

05

Нормальное сопротивление $SN-N-NS$ джозефсоновских структур

© С.В. Бакурский, М.Ю. Куприянов

Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына
Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: r4zz@mail.ru

Поступило в Редакцию 2 декабря 2025 г.
В окончательной редакции 31 декабря 2025 г.
Принято к публикации 5 января 2026 г.

Получены выражения для сопротивления $SN-N-NS$ джозефсоновских контактов в случае задания измерительного тока в N -пленку структуры при температурах, больших и меньших критической температуры перехода структуры в сверхпроводящее состояние. Рассмотрено несколько моделей процесса затекания сверхтока в сверхпроводниковый электрод. На основе полученных выражений предложен экспериментальный способ оценки характерной длины перетекания тока и его физической природы.

Ключевые слова: $SN-N-NS$ джозефсоновский контакт, нормальное сопротивление, длины конверсии.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.09.62699.20590

В дорожной карте развития сверхпроводниковой электроники [1] отмечено, что джозефсоновские $SN-N-NS$ -структуры типа „мостик переменной толщины“ [2,3] являются достойными конкурентами широко используемым в современной слаботочной сверхпроводниковой электронике $SNIS$ туннельным контактам. Такие структуры (см. рисунок, *a*) состоят из сверхпроводящих (S) электродов с критической температурой перехода в сверхпроводящее состояние T_C , находящихся в контакте с соединяющей их тонкой и узкой пленкой мостика из нормального (N) металла.

Расчет нормального сопротивления таких структур существенно зависит от способа задания в них тока и расположения электродов, фиксирующих измеряемую разность потенциалов. Он существенно осложняется существованием конечной прозрачности их SN -границ [4–6] и возможной модификацией транспортных и сверхпроводящих свойств в некоторой области S -электродов, граничащей с N -пленкой. В этой S -области (см. рисунок, *b*), имеющей эффективную толщину d_c , как проводимость σ_c , так и критическая температура T_C^* могут существенно отличаться от проводимости σ_s S -материала и его T_C .

Цель настоящей работы состоит в проведении расчета нормального сопротивления R_n $SN-N-NS$ мостиковой структуры для различных температурных интервалов в том случае, когда ток смещения I_b инжектируется в структуру через одну из ее внешних $N-NS$ -границ.

Пусть расстояние между электродами SN равно L , длина области перекрытия между частями N и S равна W , ширина пленки N равна w , а материалы S и N удовлетворяют условиям диффузного предела. Тогда ток I_b , инжектированный в N -пленку составного SN -электрода, имеет возможность растекаться как через часть S -пленки, покрывающей ее N -слой, так и через его торцы, затекая в ее глубь через торцевую границу с N -пленкой. В последнем случае размер области

растекания тока имеет порядок $W \gg w, d$, где d — толщина S -пленки. Поэтому при расчете сопротивления мы ограничимся рассмотрением лишь токообмена между торцевыми участками SN -границы, считая толщины S - и N -пленок равными (см. рисунок, *b*).

Направим ось $0z$ перпендикулярно торцевой части SN -границы, а ось $0x$ вдоль N -пленки и совместим начало координат с серединой N -пленки на одной из внешних $N-SN$ -границ структуры (см. рисунок). Измерение R_n можно проводить, задавая измерительный ток I_b в N -пленку контакта. Разность потенциалов измеряется между SN -электродами (точками 2, 3 на рисунке) и точками 1 ($x = 0$) и 4 ($x = L + 2W$) соответственно.

В силу имеющейся симметрии задачи R_n представляет собой сумму сопротивления SN -электродов R_{ns} и пленки мостика $R_M = L/wd\sigma_n$, где σ_n — проводимость N -материала. Для расчета R_{ns} требуется решить уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

