

## О потерях электроосмотического излучателя в жидкости и в воздухе

© Б.П. Шарфарец, В.Е. Курочкин

Институт аналитического приборостроения РАН,  
198095 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: lavrovas@yandex.ru

Поступило в Редакцию 13 августа 2025 г.  
В окончательной редакции 18 декабря 2025 г.  
Принято к публикации 18 декабря 2025 г.

Рассмотрены вязкие и джоулевы потери, сопровождающие электроосмотический процесс в воде и в воздухе. В качестве физической модели выбран цилиндрический капилляр с открытыми концами, помещенный в воду или воздух и заполненный окружающей его жидкостью. Рассмотрена модель вязкой несжимаемой жидкости. Отмечена правомерность подобного приближения. Показано, что электроосмотические потери имеют ряд особенностей по сравнению с другими процессами движения жидкости в пористых средах. Проведены сравнительные расчеты указанных потерь в обоих средах.

**Ключевые слова:** электрокинетические излучатели, капилляр, наполненный жидкостью, вязкая несжимаемая жидкость, вязкие потери, джоулевы потери, сравнительная оценка потерь в воздухе и жидкой среде.

DOI: 10.61011/JTF.2026.04.62668.210-25

### Введение

В предыдущей работе авторов [1] рассматривался вопрос сравнительной оценки эффективности электроакустического преобразования в различных средах (в частности, в воде и в воздухе). Однако при этом не учитывались диссипативные потери, которыми неизбежно сопровождаются подобные преобразования. В настоящей работе также рассматривается функционирование электрокинетического излучателя в вязкой, воздушной и жидкой средах. Однако здесь учитываются диссипативные потери.

В настоящей работе вновь принята модель излучателя в виде цилиндрического капилляра с открытыми концами, погруженного в жидкость и заполненного той же жидкостью. К торцам капилляра подается суммарное электрическое поле, состоящее из суммы постоянного и гармонического электрических потенциалов. Однако здесь уже рассматривается диссипация энергии, сопровождающая процесс электроакустического преобразования в электрокинетическом излучателе в воздушной и жидкой средах. При этом с помощью диссипативной функции Рэлея учитывается вязкая диссипация, а также диссипация, вызванная типичными для электрокинетических преобразователей потерями, связанными с законом Джоуля–Ленца при протекании электрического тока по электропроводящей среде.

### 1. Основные уравнения

Для получения необходимых результатов приведем необходимые далее уравнения. Закон сохранения энергии для вязкой жидкости учитывается дифференциальным уравнением энергии [2]. В частности, для сжимае-

мой вязкой жидкости это уравнение имеет вид

$$\rho \frac{du}{dt} = \varepsilon + \nabla(\lambda \nabla T) - p \nabla \mathbf{v} + \Phi, \quad (1)$$

где  $u$  — удельная внутренняя энергия;  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$  — плотность, температура и давление жидкости соответственно;  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  — поле скоростей жидкости, определяемое системой уравнений Навье–Стокса;  $\Phi$  — диссипативная функция Рэлея;  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $\varepsilon$  — количество теплоты, поступающей в единицу объема жидкости за единицу времени вследствие излучения или каких-либо иных причин, кроме теплопроводности, например, химических реакций (не путать далее с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ ). Отметим, что величины  $\varepsilon$  и  $\Phi$  имеют размерность  $[\varepsilon] = [\Phi] = \text{W/m}^3$ , т.е. мощности в единицу объема и характеризуют соответствующие потери.

Поскольку в дальнейшем, после обоснования такого перехода, будет рассматриваться только несжимаемая жидкость, ниже приведена версия уравнения энергии (1) для несжимаемой жидкости [2]:

$$c\rho \frac{dT}{dt} = \varepsilon + \nabla(\lambda \nabla T) + \Phi, \quad (2)$$

где  $c$  — удельная теплоемкость жидкости;  $\rho$  — плотность несжимаемой жидкости;  $\frac{dT}{dt}$  — конвективная производная температуры.

