

03 Спектральная модель однородной изотропной турбулентности запыленного потока

© И.В. Деревич, Д.И. Матюхина

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана
(Национальный исследовательский университет), Москва, Россия
E-mail: DerevichIgor@bmstu.ru

Поступило в Редакцию 1 декабря 2025 г.
В окончательной редакции 16 декабря 2025 г.
Принято к публикации 17 декабря 2025 г.

На основе спектрального анализа уравнений баланса турбулентной энергии и турбулентной диссипации газа с примесью частиц получена замкнутая двухпараметрическая модель турбулентности двухфазного потока. Предложен критерий диссипативности, на основе которого проверена корректность модели. Представлены результаты расчетов параметров турбулентности несущего потока в присутствии частиц различной инерционности.

Ключевые слова: однородная изотропная турбулентность, дисперсная примесь, спектры турбулентной энергии и турбулентной диссипации, двухпараметрическая модель турбулентности.

DOI: 10.61011/PJTF.2026.08.62681.20588

Микромасштабная структура газодисперсных турбулентных потоков играет определяющую роль в ряде современных технических приложений (например, смешение реагентов в аппаратах химической технологии, распространение электромагнитного излучения в запыленной атмосфере и др.).

Существует два направления теоретического моделирования двухфазных турбулентных течений. Первое — метод прямого численного моделирования (direct numerical simulation, DNS). Частицы описываются в переменных Лагранжа, несущая фаза — в переменных Эйлера [1–6]. DNS требует значительных компьютерных ресурсов и существенных ограничений на число Рейнольдса турбулентности и концентрацию примеси. Для инженерных приложений актуально второе направление, основанное на описании обеих фаз в переменных Эйлера. В стандартную двухпараметрическую $E-\varepsilon$ -модель (E — турбулентная энергия, ε — турбулентная диссипация) добавляются слагаемые, описывающие влияние дисперсной примеси на параметры турбулентности (см., например, [1,7,8]). Сила вязкого сопротивления частиц описывается законом Стокса (Stokes), время динамической релаксации $\tau_U = \text{const}$. Инерционность частиц оценивается по критерию Стокса $\text{St}^{(0)} = \tau_U/\tau_\eta^{(0)}$ ($\tau_\eta^{(0)}$ — временной микромасштаб Колмогорова для однофазного течения). В настоящей работе результаты расчетов сравниваются с данными DNS, в которых действие силы тяжести не учитывается. В ряде моделей (см., например, [1,7,8]) в вырождающейся двухфазной турбулентности появляется фиктивный источник энергии, приводящий к росту турбулентности несущей фазы по сравнению с незапыленным потоком. В настоящей работе на основе спектрального анализа предложена корректная $E-\varepsilon$ -модель турбулентности газа с частица-

ми. В [1–6] иллюстрируется зависимость спектрального состава турбулентности только от массовой концентрации примеси, поэтому распределение концентрации частиц считаем постоянным.

Спектральные разложения уравнений для скорости дисперсной и несущей фаз с учетом межфазного обмена импульсом имеют вид

$$\frac{d\hat{v}_i(\mathbf{k}, t)}{dt} = -ik_n \int \hat{v}_i^*(\mathbf{k}', t) \hat{v}_n(\mathbf{k} + \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + \frac{\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) - \hat{v}_i(\mathbf{k}, t)}{\tau_U},$$

$$k_i \hat{v}_i(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\hat{u}_i(\mathbf{k}, t)}{dt} = -ik_n \left(\delta_{i,l} - \frac{k_i k_l}{k^2} \right) \int \hat{u}_l^*(\mathbf{k}', t) \hat{u}_n(\mathbf{k} + \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' - \nu_f k^2 \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) - \langle G \rangle \frac{1}{\tau_U} \left[\hat{u}_i(\mathbf{k}, t) - \hat{v}_i(\mathbf{k}, t) \right],$$

$$k_i \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) = 0. \quad (2)$$

Здесь $\hat{u}_i(\mathbf{k}, t)$, $\hat{v}_i(\mathbf{k}, t)$ — спектральные разложения случайной скорости, \mathbf{k} , k — волновой вектор и его модуль, $\delta_{i,l}$ — символ Кронекера, ν_f — коэффициент кинематической вязкости газа, звездочка — комплексное сопряжение, d/dt — субстанциональная производная.