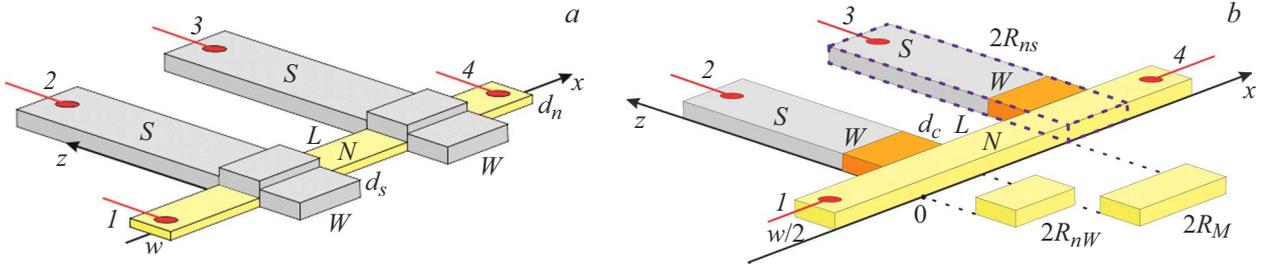
для скалярного потенциала $U(x, z)$ в одном из SN -электродов. Симметрия задачи относительно оси $0x$ позволяет ограничиться поиском решения в области $0 \leq x \leq W$, $z \geq 0$. Уравнение (1) необходимо дополнить следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad z = 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad 0 \leq x \leq W, \quad (2)$$

$$U(x, d_c + w/2 + 0) = U(x, d_c + w/2 - 0), \\ z = d_c + w/2, \quad 0 \leq x \leq W, \quad (3)$$

$$\sigma_s \frac{\partial U}{\partial z} U(x, d_c + w/2 + 0) = \sigma_c \frac{\partial U}{\partial z} U(x, d_c + w/2 - 0), \\ z = d_c + w/2, \quad 0 \leq x \leq W, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{I_b}{wd\sigma_n}, \quad x = 0, W, \quad 0 \leq z \leq \frac{w}{2}. \quad (5)$$



a – схематическое изображение типичной $SN-N-NS$ -структуры, получаемой методами электронной литографии; *b* – схематическое изображение $SCN-N-NCS$ -структуры для описания физических процессов электронного транспорта. Желтым, серым и оранжевым цветом показаны полоска нормального металла N , сверхпроводящий электрод S и область подавленной сверхпроводимости C соответственно. Измерительный ток I_b задается в N -пленке структуры, напряжение фиксируется либо между точками 1 и 4, либо между S -электродами (точки 2, 3). Для сравнения на части *b* приведены элементы, обладающие нормировочными сопротивлениями $2R_{nW}$ и $2R_M$, пунктиром выделена область электрода с эффективным сопротивлением $2R_{ns}$. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

Граничные условия на SN -границе $z = w/2$ и $0 \leq x \leq W$ следуют из равенства протекающих через нее токов

$$\sigma_n \frac{\partial}{\partial z} U \left(x, \frac{w-0}{2} \right) = \frac{U(x, w/2+0) - U(x, w/2-0)}{R_b},$$

$$\sigma_n \frac{\partial}{\partial z} U \left(x, \frac{w-0}{2} \right) = \sigma_c \frac{\partial}{\partial z} U \left(x, \frac{w+0}{2} \right). \quad (6)$$

Здесь R_b — удельное сопротивление SN -интерфейса.

Решение сформулированной выше краевой задачи (1)–(6) удобно искать в виде ряда Фурье

$$U(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(z) \cos \frac{\pi n(x-W)}{W},$$

$$U_n(z) = \frac{2}{W} \int_0^W U(x, z) \cos \frac{\pi n(x-W)}{W} dx, \quad (7)$$

коэффициенты $U_n(z)$ которого удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} U_n(z) - \left(\frac{\pi n}{W} \right)^2 U_n(z) = \frac{2}{W} F. \quad (8)$$

Правая часть уравнения (8) $F = 0$ при $z > w/2$ и $F = ((-1)^n - 1) I_b / \sigma_n d w$ в области $0 \leq z \leq w/2$.