Далее в настоящей работе интенсивно используется диссипативная функция Рэлея  $\Phi$ . Поскольку здесь рассматривается только несжимаемая жидкость, приведем соответствующую ей версию диссипативной функции  $\Phi$  в декартовых координатах [3]:

$$\Phi = \eta [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)].$$

Здесь  $\varepsilon_{ik}$  — компоненты тензора скоростей деформации;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости. В декартовых координатах компоненты  $\varepsilon_{ik}$  тензора определяется выражением

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right).$$

Обозначим через  $\mathbf{D}$  тензор скоростей деформации с компонентами  $(\varepsilon_{ik})$ . После проведения операции двойной свертки тензора  $\mathbf{D}$  (получаем его скалярный квадрат  $\mathbf{D} : \mathbf{D}$ ):

$$\mathbf{D} : \mathbf{D} = \sum_{i,k} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{ik} = [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + \varepsilon_{33}^2 + 2(\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)],$$

и сравнения этого выражения с диссипативной функцией  $\Phi$ , приведенной выше, получаем в операторном виде выражение для диссипативной функции Рэлея в терминах тензора скоростей деформации в декартовых координатах

$$\Phi = \eta \mathbf{D} : \mathbf{D}.$$

Далее перейдем к решению анонсированной задачи в цилиндрических координатах. Для этого учтем следующее замечание о том, что, если бы величина  $\Phi$  зависела от системы координат, то это означало бы, что количество тепла, выделяющегося в точке, меняется от способа записи уравнений, что противоречит физическому смыслу.

Вследствие цилиндрической симметрии рассматриваемой задачи понадобится версия тензора скоростей деформации в цилиндрической системе координат, представленная, например, в работе [4] (формулы адаптированы к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ ):

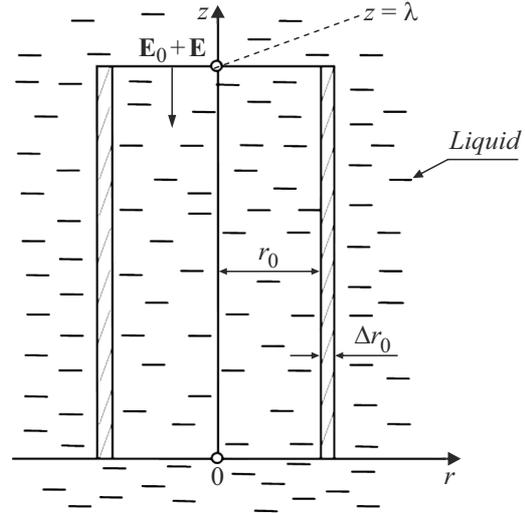
$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{r}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}, \quad \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right),$$

$$\varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} \right).$$

После проведения операции двойной свертки над компонентами тензора скоростей деформации получаем диссипативную функцию Рэлея в цилиндрической системе координат:

$$\Phi = \eta \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + v_r \right)^2 + \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \\ & + 2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r} \right) \right)^2 \\ & + 2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial z} \right) \right)^2 \end{aligned} \right]. \quad (3)$$



Изображение процесса электроосмоса в открытом цилиндрическом капилляре, расположенном в безграничной жидкости.

В (1) и (2) следует обратить внимание на слагаемое  $\varepsilon$  с размерностью  $W/m^3$ . Величина подразумевает какие-либо потери энергии, отличные от вязких потерь Рэлея. К таким, имеющим место в настоящей работе, потерям будут отнесены потери за счет джоулева нагрева жидкости в капилляре, возникающие вследствие приложения к торцам капилляра переменного и постоянного электрических полей. Таким образом, в настоящей работе будут рассмотрены два вида потерь: потери за счет джоулева нагрева и вязкие потери.

## 2. Физическая модель процесса

Вновь, как и в [1], рассматривается цилиндрический капилляр, заполненный несжимаемой вязкой жидкостью. В безграничную однородную вязкую несжимаемую жидкость (воду или воздух) помещен цилиндрический стеклянный капилляр с открытыми торцами длиной  $l$ , радиусом  $r_0$  и толщиной стенки  $\Delta r_0$ , также заполненный окружающей жидкостью. К торцам капилляра приложено электрическое поле, состоящее из суммы постоянного электрического поля напряженностью  $E_0$  и амплитудой  $E_0$  и переменного гармонического поля напряженностью  $E$ , амплитудой  $E$ . Под воздействием суммарного электрического поля внутри капилляра реализуется электроосмотический процесс, описанный ранее в работе [1] и других работах авторов. Схема физического процесса отображена на рисунке.