Уравнение для спектра турбулентной энергии газа $E(t) = \int \hat{E}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}$ имеет вид

$$\frac{d}{dt} \hat{E}(\mathbf{k}, t) + \text{div}_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{k}, t) = -\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) - \langle G \rangle \hat{\varepsilon}_p(\mathbf{k}, t). \quad (3)$$

Второе слагаемое в левой части (3) — дивергенция потока турбулентной энергии по спектру. Первый член в правой части (3) представляет спектр турбулентной диссипации $\varepsilon(t) = \int \hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}$, $\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) = 2\nu_f k^2 \hat{E}(\mathbf{k}, t)$. Последнее слагаемое справа в (3) — межфазный обмен

импульсом в результате инерции и силы трения частиц $\varepsilon_p(t) = \int \hat{\varepsilon}_p(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}$:

$$\hat{\varepsilon}_p(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\tau_U} \left\{ 2\hat{E}(\mathbf{k}, t) - \frac{\langle \hat{v}(\mathbf{k}, t) \hat{u}_i^*(\mathbf{k}, t) \rangle + \langle \hat{u}_i(\mathbf{k}, t) \hat{v}_i^*(\mathbf{k}, t) \rangle}{2} \right\}. \quad (4)$$

Далее записываем уравнение для спектра турбулентной диссипации

$$\frac{d\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, t)}{dt} = 2\nu_f k^2 \frac{d\hat{E}(\mathbf{k}, t)}{dt}. \quad (5)$$

С учетом (3) уравнение для спектра турбулентной диссипации получается в виде

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, t)}{dt} + 2\nu_f k^2 \operatorname{div}_{\mathbf{k}} \hat{\mathbf{J}}(\mathbf{k}, t) = & -2\nu_f k^2 \hat{\varepsilon}(\mathbf{k}, t) \\ & - \langle G \rangle 2\nu_f k^2 \hat{\varepsilon}_p(\mathbf{k}, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь второе слагаемое слева — порождение микромасштабных флуктуаций скорости. Первое и второе слагаемые в правой части (6) — диссипация микромасштабных флуктуаций скорости и дополнительное вырождение микромасштабных флуктуаций в результате работы силы межфазного трения. Для замыкания межфазного обмена импульсом в (3) и (6) используется разложение скорости дисперсной фазы (1). Для однородной изотропной турбулентности интегрирование уравнений (3) и (6) по объему в пространстве волновых векторов приводит к уравнениям баланса турбулентной энергии и диссипации

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} = & -2\nu_f \int_0^\infty k^2 \hat{E}^\circ(k, t) dk \\ & - \langle G \rangle \frac{2}{\tau_U} \int_0^\infty [1 - f(k, \tau_U)] \hat{E}^\circ(k, t) dk, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = & - \int_0^\infty \left\{ 2\nu_f k^2 + \langle G \rangle \frac{2}{\tau_U} [1 - f(k, \tau_U)] \right\} \hat{\varepsilon}^\circ(k, t) dk \\ = & -2\nu_f \int_0^\infty k^2 \hat{\varepsilon}_{eff}^\circ(k, t) dk. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $\hat{E}^\circ(k, t)$, $\hat{\varepsilon}^\circ(k, t)$ — результат осреднения трехмерных спектров в волновом пространстве по сфере радиуса k ; $f(k, \tau_U)$ — функция отклика частиц на турбулентные флуктуации скорости газа. Из рис. 1 следует, что уравнение (7) описывает влияние примеси в энергоемкой части спектра $0 < k \leq k_E$ ($k_E = L_E^{-1}$, L_E — интегральный пространственный масштаб). Уравнение (8) моделирует динамику микромасштабной турбулентности $k_\lambda < k \leq \eta^{-1}$ ($\eta = (\nu_f^3/\varepsilon)^{1/4}$ — пространственный микромасштаб Колмогорова, $k_\lambda = \lambda^{-1}$, λ — пространственный микромасштаб Тейлора). Этим масштабам соответствуют три временных масштаба: $T_E = L_E/E^{1/2}$ — интегральный