Решение краевой задачи (1)–(6) представимо в виде

$$\frac{U_n(z)}{I_b R_{nW}} = \frac{w^2}{W^2 \theta_n^2} \left[1 - \frac{\sigma_c p_n}{g_n p_n + \sigma_n p q_n \sinh \theta_n} \right] \cosh \frac{2\theta_n z}{w},$$

$$0 \leq z \leq \frac{w}{2}, \quad (9)$$

$$\frac{U_n(z)}{I_b R_{nW}} = C_n \left[\cosh \frac{2\theta_n(z-d_c-w/2)}{w} - \frac{\sigma_s}{\sigma_c} \sinh \frac{2\theta_n(z-d_c-w/2)}{w} \right],$$

$$\frac{w}{2} \leq z \leq \frac{w}{2} + d_c, \quad (10)$$

$$\frac{U_n(z)}{I_b R_{nW}} = \frac{w^2}{W^2 \theta_n^2} \frac{\sigma_c \sinh \theta_n}{g_n p_n + \sigma_n p q_n \sinh \theta_n} \exp \left\{ \frac{2\theta_n(w/2+d_c-z)}{w} \right\},$$

$$z \geq \frac{w}{2} + d_c, \quad (11)$$

где введены следующие обозначения:

$$p_n = \sigma_s \cosh \frac{2\theta_n d_c}{w} + \sigma_c \sinh \frac{2\theta_n d_c}{w},$$

$$q_n = \sigma_s \sinh \frac{2\theta_n d_c}{w} + \sigma_c \cosh \frac{2\theta_n d_c}{w}, \quad \theta_n = \frac{w\pi(2n+1)}{2W},$$

$$g_n = R_b \sigma_c \sigma_n \frac{2\theta_n}{w} \sinh \theta_n + \sigma_c \cosh \theta_n,$$

$$C_n = \frac{w^2}{W^2 \theta_n^2} \frac{\sigma_n \sigma_c p_n}{g_n p_n + \sigma_n p q_n \sinh \theta_n}, \quad R_{nW} = \frac{W}{\sigma_n d w}.$$

Из решения (11) следует, что потенциал перпендикулярного сечения S -электрода вдали от мостика N постоянен $U(x, \infty) = U(W/2, 0)$. Поэтому вольтметр, подключенный между клеммами 2 и 3, помимо падения потенциала в области между электродами будет фиксировать удвоенную разность потенциалов между положениями $x = W/2$ и $x = 0$.

В экспериментально реализуемых $SN-N-NS$ -структурах ширина SN -электродов W , как правило, существенно превышает ширину N -пленки мостика w . Учитывая это обстоятельство и тот факт, что определяющие $U(x, z)$ суммы в (7) сходятся при $n \ll w/W$, получаем, что в области $0 \leq z \leq w/2$ потенциал $U(x, z)$ фактически не зависит от координаты z . В результате при подключении вольтметра между точками 1 и 4 для сопротивления SN -электрода R_{ns} при температурах больше критической ($T > T_c$) получаем

$$\frac{R_{ns}}{R_{nW}} = \frac{U(W) - U(0)}{I_b R_{nW}} = 2 \frac{U(W)}{I_b R_{nW}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2w^2}{W^2 \theta_n^2} \left[1 - \frac{\sigma_c p_n}{g_n p_n + q_n \sigma_n \sinh \theta_n} \right]. \quad (12)$$

Суммирование первого из слагаемых в (12) дает единицу, т.е. приводит к $R_{ns} = R_{nW}$. Второе слагаемое в (12) — сопротивление растекания, шунтирующее R_{nW} . Нетрудно видеть, что подключенный между S -пленками 2 и 3 вольтметр будет показывать падение напряжения, вклад SN -электродов в которое будет в 2 раза меньше, чем разность $U(W) - U(0)$, входящая в (12).

В окрестности критической температуры ($T \lesssim T_C$) S -электроды начинают переходить в сверхпроводящее состояние. Полагая, что в этом случае $\sigma_s \gg \sigma_c$, и учитывая, что, как правило, $W \gg d_c$, из (12) имеем

$$\frac{R_{ns}}{R_{nW}} = \frac{2\xi}{W} \tanh \frac{W}{2\xi}, \quad \xi = \sqrt{\frac{w\sigma_n}{2} R_{bef}}, \quad R_{bef} = R_b + \frac{d_c}{\sigma_c}, \quad (13)$$

где ξ — характерный масштаб перетекания тока из N - в S -часть составного SN -электрода. Из (13) следует, что существование при $w/2 \leq z \leq w/2 + d_c$ области S -электродов с модифицированными транспортными свойствами можно трактовать как увеличение удельного сопротивления SN -границы R_b до значения R_{bef} .