## 3. Гидродинамическая модель электроосмотического излучателя

В работе [1] приведена аргументация возможности описания процессов электроакустического преобразования в рамках модели вязкой несжимаемой жид-

кости. Здесь выпишем соответствующие уравнения Навье–Стокса и уравнение непрерывности применительно к цилиндрической системе координат [5–9].

Как будет показано ниже, для несжимаемой жидкости в случае электроосмотического течения при больших значениях электрокинетического радиуса, вдоль цилиндрического капилляра с осью, ориентированной вдоль оси  $Oz$ , имеющего постоянную скорость  $\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_{0z})$  и переменную скорость  $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$ , а также постоянное и переменное давление  $p_\Sigma = p_0 + p$ , единственная отличная от нуля  $z$ -составляющая уравнения Навье–Стокса имеет вид [6,7]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + (v_z + v_{0z}) \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) + F_z / \rho. \quad (4)$$

Кроме того, должно выполняться уравнение непрерывности, которое в данном случае имеет вид [8]:

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \quad (5)$$

В (4) величина  $\nu = \eta / \rho$  — кинематическая вязкость жидкости;  $\rho = \text{const}$  — плотность несжимаемой жидкости;  $F_z$  — пондеромоторная сила, равная, в случае однородных электрических параметров жидкости [8,10],  $F_z = \rho_{el} \mathbf{E} = \rho_{el} E_z$ . Здесь  $\rho_{el}$  — плотность электрического заряда. Учитывая, что в электрическом поле присутствует две составляющие:  $E_z = E_{z0} + E_{z\sim}$ , правая часть в (1) имеет вид

$$\frac{F_z}{\rho} = \frac{E_{z0}}{\rho} + \frac{E_{z\sim}}{\rho}.$$

Кроме того, уравнение (4) является нелинейным, вследствие чего возникает так называемый режим накачки, описанный ранее в [11].

Из уравнения (4) видно, что при наличии постоянного течения вдоль оси  $z$  присутствует режим накачки, заключающийся во влиянии постоянной скорости течения  $v_0$  на переменную скорость течения и переменное давление [11].

К уравнениям (4) и (5) необходимо добавить краевые условия. В работе [6] краевые условия на боковых границах капилляра  $r = r_0$  и на его оси  $r = 0$  записываются следующем образом:

$$v_z(r = r_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial v_z}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Однако здесь целесообразнее поставить другие краевые условия. Речь идет об электроосмотическом феномене, который заключается в следующем. При больших значениях электрокинетического радиуса  $r_0 / \lambda \gg 1$ , где  $r_0$  — радиус капилляра,  $\lambda$  — толщина двойного электрического слоя (длина Дэбая), в капилляре при возникновении электроосмоса образуется практически поршневое движение жидкости вдоль оси капилляра, т.е. составляющие скорости жидкости  $v_r = 0$  и  $v_\phi = 0$ , а отлична от нуля

только скорость  $v_z$ , и она зависит только от осевой координаты  $z$  (т.е.  $v_z = v_z(z)$ ). Об этом будет подробнее сказано ниже. На основании этого замечания можно поставить следующее краевое условие проскальзывания на боковой поверхности капилляра:

$$v_{0z}(r_0) = U_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi}{\eta} E_0, \quad v_z(r_0) = u_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi}{\eta} E. \quad (6)$$

Здесь  $U_{eo}$  — электроосмотическая скорость при приложении постоянного поля электрической напряженности  $E_0$ ;  $u_{eo}$  — электроосмотическая скорость при приложении переменного поля электрической напряженности  $E$ ;  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_0$  — относительная диэлектрическая проницаемость и электрическая постоянная соответственно;  $\xi$  — дзета-потенциал.