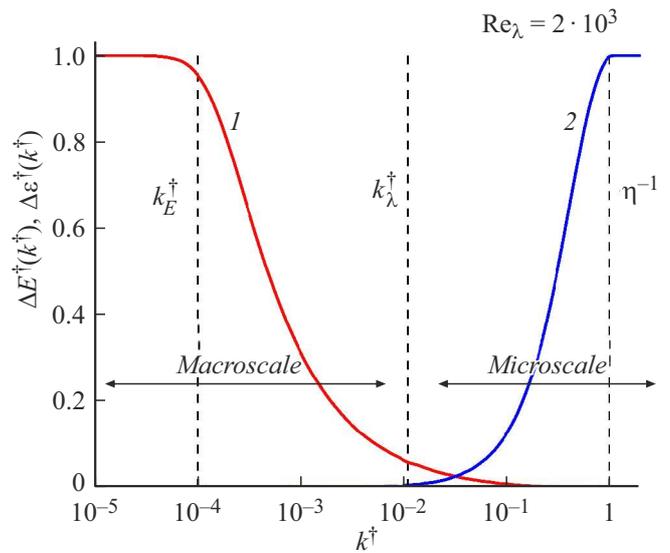


Рис. 1. Относительные доли турбулентной энергии (1) и турбулентной диссипации (2) в спектре. Крестиком обозначены параметры, нормированные на микромасштабы Колмогорова, $k^\dagger = k\eta$. Расчет спектра по модели [9].

масштаб, $\tau_\lambda = \alpha k_\lambda^{-2/3} \varepsilon^{-1/3}$ — микромасштаб Тейлора ($\alpha \sim 1$ [9]), $\tau_\eta = (\nu_f/\varepsilon)^{1/2}$ — микромасштаб Колмогорова. Интенсивность флуктуаций скорости дисперсной фазы определяется функцией отклика, зависящей от автокорреляционной функции $\Psi(k, t)$, полученной в [10]:

$$f(k, \tau_U) = \frac{1}{\tau_U} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi}{\tau_U}\right) \Psi(k, \xi) d\xi, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \Psi(k, t) = & \frac{\exp(-t/\tau(k)) - (\tau_\eta/\tau(k)) \exp(-t/\tau_\eta)}{1 - (\tau_\eta/\tau(k))}, \\ \tau(k) = & \alpha k^{-2/3} \varepsilon^{-1/3}. \end{aligned} \quad (10)$$

Из формул (9) и (10) следует выражение для функции отклика

$$\begin{aligned} f(k, \tau_U) = & 1 - [(1 + \tau(k)/\tau_U)(1 + \tau_\eta/\tau_U)]^{-1}, \\ 0 < f(k, \tau_U) < & 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Система уравнений для спектров (7), (8) аппроксимируется E - ε -моделью однородной изотропной турбулентности

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} = & -\varepsilon_{eff} - 2 \frac{E}{T_E} \langle G \rangle \underbrace{\frac{T_E}{\tau_U} [1 - f(k_E, \tau_U)]}_{\text{macroscale}}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = & -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon_{eff}}{T_E}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varepsilon_{eff} = \left\{ 1 + \langle G \rangle \underbrace{\frac{T_E}{\tau_U} \frac{2}{C_{\varepsilon 2}} [1 - f(k_\lambda, \tau_U)]}_{\text{microscale}} \right\} \varepsilon. \quad (13)$$

Здесь $T_E = E/\varepsilon$ — интегральный временной масштаб, $C_{\varepsilon 2} = 1.92$ — константа стандартной E – ε -модели. Для $\tau_U \gg T_E$ и $\tau_U \ll \tau_\eta$ влияние дисперсной примеси исчезает (см. (11)). Числа Рейнольдса энергоемкой и диссипативной части спектра равны

$$\text{Re}_E = L_E E^{1/2} / \nu_f = E^2 / (\nu_f \varepsilon), \quad \text{Re}_\lambda = (20 \text{Re}_E / 3)^{1/2}.$$

