

03

Моделирование динамики винтового вихря на основе нелинейного уравнения Шрёдингера

© П.А. Куйбин

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе СО РАН, Новосибирск, Россия
E-mail: pak0659@mail.ru

Поступило в Редакцию 11 декабря 2025 г.
В окончательной редакции 22 января 2026 г.
Принято к публикации 23 января 2026 г.

Изучена динамика конического винтового вихря на основе известного подхода, в котором уравнения движения вихря в рамках локально-индукционного приближения преобразуются в нелинейное уравнение Шрёдингера. В качестве начальной конфигурации рассмотрен конический винтовой вихрь, подобный наблюдаемому в экспериментах. В ходе численных расчетов установлено развитие волновой структуры и возникновение условий, предшествующих вихревому перезамыканию. Результаты работы могут быть использованы для прогнозирования режимов работы гидротурбины, характеризующихся аperiодическими сильными импульсами давления в гидротурбинном тракте.

Ключевые слова: вихрь, локально-индукционное приближение, нелинейное уравнение Шрёдингера, численное моделирование.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.09.62709.20598

Вихревые течения часто встречаются в природе и широко применяются в технике. С помощью закрутки интенсифицируют и стабилизируют процессы теплопереноса, улучшают горение, сепарацию примесей и т.п. В то же время возникновение вихрей может приводить и к негативным эффектам. Так, в гидротурбине может образовываться крупный вихревой жгут, вызывающий сильные пульсации давления. Ранее в модельных экспериментах, проведенных в ИТ СО РАН, был обнаружен интересный вид неустойчивости винтового вихря, проявляющийся в сближении соседних витков вихревой спирали и последующем перезамыкании с образованием вихревого кольца [1]. Среди численных методов моделирования динамики вихревых нитей привлекает внимание наиболее экономичный — метод локально-индукционного приближения (Local Induction Approximation, LIA). Как указано в [2], LIA предложил в 1906 г. Da Rios [3], а позже LIA заново предложен в работах [4–6]. Важным этапом в развитии подхода стало найденное в [7] преобразование, позволившее перейти от локально-индукционного уравнения (LIE) к нелинейному уравнению Шрёдингера (НУШ). В результате было получено решение для солитона, бегущего по вихревой нити. Позже в работе [8] было найдено двухсолитонное, а в [9] — N -солитонное решение. Другой класс решений НУШ — так называемые бризерные решения (см. работу [10] и ссылки в ней), которые в отличие от солитонов являются локализованными возмущениями. В [10] рассмотрено бризерное решение, которое в пределе $t \rightarrow \pm\infty$ дает классический винтовой вихрь. Взяв бризерное решение при $t = -800$ (возмущенный винтовой вихрь) в качестве начального условия, автор исследовал динамику винтового вихря как путем решения LIE, так и непосредственно на основе закона Био–Савара.

С помощью LIA не удается рассчитать перезамыкание, однако в [10] было установлено, что метод LIA позволяет предсказывать динамику, предшествующую перезамыканию. А переход к НУШ позволяет решать задачу в переменных кривизна–кручение, которые являются отличным индикатором конфигурации, предшествующей перезамыканию. В отличие от возмущенного классического винтового вихря [10] в эксперименте [1], как и в реальной гидротурбине, возникает конический винтовой вихрь, который подвержен собственной неустойчивости. Именно решение НУШ для случая конического винтового вихря и предложено в настоящей работе.