#### 4. Джоулевы потери в капилляре

Электроосмотический процесс сопровождается джоулевым нагревом, обусловленным протеканием в жидкости электрического ионного тока, вызванного приложенным внешним электрическим полем. Закон Джоуля–Ленца при его дифференциальном описании формулируется так [12]: „Мощность тепла в единице объема  $q$  ( $[q] = \text{W/m}^3$ ) пропорциональна квадрату плотности электрического тока  $\mathbf{j}$  и обратно пропорциональна удельной проводимости среды“. Или, в формальном виде

$$q = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2.$$

(именно эта величина фигурирует в уравнении (1) и (2) под символом  $\varepsilon$ , т.е.  $\varepsilon = q$ ).

В такой форме закон Джоуля–Ленца носит общий характер, т.е. не зависит от природы сил, возбуждающих электрический ток. Кроме того, это справедливо как для переменных, так и для постоянных токов [3]. Отметим, что  $q$  имеет размерность мощности тепла в единице объема  $[q] = \text{W/m}^3$ .

Далее для решения задач настоящей работы перепишем закон Джоуля–Ленца в несколько измененном виде. Для этого воспользуемся законом Ома [12], гласящим, что вектор плотности электрического тока  $\mathbf{j}$  пропорционален напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$ :

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}.$$

Объединяя закон Джоуля–Ленца и закон Ома, получаем закон Джоуля–Ленца в следующем виде:

$$q = \frac{1}{\sigma} \mathbf{j}^2 = \sigma \mathbf{E}^2. \quad (7)$$

Вектор  $\mathbf{E}$  далее может быть как постоянным, так и переменным. В первом случае он, как отмечено выше, будет обозначаться  $\mathbf{E}_0$ , во втором —  $\mathbf{E}$ . Далее будем пользоваться законом Джоуля–Ленца в виде (7).

Рассмотрим вначале постоянное электрическое поле  $\mathbf{E}_0$ . Тогда (7) дает для мощности тепла  $q_0$ , вызванного постоянным электрическим полем:

$$q_0 = \sigma E_0^2 = \sigma \frac{U_0^2}{l^2}, \quad (8)$$

где  $U_0$  — постоянное напряжение накачки, подаваемое к торцам капилляра;  $l$  — длина капилляра.

Если рассматривается случай гармонической зависимости электрического поля  $E \cos \omega t$ ,  $E = \text{const}$ , то (8) преобразуется к виду

$$q_{\sim} = \sigma E^2 \cos^2 \omega t = \sigma \frac{U^2}{l^2} \cos^2 \omega t. \quad (9)$$

Учитывая тождество

$$\cos^2(\omega t) = \frac{\cos(2\omega t) + 1}{2},$$

приводим (9) к виду

$$q_{\sim} = \sigma \frac{(U/l)^2 (\cos(2\omega t) + 1)}{2}.$$

Из последнего равенства видно, что среднее значение мощности тепла в единице объема за период колебаний равно

$$\bar{q}_{\sim} = \sigma \frac{(U/l)^2}{2}, \quad (10)$$

а его амплитуда  $\bar{q}_{\sim}$  в случае гармонического напряжения при  $U = U_0$  вдвое меньше соответствующего значения для постоянного тока (8).

После этого можно записать суммарную мощность джоулевых потерь  $Q$  в объеме капилляра, вызванную протеканием постоянного и переменных токов в жидкости капилляра, учитывая величины мощности потерь постоянного (7) и гармонического (10) токов:

$$Q_0 + Q_{\sim} = \sigma \pi r_0^2 l \left( \frac{U_0^2}{l^2} + \frac{1}{2} \frac{U^2}{l^2} \right) = \frac{\sigma \pi r_0^2}{l} \left( U_0^2 + \frac{1}{2} U^2 \right). \quad (11)$$

Здесь  $\pi r_0^2 l$  — объем капилляра.

Согласно общедоступным данным, удельная электрическая проводимость обычной водопроводной воды (с солями и минералами):  $\sigma_{\text{water}} = 10^{-4} - 10^{-3}$  S/m, удельная электрическая проводимость влажного воздуха  $\sigma_{\text{air}} = 10^{-13} - 10^{-10}$  S/m (обычные комнатные условия).

Таким образом, согласно (11), потери на джоулево тепло в воздухе на 7–9 порядков меньше, чем в воде.

