

07

## Асимптотические решения уравнений для $P$ - и $Q$ -распределений в модели одноатомного лазера с некогерентной накачкой

© Н.В. Ларионов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный морской технический университет, Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: larionov.nickolay@gmail.com

Поступила в редакцию 31.05.2025 г.

В окончательной редакции 07.11.2025 г.

Принята к публикации 11.11.2025 г.

На основе уравнений для усреднённых по фазе  $P$ - и  $Q$ -распределений исследован стационарный режим работы одноатомного лазера с некогерентной накачкой. Показано, что в условиях существования „полуклассического“ решения в этих уравнениях появляется большой параметр, позволяющий получить их приближённые решения. Последние содержат в себе основные асимптотические решения, полученные ранее, и описывают работу одноатомного лазера на двух характерных масштабах задачи — „линейном“, когда одноатомный лазер может генерировать как обычный лазер, и „квадратичном“, когда существенно проявляется ферми-статистика одиночного атома. При этом показано, что для введённого „линейного“ масштаба задачи  $P$ -распределение одноатомного лазера совпадает с соответствующим распределением для лазера на макроскопическом числе излучателей. Уточнены условия выхода на беспороговый режим работы одноатомного лазера.

**Ключевые слова:** одноатомный лазер, квазивероятностные распределения, режим сильной связи, субпуассоновская статистика, двухуровневый атом, беспороговый режим генерации.

DOI: 10.61011/OS.2026.01.62614.8230-25

### 1. Введение

Одной из фундаментальных моделей квантовой оптики является модель одноатомного лазера [1–24]. Простейшая вариация этой модели представлена двухуровневым атомом с некогерентной накачкой, взаимодействующим с одной затухающей модой резонатора.

Для данной модели известно стационарное решение для внутрирезонаторной интенсивности [1] (будем называть это решение „полуклассическим“), которое демонстрирует отличительную особенность одноатомного лазера: квадратичную зависимость внутрирезонаторной интенсивности от параметра накачки, описывающую переход к самотушению после насыщения.

Часть работ, посвящённых изучению одноатомного лазера, основывается на анализе уравнения для оператора плотности, записанного в представлении по когерентным состояниям. Так, авторы в [9,10,14,15,19,23], рассматривая различные предельные случаи стационарного режима работы лазера, находят приближённые выражения для усреднённых по фазе  $P$ -распределения Глаубера–Сударшана и  $Q$ -распределения Хусими (далее  $P$ - и  $Q$ -распределения). Полученные распределения дополняют „полуклассическое“ решение, в частности, описывая переход к беспороговому режиму генерации в случае сильной связи „атом–поле“ и субпуассоновскую статистику поля. При этом  $P$ -распределение в основном

представлено неаналитическими функциями с ограниченной областью определения.

Отличия в подходах у разных авторов несущественны и заключаются в том, что в одном случае [9,10] анализируется система дифференциальных уравнений первого порядка для различных вспомогательных распределений (условных вероятностей), а в другом [14,23] проводится анализ одного дифференциального уравнения либо для  $P$ -распределения, либо для  $Q$ -распределения.

В условиях существования „полуклассического“ решения дифференциальное уравнение для  $P$ -распределения [14] представляет собой уравнение с малым параметром при старшей производной. Решение, которое было найдено в [14], с точки зрения теории возмущений можно интерпретировать как решение порождающего уравнения, которое также называется ВКБ-приближением [25]. С его помощью было исследовано поведение одноатомного лазера в широком диапазоне значений параметра накачки, а также более точно описан случай режима высокочастотного резонатора, ранее рассмотренный в работе [9].

В настоящей работе будет показано, что случай предельной сильной связи „атом–поле“ (соответствующая константа во много раз больше всех остальных скоростных констант), рассмотренный в [10], также описывается решением из [14]. При этом будет найдено дополнительное условие, при выполнении которого это

решение совпадёт с решением для обычного лазера с макроскопическим числом излучателей [26].

Отдельно будет проведен анализ поведения одноатомного лазера вблизи полуклассического порога. Последовательно рассмотрен переход к беспороговому режиму работы лазера при переходе от случая слабой связи „атом–поле“ к соответствующему случаю предельной сильной связи.

В работах [19,23], так же как и в [14], выводится одно замкнутое дифференциальное уравнение для  $Q$ -распределения. В условиях существования „полуклассической“ интенсивности находится его приближённое решение [23], позволяющее повторить результаты из [14], а для случая сильной связи „атом–поле“ описать слабую субпуассоновскую статистику фотонов в резонаторе, предсказанную ранее в [12]. При этом  $P$ -распределение из [14] в силу своих квазивероятностных свойств не позволяло описать эту особенность.

Однако полученное выражение для  $Q$ -распределения [23] не охватывает случай предельной сильной связи „атом–поле“ [10]. Поэтому в настоящей работе отдельно будет уделено внимание нахождению связи между решениями из [10] и [23].

Структура статьи следующая. Во втором разделе представлена теоретическая модель одноатомного лазера. Приведены исходные уравнения для усреднённых по фазе  $P$ - и  $Q$ -распределений и оговорены условия, при которых они анализируются. Дальнейшие разделы посвящены выделению малого параметра в этих уравнениях, нахождению и анализу соответствующих асимптотических решений. В последнем разделе даны выводы. В приложения вынесены некоторые громоздкие формулы и коэффициенты из уравнений.