В приближении LIA скорость движения элемента вихревой нити представляется в виде [3]:

$$\mathbf{u} = \frac{\Gamma}{4\pi} \kappa \left(\ln \frac{2L}{\varepsilon} - 1 \right) \mathbf{b}, \quad (1)$$

где Γ — интенсивность вихревой нити, κ — кривизна, $2L$ — длина локального участка, ε — радиус вихревой нити, \mathbf{b} — орт бинормали. Приближение LIA справедливо, если размер сечения нити много меньше локального радиуса кривизны и взаимодействие различных частей вихревой нити отсутствует. Если ввести множитель $(\Gamma/4\pi)(\ln 2L/\varepsilon - 1)$ в масштаб времени и учесть формулы Френе, можно записать LIE в компактной форме

$$\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial t} = \mathbf{X}' \times \mathbf{X}'' . \quad (2)$$

Здесь \mathbf{X} — радиус-вектор точки на вихревой нити; штрих означает производную по дуговой координате. В работе [7] предложено преобразование, приводящее уравнение вида (2) к нелинейному уравнению Шрёдингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi'' + 2|\psi|^2 \psi = 0, \quad (3)$$

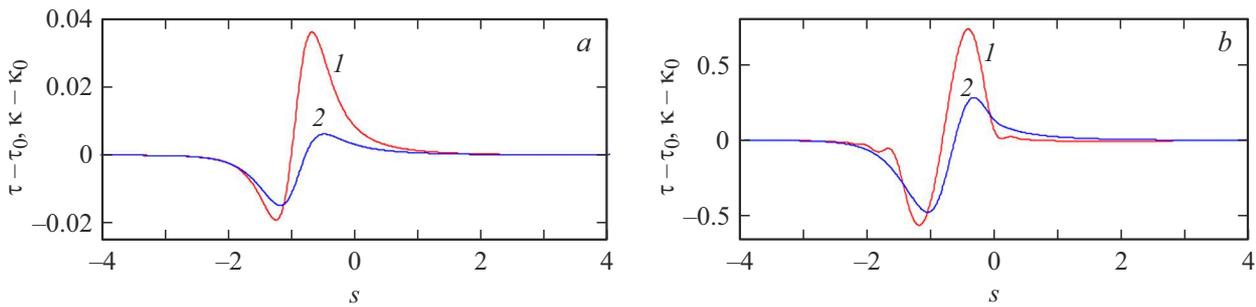


Рис. 1. Отклонение кручения (1) и кривизны (2) от начальных зависимостей при $t = 0.001$ (a) и 0.035 (b).

где комплексная функция ψ связана с кручением τ и кривизной κ вихревой линии соотношением

$$\psi = \frac{1}{2}\kappa \exp\left(i \int_0^s \tau ds - \frac{i}{2} \int_0^t A(t)dt\right). \quad (4)$$

Здесь s — дуговая координата, $A(t)$ — произвольная функция времени, которую можно принять нулевой.

В настоящей работе численно решается уравнение (3) с начальным условием, соответствующим коническому винтовому вихрю, геометрия которого задается также, как в [11]:

$$x = r_0(z) \cos(\lambda z), y = r_0(z) \sin(\lambda z),$$

$$r_0(z) = [1 + \tanh(kz)]/2. \quad (5)$$

Формулы (5) представляют гладкую сшивку полубесконечного прямолинейного вихря с полубесконечным цилиндрическим винтовым вихрем (радиус спирали принят равным единице, тем самым задан масштаб длины). Величина $2\pi/\lambda$ — шаг винтовой спирали, параметр k характеризует быстроту смены радиуса от нуля до единицы и отвечает за угол раскрытия конуса винтового вихря.

Дуговая координата для кривой, заданной уравнениями (5), представляется интегралом

$$s = \int_0^z \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + 1} dz = \frac{1}{2k} \int_{0.5}^{r_0(z)} \frac{\sqrt{q(r)}}{r(1-r)} dr,$$

$$q(r) = [4k^2(1-r)^2 + \lambda^2] r^2 + 1. \quad (6)$$

Запишем соответствующие выражения для начальных зависимостей кривизны и кручения от r_0

$$\kappa_0(r_0) = q(r_0)^{-1}$$

$$\times \sqrt{r_0^2 \lambda^4 + 4k^2 [(1-2r_0)^2 + r_0^2 \lambda^2 - (1-2r_0 - r_0^3 \lambda^2)^2 q(r_0)^{-1}]},$$