## 5. Диссипация Рэлея. О вязкой диссипации в цилиндрическом капилляре при электроосмотическом течении

Согласно [10], электроосмотическая скорость (как  $U_0$ , так и  $u_0$ ) в цилиндрическом капилляре, ориентированном вдоль оси  $z$ , при большом электрокинетическом радиусе  $r_0/\lambda_D \gg 1$ , имеет одну отличную от нуля

составляющую, которая зависит только от текущего радиуса  $r$

$$v_z(r) = \left[ 1 - \frac{I_0(r/\lambda_D)}{I_0(r_0/\lambda_D)} \right] V_{eo}, \quad (12)$$

где  $r_0$  — радиус капилляра;  $I_0$  — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка;  $\lambda_D$  — толщина двойного электрического слоя (длина Дэбая);

$$V_{eo} = U_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi}{\eta} E_0$$

— амплитуда постоянной электроосмотической скорости, вызванной постоянным электрическим полем  $E_0$ , и

$$V_{eo} = u_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi}{\eta} E$$

— амплитуда переменной электроосмотической скорости, вызванной переменным электрическим полем  $E$  [10].

Отметим, однако, что при достаточно больших значениях электрокинетического радиуса  $r_0/\lambda_D$ , согласно [10], конкретно при  $r_0/\lambda_D \geq 100$  равенство (12) может быть заменено приближенным равенством  $v_z(r) \approx V_{eo}$  при  $0 \leq r \leq r_0$ . Таким образом, электроосмотическое течение и при переменной, и при постоянной скорости течения принимает поршневой характер, т.е. не зависит от текущего радиуса капилляра и от текущего полярного угла по всему поперечному сечению. Типовая величина радиуса Дэбая  $\lambda_D$  для воды имеет порядок единиц нанометров; например в [10] приведена величина  $\lambda_D \approx 10^{-8}$  м. Радиус капилляра в предыдущей близкой по тематике работе авторов [1], составлял  $r_0 = 10^{-5}$  м, тогда  $r_0/\lambda_D = 1000$ . Так что условие  $r_0 > 100\lambda_D$  заведомо выполняется.

В этих условиях постоянная скорость течения  $U_0$  имеет практически только продольную  $z$ -компоненту  $\mathbf{U}_0 = (0, 0, U_{eo})$  (см. рис. 9.2(a) в [10]). Остальные компоненты скорости равны нулю. Аналогичный вывод можно сделать и относительно переменной скорости  $\mathbf{u} = (0, 0, u_{eo}(z))$ , где  $u_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi}{\eta} E$ ,  $E$  — напряженность переменного электрического поля. Это обоснованно позволяет предположить при этих условиях наличие в капилляре практически постоянных по поперечному сечению как постоянной электроосмотической скорости  $\mathbf{U}_0$ , так и переменной электроосмотической скорости  $\mathbf{u} = (0, 0, u_{eo}(z))$  с единственной отличной от нуля  $z$ -составляющей  $u_{eo}(z)$ .

Далее рассмотрим характер вязких потерь, возникающих в капилляре в случае протекания в нем жидкости со скоростями  $\mathbf{U}_0 = (0, 0, U_{eo})$  и

$$\tilde{u}_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi}{\eta} E \cos(\omega t - kz) = u_{eo} \cos(\omega t - kz),$$

т.е. постоянного течения со скоростью  $U_0$  и переменного гармонического течения со скоростью  $\tilde{u}_{eo} = u_{eo} \cos(\omega t - kz)$ . Для этого рассмотрим диссипативную функцию Рэлея (3) для рассматриваемого случая.

## 6. Диссипация, вызванная вязким трением в несжимаемой жидкости в капилляре

Рассмотрим диссипацию энергии в капилляре, обусловленную вязким трением. Для этого воспользуемся соответствующей диссипативной функцией Рэлея (3).<sup>1</sup>

Как видно из выражения для диссипативной функции (3), диссипация для постоянной скорости  $U_0 = \text{const}$  равна нулю, так как все слагаемые в (3) при подстановке в них  $U_0 = \text{const}$  обнуляются. Отсюда следует важный вывод о том, что постоянное электроосмотическое течение в рассматриваемом цилиндрически симметричном случае движется без вязких потерь.