При дальнейшем уменьшении температуры джозефсоновский контакт полностью переходит в сверхпроводящее состояние. Тогда R_n можно измерить экспериментально лишь в области токов смещения, существенно превышающих критический ток контакта I_C , т.е. в той области токов и напряжений, в которой вольт-амперная характеристика структуры выходит на закон Ома. В этом случае ток в N -пленке является полностью квази-частичным. Его инжекция в эффективный SN -электрод приводит к трем одновременно реализующимся процессам: перераспределению нормального тока между S - и N -частями SN -электродов, конверсии в S -пленке нормального тока в сверхпроводящий [7–9] и перераспределению сверхпроводящей составляющей полного тока между S - и N -частями электродов. При этом за счет процессов конверсии эффективное сопротивление границы зависит от температуры $(1 - T/T_C)^{-\alpha/2}$, где α — величина порядка единицы [10]. Следуя предложенной в [11,12] феноменологической модели, мы также решили ввести единый характерный масштаб трансформации нормального тока в сверхпроводящий λ , а сам этот процесс описывать в модели двух взаимодействующих между собой каналов протекания токов. Первый из них является полностью сверхпроводящим и имеет нулевое удельное сопротивление, а потенциал в этой линии соответствует электрохимическому потенциалу куперовских пар. По второму каналу проходит ток квазичастиц I_N . Он характеризуется сопротивлением на единицу длины пленки N в нормальном состоянии $r = R_{nW}/W$. Преобразование тока I_N в сверхток I_S в пленке S описывается удельной проводимостью G , а сам процесс преобразования описывается телеграфными уравнениями

$$\frac{d^2}{dx^2} I_N - \frac{1}{\lambda^2} I_N = 0, \quad \frac{d^2}{dx^2} I_S + \frac{1}{\lambda^2} I_S = 0, \quad \lambda^2 = \frac{1}{rG}. \quad (14)$$

В исследуемом нами случае токи $I_N(0)$ и $I_N(W)$, задаваемые в SN -электрод, равны I_b . Решение уравнений (14) с такими граничными условиями определяется следующими выражениями:

$$I_N(x) = \frac{I_b}{\cosh(W/2\lambda)} \cosh\left(\frac{x - W/2}{\lambda}\right),$$

$$U(x) = \frac{1}{G} \frac{dI_N}{dx} = \frac{I_b r \lambda}{\cosh(W/2\lambda)} \sinh\left(\frac{x - W/2}{\lambda}\right), \quad (15)$$

в которых $U(x)$ обозначает электрохимический потенциал квазичастиц. Это решение отражает пространственно-симметричный характер распределения тока и потенциала относительно средней точки $x = W/2$ области контакта SN . Из (15) следует, что для вольтметра, подключенного между точками 1 и 4, сопротивление SN -электрода равно

$$\frac{R_{ns}}{R_{nW}} = \frac{U(W) - U(0)}{I_b R_{nW}} = \frac{2\lambda}{W} \tanh \frac{W}{2\lambda}. \quad (16)$$

Для измерения сопротивления при подключении вольтметра между точками 2 и 3 требуется определить электрический потенциал в области S -пленки. Этот потенциал не зависит от координаты x и из соображений симметрии равен потенциалу посередине подэлектродной части N -пленки $U(W/2) = 0$. Таким образом, при подключении вольтметра между точками 2 и 3 сопротивление SN -электрода в 2 раза меньше полученного в предыдущем варианте измерений.