$$\tau_0(r_0) = \lambda r_0^2 [16k^4(1-r_0)^2 + 8k^2 \lambda^2(1-r_0^2) + \lambda^4]$$

$$\times q(r_0)^{-3} \kappa_0(r_0)^{-2}. \quad (7)$$

При малых значениях r_0 кривизна и кручение имеют асимптоты $(4k^2 + \lambda^2)r_0$ и λ , соответственно, а при $r_0 \rightarrow 1$ имеем асимптоты $\lambda^2/(1 + \lambda^2)$ и $\lambda/(1 + \lambda^2)$, совпадающие с кривизной и кручением классического винтового вихря.

В уравнении (3) переменной является дуговая координата s . Чтобы найти начальную зависимость $\psi_0(s)$, необходимо перейти в формулах (7) к переменной s , для чего требуется получить функцию $r_{s,0}(s)$, которая задана неявно через интеграл (6). Здесь целесообразно воспользоваться методом Ньютона, так как производная $dr_{s,0}/ds$ описывается простой функцией $dr_{s,0}/ds = 2kr_{s,0}(1-r_{s,0})/\sqrt{q(r_{s,0})}$, а в качестве начального приближения можно взять зависимости $r_0(s + 0.342)$ при $s < -0.219$ и $r_0[(s + 0.626)/\sqrt{1 + \lambda^2}]$ при $s \geq -0.219$. Указанные зависимости являются асимптотами $r_{s,0}(s)$ при $s \rightarrow -\infty$ и $s \rightarrow \infty$, соответственно. Заметим, что $r_{s,0}(0) = 0.5$.

В качестве граничных условий для уравнения (3) потребуем совпадения значений функции ψ и ее производной ψ' с ψ_0 и ψ'_0 соответственно при $s \rightarrow \pm\infty$.

Для численного решения уравнения (3) воспользуемся методом конечных разностей. Для этого выберем интервал интегрирования по переменной s . Анализ показывает, что интервал $[-10, 10]$ достаточен для изучения динамики вихря при умеренных значениях k и λ (см. обсуждение далее). Разбиваем интервал равномерной сеткой с шагом Δs и для аппроксимации ψ'' используем центральные разности. Интегрирование по времени выполняем по явной схеме.

В результате расчетов получаем зависимость $\psi(s)$ на каждом временном шаге. Поскольку нас интересуют кривизна и кручение, в соответствии с формулой (4) имеем

$$\kappa(s, t) = 2|\psi(s, t)|, \quad \tau(s, t) = \frac{\partial}{\partial s} \text{Im} [\ln(\psi(s, t))]. \quad (8)$$

В качестве примера рассмотрена эволюция вихревой нити с параметрами $k = 1.5$, $\lambda = \pi$. Для расчета выбран шаг по дуговой координате $\Delta s = 0.01$, шаг по времени $\Delta t = 10^{-7}$. Явная схема позволяет получать адекватные результаты лишь на конечном интервале времени с малым значением Δt . Поэтому в расчете шаг выбирался эмпирически, когда при уменьшении его величины

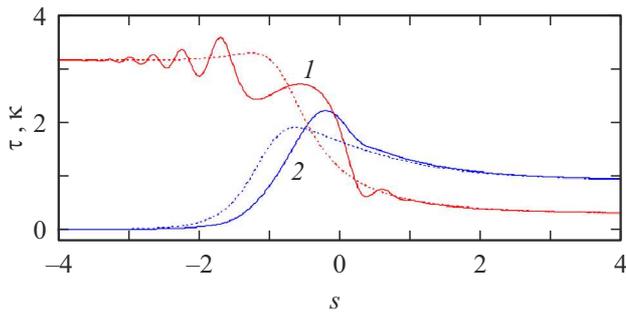


Рис. 2. Профили кручения (1) и кривизны (2) при $t = 0$ (пунктирные линии) и 0.06 (сплошные линии).