Рассмотрим далее переменную скорость жидкости в капилляре  $\tilde{u}_{eo} = u_{eo} \sin(\omega t - kz)$ . Диссипативная функция в этом случае равна (см. (3)).

$$\Phi_R = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2.$$

Подставляя в нее значение скорости  $\tilde{u}_{eo}$ , получаем окончательное выражение для диссипативной функции

$$\Phi_R = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 = \frac{\eta}{2} u_{eo}^2 k^2 \cos^2(\omega t - kz). \quad (13)$$

Как видно из (13), потери энергии носят квазигармонический характер; мощность диссипации зависит от вязкости жидкости  $\eta$ , от квадрата амплитуды переменной электроосмотической скорости  $u_{eo}$ , от квадрата угловой частоты  $\omega$  (через волновое число  $k = \omega/c$ , где  $\omega$  — угловая частота) и обратно пропорционально — от квадрата скорости звука в среде  $c$ . Максимальная диссипация происходит при прохождении волны через положение равновесия ( $\omega t = kz$ ). Функция  $\cos^2(\omega t - kz)$  при фиксированном значении  $kz$  является периодической функцией времени  $t$  с периодом  $\pi$ . Среднее значение интеграла от функции  $\cos^2(\omega t - kz)$  на величине периода исходного колебания

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{есть} \quad \overline{\cos^2(\omega t - kz)} = \frac{1}{2}.$$

<sup>1</sup> Отметим, что в работе [8] также рассматривается диссипация энергии в несжимаемой жидкости. Для скорости убывания кинетической энергии в некотором объеме  $V$  несжимаемой жидкости представлено следующее выражение:

$$\frac{\partial E_{kin}}{\partial t} = -\frac{\eta}{2} \int_V \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 dV, \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Здесь  $(\partial E_{kin})/\partial t$  — скорость убывания кинетической энергии в единицу времени в объеме  $V$ ;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости. Таким образом, выражение

$$\Phi_E = \frac{\eta}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2$$

представляет собой в декартовых координатах диссипативную функцию Рэлея для вязких потерь в несжимаемой жидкости с размерностью  $[W/m^3]$ .

Поэтому выражение (13) в осредненном по времени варианте можно переписать в виде

$$\overline{\Phi}_R = \frac{\eta}{4} \left( \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 = \frac{\eta}{4} u_{eo}^2 k^2. \quad (14)$$

Диссипативная функция, как известно, имеет размерность  $[W/m^3]$ . Поэтому, если рассматривать потери в объеме цилиндрического капилляра в целом, то общая мощность потерь определяется интегрированием (14) по всему объему капилляра

$$\overline{\Phi}_{R\Sigma} = \frac{\eta}{4} u_{eo}^2 k^2 \pi r_0^2 L. \quad (15)$$

У функции  $\overline{\Phi}_{R\Sigma}$  уже будет размерность  $[W]$ , т.е. эта функция характеризует мощность потерь в капилляре в целом. Распишем в последней формуле амплитуду электроосмотической скорости  $u_{eo}$ :

$$u_{eo} = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi E}{\eta}.$$

Здесь  $u_{eo}$  — амплитуда электроосмотической скорости;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды;  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная;  $\eta$  — динамическая вязкость среды. Тогда (15) переписывается в виде

$$\Phi_{R\Sigma} = \frac{\eta}{4} \left( \frac{\varepsilon \varepsilon_0 \xi E}{\eta} \right)^2 k^2 \pi r_0^2 L = \frac{1}{4\eta} (\varepsilon \varepsilon_0 \xi E)^2 k^2 \pi r_0^2 L. \quad (16)$$