Как можно видеть, полученные выражения для сопротивления SN -электрода (13) и (16) имеют одинаковый вид с точностью до характерной длины ξ и λ , несмотря на то что одно получено предельным переходом из решения двумерной задачи для резистивного случая, а другое — из феноменологической модели конверсии сверхтока. Это означает, что характерная длина и сопротивление границы могут быть напрямую получены из экспериментальных измерений сопротивления серии джозефсоновских контактов (например, представленных в работах [13,14]) с разной шириной электродов с использованием рассчитанных формул. Сравнение полученной величины с результатами измерений R_{ns} при температуре выше T_C позволит определить физический механизм трансформации сверхпроводящей и нормальной составляющих полного тока в SN -структурах при разных температурах и напряжениях.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-19-00057 (<https://rscf.ru/project/25-19-00057/>).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] D.S. Holmes, in *2021 IEEE Int. Roadmap for Devices and Systems Outbriefs* (IEEE, 2021), p. 1.
DOI: 10.1109/IRDS54852.2021.00012
- [2] I.I. Soloviev, S.V. Bakurskiy, V.I. Ruzhickiy, N.V. Klenov, M.Yu. Kupriyanov, A.A. Golubov, O.V. Skryabina, V.S. Stolyarov, *Phys. Rev. Appl.*, **16** (4), 044060 (2021).
DOI: 10.1103/PhysRevApplied.16.044060
- [3] V. Ruzhickiy, S. Bakurskiy, M. Kupriyanov, N. Klenov, I. Soloviev, V. Stolyarov, A. Golubov, *Nanomaterials*, **13** (12), 1873 (2023). DOI: 10.3390/nano13121873
- [4] A.A. Golubov, E.P. Houwman, J.G. Gijsbertsen, V.M. Krasnov, J. Flokstra, H. Rogalla, M.Yu. Kupriyanov, *Phys. Rev. B*, **51** (2), 1073 (1995).
DOI: 10.1103/PhysRevB.51.1073
- [5] D.V. Baxter, S.D. Steenwyk, J. Bass, W.P. Pratt, Jr., *J. Appl. Phys.*, **85** (8), 4545 (1999). DOI: 10.1063/1.370501
- [6] V.S. Stolyarov, T. Cren, C. Brun, I.A. Golovchanskiy, O.V. Skryabina, D.I. Kasatonov, M.M. Khapaev, M.Yu. Kupriyanov, A.A. Golubov, D. Roditchev, *Nat. Commun.*, **9** (1), 2277 (2018).
DOI: 10.1038/s41467-018-04582-1
- [7] A. Schmid, G. Schön, *J. Low Temp. Phys.*, **20** (1), 207 (1975).
DOI: 10.1007/BF00115264
- [8] С.Н. Артеменко, А.Ф. Волков, *УФН*, **128** (5), 3 (1979).
DOI: 10.3367/UFNr.0128.197905a.0003 [S.N. Artemenko, A.F. Volkov, *Sov. Phys. Usp.*, **22** (5), 295 (1979).
DOI: 10.1070/PU1979v022n05ABEH005495].
- [9] G. Blonder, M. Tinkham, T. Klapwijk, *Phys. Rev. B*, **25** (7), 4515 (1982). DOI: 10.1103/PhysRevB.25.4515
- [10] Y. Krahenbuhl, R.J. Watts-Tobin, *J. Low Temp. Phys.*, **35**, 569 (1979). DOI: 10.1007/BF00117897
- [11] T. Golikova, M. Wolf, D. Beckmann, I. Batov, I. Bobkova, A. Bobkov, V. Ryazanov, *Phys. Rev. B*, **89** (10), 104507 (2014). DOI: 10.1103/PhysRevB.89.104507
- [12] И.С. Лакунов, С.В. Егоров, Е.Д. Муханова, И.Е. Батов, Т.Е. Голикова, В.В. Рязанов, *Письма в ЖЭТФ*, **118** (9), 656 (2023). DOI: 10.31857/S123456782321005X [I.S. Lakunov, S.V. Egorov, E.D. Mukhanova, I.E. Batov, T.E. Golikova, V.V. Ryazanov, *JETP Lett.*, **118** (9), 644 (2023).
DOI: 10.1134/S0021364023602981].
- [13] S.V. Sotnichuk, O.V. Skryabina, A.G. Shishkin, S.V. Bakurskiy, M.Yu Kupriyanov, V.S. Stolyarov, K.S. Napolskii, *ACS Appl. Nano Mater.*, **5** (11), 17059 (2022).
DOI: 10.1021/acsanm.2c03837
- [14] O.V. Skryabina, S.V. Bakurskiy, V.I. Ruzhickiy, A. Shishkin, N.V. Klenov, I.I. Soloviev, M.Yu Kupriyanov, V.S. Stolyarov, *Supercond. Sci. Technol.*, **37** (12), 125018 (2024).
DOI: 10.1088/1361-6668/ad92194s