Изменение турбулентной энергии газа с примесью следует из (12) и (13)

$$\frac{\Delta \dot{E}_p}{\varepsilon} = 2 \frac{T_E}{\tau_U} \left\{ \frac{1}{C_{\varepsilon 2}} \left[1 - f(k_\lambda, \tau_U) \right] + \left[1 - f(k_E, \tau_U) \right] \right\}. \quad (14)$$

Корректность модели (12), (13) следует из критерия диссипативности — турбулентная энергия газа в однофазной изотропной турбулентности должна снижаться,

$$\frac{d \text{Re}_E}{dt} = \text{Re}_E \left(\frac{2}{E} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} \right) < 0. \quad (15)$$

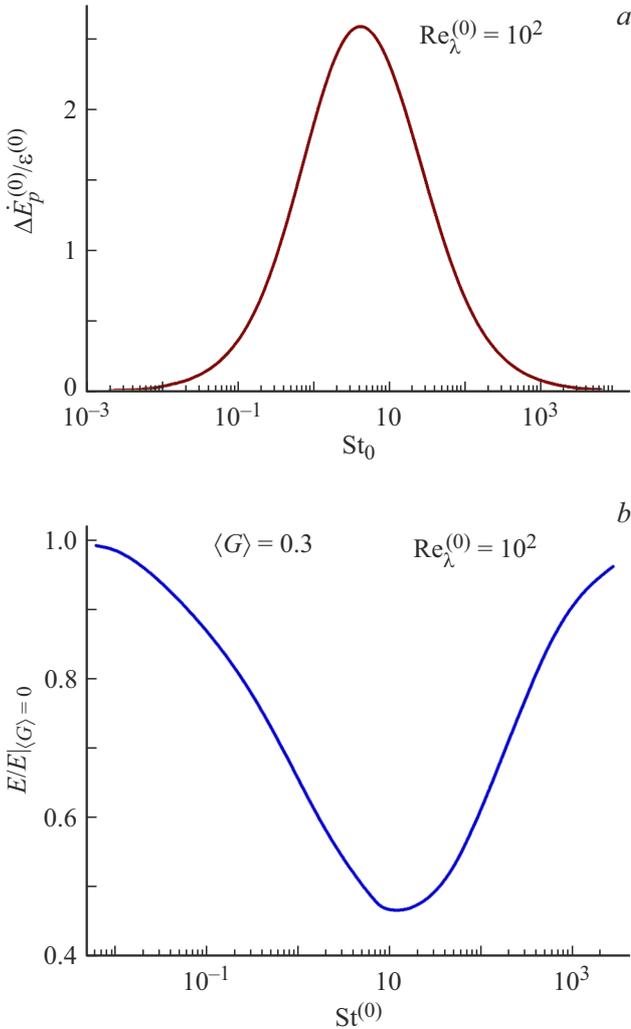


Рис. 2. *a* — доля турбулентной энергии, расходуемая газом на вовлечение примеси в турбулентное движение (расчет по формуле (14)). *b* — зависимость турбулентной энергии несущей фазы от параметра инерционности частиц.

Для уравнений (12) и (13) неравенство (15) принимает вид

$$\frac{2}{E} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{\varepsilon_{eff}}{E} (2 - C_{\varepsilon 2}) - \frac{4}{T_E} \langle G \rangle \frac{T_E}{\tau_U} \left[1 - f(k_E, \tau_U) \right] < 0. \quad (16)$$

Для стандартной E – ε -модели ($\langle G \rangle = 0$) $\varepsilon_{eff} = \varepsilon$, неравенство (15) выполняется при $C_{\varepsilon 2} < 2$. Из (16) видно, что модель (12), (13) удовлетворяет критерию (15) для частиц любой инерционности. В ряде моделей двухфазной турбулентности [1,7,8] условие (15) нарушается. Следуя [1], запишем уравнения E – ε -модели с учетом дисперсной фазы в виде

$$\frac{dE}{dt} = -\varepsilon - \alpha_p \frac{E}{T_E},$$

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{T_E} - C_{\varepsilon 2} \beta_p \frac{\varepsilon}{T_E}. \quad (17)$$