вдвое получался тот же результат. При малых временах динамику вихря проще наблюдать, рассматривая отклонение кручения и кривизны от начальных зависимостей: $\tau(s, t) - \tau_0(s)$, $\kappa(s, t) - \kappa_0(s)$. На рис. 1, *a* показаны отклонения при $t = 0.001$. Амплитуда отклонения кручения значительно выше, чем для кривизны; далее акцент сделан именно на динамике кручения. На начальном этапе формируется одиночное возмущение с центром в точке $s = -0.585$ с длиной волны $\Lambda = 1.026$. Со временем амплитуда и длина волны растут, а центр возмущения смещается вправо. При $t = 0.035$ (рис. 1, *b*) слева ($s = -1.740$) и справа ($s = 0.260$) от первой волны зарождаются две новые волны.

К моменту времени $t = 0.06$, показанному на рис. 2, волны проявляются непосредственно на зависимостях $\tau(s, t)$ и $\kappa(s, t)$. Пунктирными линиями показаны начальные профили кручения и кривизны. Много волн в области отрицательных значений s , причем амплитуда и длина волн уменьшаются с удалением координаты от нуля. Наиболее интересной с точки зрения формирования конфигурации, предшествующей вихревому переа замыканию, является первая волна при $s > 0$. Здесь значение кручения начинает приближаться к нулю. При отрицательных s с ростом амплитуды волн кручение тоже может принимать малые значения, но здесь малая кривизна, т.е. вихрь практически прямолинейный и вероятность возникновения переа замыкания низкая. Ве-

личина первого минимума кручения в зоне $s > 0$ далее убывает линейно со временем (рис. 3, *a*), а амплитуда волны растет. Движение волны (координаты локальных минимума и максимума кручения) отражено на рис. 3, *b*. Длина волны $\Lambda = 2(s_{\max} - s_{\min})$ растет, а скорость ее распространения замедляется. При $t = 0.0956$ минимум кручения достигает нулевой отметки в точке с координатой $s = 0.691$. Нулевое кручение соответствует экспериментальным данным [1], при которых формируется вихревая петля, предшествующая переа замыканию. Выше был указан интервал интегрирования НУШ по дуговой координате $[-10, 10]$. Предварительные расчеты в интервале $[-5, 5]$ показали формирование выделенной волны с достижением нулевого значения кручения в той же координате и в тот же момент времени, но при отрицательных s развитие волн приводило к нарушению граничного условия. Увеличение интервала интегрирования позволило решить указанную проблему.

В настоящей работе представлен подход к моделированию динамики конической винтовой вихревой нити на основе численного решения нелинейного уравнения Шрёдингера. Решение искалось в переменных кривизна–кручение. В результате исследования выявлен волновой характер динамики кривизны и кручения, обусловленный начальной формой вихря. Отмечена специфическая волна, эволюция которой приводит к появлению области с нулевым кручением, что соответствует возникновению петли на вихревой нити, предшествующей вихревому переа замыканию.

Рассмотренная геометрия вихревой нити качественно близка к наблюдаемой в эксперименте [1] и в более точно моделирующей проточную часть гидротурбины установке [12]. Однако и шаг винта, и угол раскрытия конического винтового вихря могут варьироваться в зависимости от геометрии модели и закрутки потока в эксперименте (или от геометрических параметров устройства и режима работы в случае рассмотрения гидротурбины). Необходимо выявить зависимость динамики вихря (и возможность возникновения ситуации с уменьшением кручения до нуля) от выбора параметров k и λ , а также осуществить поиск зависимостей, лучше описывающих наблюдаемые формы вихрей в реальном оборотовании.