Найдем отношение мощности вязких потерь (16) в воде  $\Phi_{\text{water}}$  по отношению к воздуху  $\Phi_{\text{air}}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{\text{water}}}{\Phi_{\text{air}}} &= \frac{\frac{1}{4\eta_{\text{water}}} (\varepsilon_{\text{water}} \varepsilon_0 \xi E)^2 \frac{\omega^2}{c_{\text{water}}^2} \pi r_0^2 L}{\frac{1}{4\eta_{\text{air}}} (\varepsilon_{\text{air}} \varepsilon_0 \xi E)^2 \frac{\omega^2}{c_{\text{air}}^2} \pi r_0^2 L}} \\ &= \frac{\eta_{\text{air}}}{\eta_{\text{water}}} \left( \frac{\varepsilon_{\text{water}} \varepsilon_0 \xi E}{\varepsilon_{\text{air}} \varepsilon_0 \xi E} \right)^2 \frac{c_{\text{air}}^2}{c_{\text{water}}^2} \\ &= \frac{\eta_{\text{air}}}{\eta_{\text{water}}} \left( \frac{\varepsilon_{\text{water}}}{\varepsilon_{\text{air}}} \right)^2 \frac{c_{\text{air}}^2}{c_{\text{water}}^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставляя в (17) значения

$$\eta_{\text{air}} = 18.2 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}, \quad \eta_{\text{water}} = 0.00101 \text{ Pa} \cdot \text{s},$$

$$\varepsilon_{\text{air}} = 1.0006, \quad \varepsilon_{\text{water}} = 80.4,$$

$$c_{\text{air}} = 340 \text{ m/s}, \quad c_{\text{water}} = 1500 \text{ m/s},$$

получаем  $\Phi_{\text{water}}/\Phi_{\text{air}} = 5.913$ .

Таким образом, при реализации электрокинетического процесса мощность вязких потерь в воде почти в 6 раз выше, чем в воздухе.

## Выводы

В работе приведены все необходимые уравнения для сравнительной оценки основных потерь, сопровождающих работу электроосмотического излучателя в воде и в воздухе. Рассматриваются потери за счет вязкого трения и джоулевы потери. В результате расчетов получены следующие результаты. Показано, что при больших значениях электрокинетического радиуса отсутствуют вязкие потери при равномерном (под воздействием постоянного электрического поля) электроосмотическом движении жидкости вдоль капилляра. Движение жидкости вдоль капилляра носит специфичный поршневой характер как для переменной скорости движения, так и для его постоянной скорости. Рассмотрено соотношение джоулевых потерь в воде и воздухе. Установлено, что потери на джоулево тепло в воздухе на 7–9 порядков меньше, чем в воде. Кроме того, сравнивались значения вязких потерь в воде и в воздухе. Показано также, что мощность вязких потерь в воде почти в 6 раз выше, чем в воздухе. Полученные результаты необходимо учитывать при проектировании электроосмотических преобразователей.

## Финансирование работы

Работа выполнена в ИАП РАН в рамках Государственного задания Министерства науки и высшего образования РФ № 075-00444-25-00 (от 26.12.2024 г.).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] Б.П. Шарфарец, В.Е. Курочкин. ЖТФ, **95** (1), 143 (2025).
- [2] Б.М. Яворский, А.А. Детлаф, А.К. Лебедев. *Справочник по физике для инженеров и студентов вузов* (Оникс. Мир и Образование, М., 2006, 8 изд.)
- [3] А.М. Прохоров (ред.) *Физическая энциклопедия* (Советская энциклопедия, М., 1988), т. 1.
- [4] Дж. Бэтчелор. *Введение в динамику жидкости* (Мир, М., 1973)
- [5] Б.П. Шарфарец. Научное приборостроение, **35** (2), 97 (2025).
- [6] S. Levine, J.R. Marriott, G. Neale, N. Epstein. *J. Colloid and Interface Sci.*, **1**, 136 (1975).
- [7] C.L. Rice, R. Whitehead. *J. Phys. Chem.*, **69**(11), 4017 (1965).
- [8] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика* (Наука, М., 1986), изд. 3-е, перераб.
- [9] Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе. *Теоретическая гидродинамика* (ГИФ, М.-Л., 1963), ч. 2.
- [10] H. Bruus. *Theoretical Microfluidics. Oxford master series in condensed matter physics* (Oxford University Press, Oxford, UK)

- [11] Б.П. Шарфарец, В.Е. Курочкин, В.А. Сергеев, Ю.В. Гуляев. *Акуст. журн.*, **66** (4), 453 (2020).
- [12] Д.В. Сивухин. *Общий курс физики. Т. III. Электричество* (Наука, М., 1983), изд. 2-е, испр.