Здесь коэффициенты α_p , β_p представляют соответственно подавление энергоемких и микромасштабных флуктуаций скорости в запыленном газе. Условие (15) принимает вид

$$\frac{2}{E} \frac{dE}{dt} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dt} = - \left[(2 - C_{\varepsilon 2}) + (2\alpha_p - C_{\varepsilon 2} \beta_p) \right] \frac{\varepsilon}{E} < 0.$$

Выполнение этого неравенства требует $2\alpha_p - C_{\varepsilon 2} \beta_p > 0$. Для частиц малой инерционности $\tau_\lambda \sim \tau_U \ll T_E$ имеем $\alpha_p \rightarrow 0$, $\beta_p > 0$, и условие (15) нарушается. Для инерционных частиц $\tau_\lambda \ll \tau_U \sim T_E$ получаем $\alpha_p > 0$, $\beta_p \rightarrow 0$, и условие диссипативности удовлетворяется. Селективное влияние примеси на турбулентную энергию иллюстрируется рис. 2, *a*. Из рис. 2, *b* видно, что существенное подавление турбулентной энергии частицами наблюдается в диапазоне чисел Стокса $\text{St}^{(0)} \sim 10$. На рис. 3 представлено сопоставление результатов расчета по нашей модели с данными DNS для вырождающейся турбулентности [4]. Как замечено в [2,5], в численном эксперименте в отличие от физического состояние изотропности устанавливается заметно медленнее. Этим объясняется отличие результатов расчета по стандартной E – ε -модели от данных DNS при $\langle G \rangle = 0$ (линии 1). Поэтому можно говорить только о качественном согласии результатов моделирования. В следующих публикациях будут представлены исследование влияния частиц на спектральный состав турбулентности неизотермического газа и сопоставление с экспериментом.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