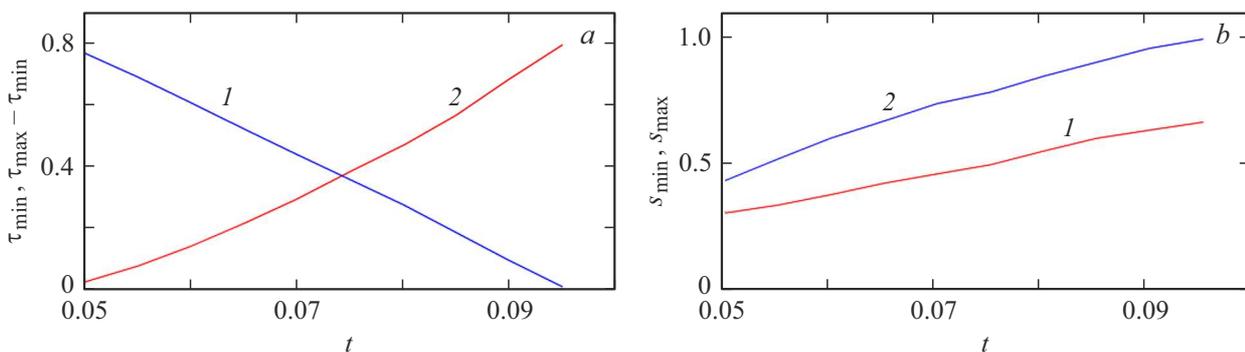


Рис. 3. Динамика характеристик первой волны кручения в зоне $s > 0$. *a* — локальный минимум (1) и размах волны (2); *b* — координаты локального минимума (1) и максимума (2).

Результаты работы важны для развития теоретических подходов к описанию обнаруженного экспериментально явления самоперезамыкания в коническом винтовом вихре [1], которые, в частности, могут быть использованы для понимания причин возникновения сильных апериодических ударов в течении за рабочим колесом гидротурбины.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] С.В. Алексеенко, П.А. Куйбин, С.И. Шторк, С.Г. Скрипкин, М.А. Цой, Письма в ЖЭТФ, **103** (7), 516 (2016). DOI: 10.7868/S0370274X16070067 [S.V. Alekseenko, P.A. Kuibin, S.I. Shtork, S.G. Skripkin, M.A. Tsoy, JETP Lett., **103** (7), 455 (2016). DOI: 10.1134/S002136401607002X].
- [2] R. Ricca, Nature, **352**, 561 (1991). DOI: 10.1038/352561a0
- [3] L.S. Da Rios, Rend. Circ. Mat. Palermo, **22**, 117 (1906). DOI: 10.1007/BF03018608
- [4] F.R. Hama, Phys. Fluids, **5**, 1156 (1962). DOI: 10.1063/1.1706500
- [5] R.J. Arms, F.R. Hama, Phys. Fluids, **8**, 553 (1965). DOI: 10.1063/1.1761268
- [6] R. Betchov, J. Fluid Mech., **22**, 471 (1965). DOI: 10.1017/S0022112065000915
- [7] H. Hasimoto, J. Fluid Mech., **51**, 477 (1972). DOI: 10.1017/S0022112072002307
- [8] J. Cieśliński, Phys. Lett. A, **171**, 323 (1992). DOI: 10.1016/0375-9601(92)90651-2
- [9] Y. Fukumoto, T. Miyazaki, J. Phys. Soc. Jpn., **55**, 4152 (1986). DOI: 10.1143/JPSJ.55.4152
- [10] H. Salman, Phys. Rev. Lett., **111**, 165301 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevLett.111.165301
- [11] P.A. Kuibin, E3S Web Conf., **592**, 02010 (2024). DOI: 10.1051/e3sconf/202459202010
- [12] G.D. Ciocan, M.S. Iliescu, in *Proc. of 24th Symp. on hydraulic machinery and systems* (Foz do Iguassu, Brasil, 2008). https://www.researchgate.net/publication/235331921_3D_PIV_Measurements_in_Two_Phase_Flow_and_Rope_Parametrical_Modeling