, N. Mathur, J. Scott. Nature **442**, 7104, 759 (2006).
- [9] V.L. Ginzburg, A.A. Gorbatshevich, Yu.V. Kopaev, B.A. Volkov. Solid State Commun. **50**, 4, 339 (1984).
- [10] Ю.Ф. Попов, А.М. Кадомцева, А.К. Звездин, Д.В. Белов, Г.П. Воробьев. Письма в ЖЭТФ **69**, 4, 302 (1999). [Yu.F. Popov, A.M. Kadomtseva, D.V. Belov, G.P. Vorob'ev, A.K. Zvezdin. JETP Lett. **69**, 4, 330 (1999).]
- [11] Ю.Ф. Попов, А.К. Звездин, А.М. Кадомцева, М.М. Тегеранчи, Г.П. Воробьев, В.А. Тимофеева, Д.М. Устинин. ЖЭТФ **114**, 1, 263 (1998). [Yu.F. Popov, A.M. Kadomtseva, G.P. Vorob'ev, V.A. Timofeeva, D.M. Ustinin, A.K. Zvezdin, M.M. Tegeranchi. JETP **87**, 1, 146 (1998).]
- [12] B.V. Van Aken, J.P. Rivera, H. Schmid, M. Fiebig. Nature **449**, 7163, 702 (2007).
- [13] А.А. Горбачевич, О.Е. Омеляновский, В.И. Цебро, А.К. Звездин, А.П. Пятаков, А.А. Мухин, В.Ю. Иванов, В.Д. Травкин, А.С. Прохоров, А.А. Волков, А.В. Пименов, А.М. Шуваев, А. Лойдл, В.М. Мухортов, Ю.И. Головко, Ю.И. Юзюк. УФН **179**, 8, 887 (2009). [A.A. Gorbatshevich, O.E. Omel'yanovskii, V.I. Tsebro, A.K. Zvezdin, A.P. Pyatakov, A.A. Mukhin, V.Yu. Ivanov, V.D. Travkin, A.S. Prokhorov, A.A. Volkov, A.V. Pimenov, A.M. Shuvaev, A. Loidl, V.M. Mukhortov, Yu.I. Golovko, Yu. Yuzuyuk. Phys. Usp. **52**, 8, 835 (2009).]
- [14] Ю.В. Копаев. УФН **179**, 11, 1175 (2009). [Yu.V. Kopaev. Phys. Usp. **52**, 11, 1111 (2009).]
- [15] А.А. Горбачевич, В.В. Капаев, Ю.В. Копаев. Письма в ЖЭТФ **57**, 9, 565 (1993). [A.A. Gorbatshevich, V.V. Kapaev, Yu.V. Kopaev. JETP Lett. **57**, 9, 580 (1993).]
- [16] М.Е. Адамова, Е.А. Жуков, А.В. Каминский. Изв. Вузов. Приборостроение **62**, 3, 261 (2019).
- [17] А.Б. Устинов, Ю.К. Фетисов, G. Srinivasan. Письма в ЖТФ **34**, 14, 16 (2008). [A.B. Ustinov, Yu.K. Fetisov, G. Srinivasan. Tech. Phys. Lett. **34**, 7, 593 (2008).]
- [18] О.В. Антоненков, Д.А. Филиппов. Письма в ЖТФ **33**, 17, 77 (2007). [O.V. Antonenkov, D.A. Filippov. Tech. Phys. Lett. **33**, 9, 752 (2007).]
- [19] А.Д. Сизов, Г.А. Мешков, А.М. Монахов, А.М. Власов, Д.А. Сечин. УЗФФ **6**, 136302 (2013).
- [20] A. Klimov, N. Tiercelin, Y. Dusch, S. Giordano, T. Mathurin, P. Pernod, V. Preobrazhensky, A. Churbanov, S. Nikitov. Appl. Phys. Lett. **110**, 22, 222401 (2017).
- [21] В.Д. Кревчик, Э.З. Имамов. ФТП **17**, 7, 1235 (1983).
- [22] S.E. Laux, F. Stern. Appl. Phys. Lett. **49**, 2, 91 (1986).
- [23] C.W.J. Beenakker, H. Van Houten. In: Solid State Physics, v. 44 / Eds H. Ehrenreich, D. Turnbull. Academ. Press, New York (1991). 228 p.
- [24] T. Martin, S. Feng. Phys. Rev. Lett. **64**, 16, 1971 (1990).
- [25] В.Д. Кревчик, А.Б. Грунин, В.В. Евстифеев. ФТП **40**, 6, 689 (2006). [V.D. Krevchik, A.B. Grunin, V.V. Evstifeev. Semiconductors **40**, 6, 668 (2006).]
- [26] B. Mitrović, V. Milanović, Z. Ikonić. Semicond. Sci. Technol. **6**, 2, 93 (1991).
- [27] L. Brey, G. Platero, C. Tejedor. Phys. Rev. B **38**, 14, 9649 (1988).
- [28] S. Huant, S.P. Najda, B. Etienne. Phys. Rev. Lett. **65**, 12, 1486 (1990).
- [29] S. Huant, A. Mandray, J. Zhu, S.G. Louie, T. Pang, B. Etienne. Phys. Rev. B **48**, 4, 2370 (1993).
- [30] А.А. Пахомов, К.В. Халипов, И.Н. Яснеевич. ФТП **30**, 8, 1387 (1996).
- [31] В.Д. Кревчик, А.Б. Грунин. ФТТ **45**, 7, 1272 (2003). [V.D. Krevchik, A.B. Grunin. Phys. Solid State **45**, 7, 1332 (2003).]
- [32] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев. Интегралы и ряды. В 3 т. Т. 1. Элементарные функции. Физматлит, М. (2002). 632 с.
- [33] В.М. Вержбицкий. Численные методы. Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения. Высшая школа, М. (2001). 382 с.
- [34] И.П. Мысовских. Интерполяционные кубатурные формулы. Наука, М. (1981). 336 с.
- [35] Д.В. Юрасов, М.Н. Дроздов, А.В. Мурель, А.В. Новиков. Письма в ЖТФ **37**, 17, 75 (2011). [D.V. Yurasov, M.N. Drozdov, A.V. Murel', A.V. Novikov. Tech. Phys. Lett. **37**, 9, 824 (2011).]
- [36] А.П. Пятаков, А.К. Звездин. УФН **182**, 6, 593 (2012). [A.P. Pyatakov, A.K. Zvezdin. Phys. — Uspekhi **55**, 6, 557 (2012).]

*Редактор Е.В. Толстякова*