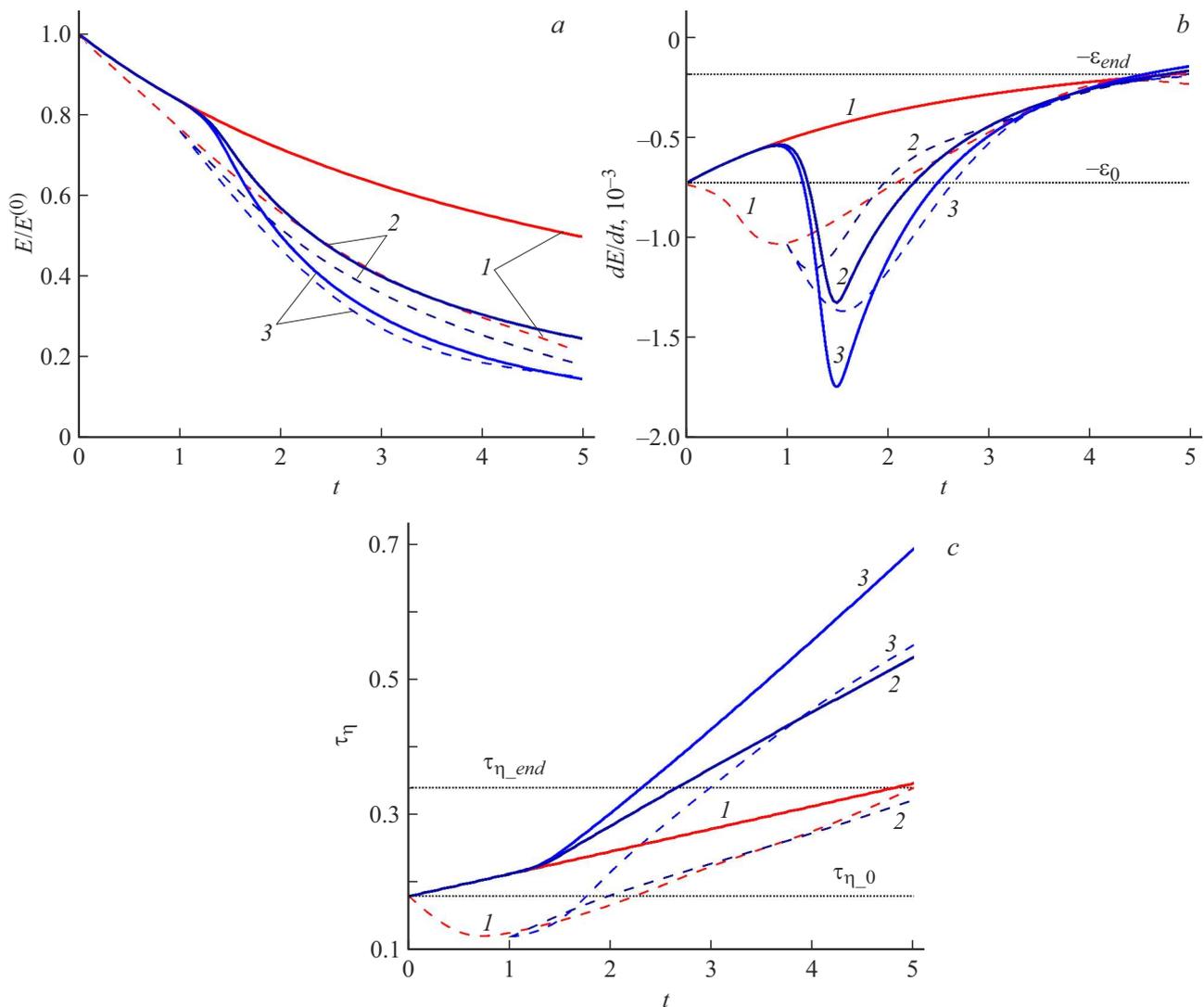


Рис. 3. Сравнение результатов расчета по модели (12), (13) (сплошные линии) турбулентной энергии (а), скорости изменения турбулентной энергии (б) и временного микромасштаба Колмогорова (с) с данными DNS [4] (штриховые линии). Пунктирными линиями показаны начальные и конечные значения параметров из работы [4]. Кривые 1 получены при $\langle G \rangle = 0$, кривые 2, 3 — при $\langle G \rangle = 1$: $St^{(0)} = 1$ (2) и 5 (3).

Список литературы

- [1] K.D. Squires, J.K. Eaton, *J. Fluids Eng.*, **116** (4), 778 (1994). DOI: 10.1115/1.2911849
- [2] M. Boivin, O. Simonin, K.D. Squires, *J. Fluid Mech.*, **375**, 235 (1998). DOI: 10.1017/S0022112098002821
- [3] S. Sundaram, L.R. Collins, *J. Fluid Mech.*, **379**, 105 (1999). DOI: 10.1017/S0022112098003073
- [4] A. Ferrante, S. Elghobashi, *Phys. Fluids*, **15** (2), 315 (2003). DOI: 10.1063/1.1532731
- [5] G. Mallouppas, W.K. George, B.G.M. van Wachem, *Int. J. Heat Fluid Flow*, **67** (B), 74 (2017). DOI: 10.1016/j.ijheatfluidflow.2017.07.006
- [6] M. Fistler, A. Kerstein, D.O. Lignell, M. Oevermann, *Phys. Rev. Fluids*, **5**, 044308 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevFluids.5.044308
- [7] S.E. Elghobashi, T.W. Abou-Arab, *Phys. Fluids*, **26**, 931 (1983). DOI: 10.1063/1.864243
- [8] A.Yu. Varaksin, S.V. Ryzhkov, *Symmetry*, **14**, 2433 (2022). DOI: 10.3390/sym14112433
- [9] R.J. Driscoll, L.A. Kennedy, *Phys. Fluids*, **26**, 1228 (1983). DOI: 10.1063/1.864272
- [10] И.В. Деревич, А.К. Ключков, *Математика и математическое моделирование*, № 1, 33 (2020). DOI: 10.24108/mathm.0120.0000215