## 2. Теоретическая модель

Уравнение для оператора плотности  $\hat{\rho}$  одноатомного лазера имеет следующий вид [27]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = & -\frac{i}{\hbar}[\hat{V}, \hat{\rho}] + \frac{\kappa}{2}(2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}) \\ & + \frac{\gamma}{2}(2\hat{\sigma}\hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger - \hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\sigma}) \\ & + \frac{\Gamma}{2}(2\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho}\hat{\sigma} - \hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger\hat{\rho} - \hat{\rho}\hat{\sigma}\hat{\sigma}^\dagger). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $\hat{a}$  и  $\hat{a}^\dagger$  — операторы уничтожения и рождения фотона в моде резонатора,  $\hat{\sigma} = |1\rangle\langle 2|$  и  $\hat{\sigma}^\dagger = |2\rangle\langle 1|$  — операторы атомных переходов, где  $|1\rangle, |2\rangle$  — векторы основного и возбуждённого состояний атома соответственно.

Первое слагаемое в (1) описывает взаимодействие моды резонатора с двухуровневым атомом согласно гамильтониану Джейнса–Каммингса с константой взаимодействия  $g$ :

$$\hat{V} = i\hbar g (\hat{a}^\dagger\hat{\sigma} - \hat{\sigma}^\dagger\hat{a}). \quad (2)$$

Второе и третье слагаемые учитывают затухание резонаторной моды со скоростью  $\kappa/2$  и спонтанный распад атома со скоростью  $\gamma/2$  соответственно. Последнее слагаемое связано с некогерентной накачкой атома с нижнего уровня  $|1\rangle$  на верхний  $|2\rangle$  со скоростью  $\Gamma/2$ .

Для описания работы одноатомного лазера введём следующие три безразмерных параметра:  $r = \Gamma/\gamma$  — скорость накачки,  $I_s = \gamma/\kappa$  — коэффициент насыщения и  $c = 4g^2/\kappa\gamma$  — константа связи (кооперативный параметр).

### 2.1. Уравнения для усреднённых по фазе $P$ - и $Q$ -распределений

Как было показано в [14,19,23], из уравнения (1) в стационарном случае можно получить линейные однородные дифференциальные уравнения с полиномиальными коэффициентами для усреднённых по фазе  $P$ - и  $Q$ -распределений.

Так, для  $P$ -распределения это уравнение второго порядка:

$$\sum_{v=0}^2 p_{2-v}(I)P^{(v)}(I) = 0, \quad (3)$$

где принято обозначение  $P^{(v)}(I) \equiv d^v P(I)/dI^v$ , и распределение зависит только от переменной интенсивности  $I = |z|^2$ , являющейся квадратом модуля комплексного числа  $z = \sqrt{I}e^{i\varphi}$ .

Полиномы в (3) имеют вид

$$\begin{aligned} p_0(I) &= I^2(I - I_0), \\ p_1(I) &= a_{12}(I - I_{-1})(I - I_{+1}), \\ p_2(I) &= a_{22}(I - I_{-2})(I - I_{+2}), \end{aligned} \quad (4)$$

где корни полиномов  $I_0, I_{\pm 1, \pm 2}$  и коэффициенты  $a_{12}, a_{22}$  зависят от параметров лазера  $r, I_s, c$ . Записи полиномов в своем каноническом виде  $(a_{i0} + a_{i1}I + a_{i2}I^2)$  и явный вид коэффициентов  $a_{ik}$  приведены в Приложении 1.

Отметим, что одна из основных проблем, с которой сталкиваешься при отыскании решения уравнения (3), заключается в том, что отношение  $p_1/p_0$  при  $I = 0$  обращается в бесконечность как  $I^{-2}$  [28].

Дифференциальное уравнение для  $Q$ -распределения будет уже пятого порядка:

$$\sum_{v=0}^5 q_{5-v}(I)Q^{(v)}(I) = 0, \quad (5)$$

где полиномы

$$\begin{aligned}
 q_0(I) &= I^2 (I - I_{00}), \\
 q_1(I) &= 3I (I - I_{11}) (I - I_{12}), \\
 q_2(I) &= 3 (I - I_{21}) (I - I_{22}) (I - I_{23}), \\
 q_3(I) &= (I - I_{31}) (I - I_{32}) (I - I_{33}), \\
 q_4(I) &= b_{42} (I - I_{41}) (I - I_{42}), \\
 q_5(I) &= b_{52} (I - I_{51}) (I - I_{52}).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Канонический вид этих полиномов также приведен в Приложении 1.

## 2.2. „Полуклассическое“ решение. Параметр Манделя $Q_f$

В качестве реперных решений будем использовать „полуклассическое“ решение для стационарной внутрирезонаторной интенсивности [1,12]:

$$I_{\text{int}} = \frac{I_s}{2} \left[ (r - 1) - \frac{(r + 1)^2}{c} \right] \tag{7}$$

и выражение для параметра Манделя  $Q_f$ , полученное нами при линеаризации уравнений Гейзенберга–Ланжевена [12,14] вблизи  $I_{\text{int}}$  (7):

$$\begin{aligned}
 Q_f &= \frac{\langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2}{\langle \hat{n} \rangle} = \frac{r}{\left[ (r - 1) - \frac{(r+1)^2}{c} \right]} \\
 &\quad - \frac{3(r + 1)}{2c} - 1,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  — оператор числа фотонов.

Выражения (7), (8) справедливы, когда  $c > 8$  и  $r$  лежит между пороговым значением накачки  $r_{th}$  и значением  $r_q$ , соответствующим эффекту самотушения:

$$\begin{aligned}
 r_{th} &< r < r_q, \\
 r_{th} &= r_{\max} - \frac{c}{2} \sqrt{1 - 8/c}, \\
 r_q &= r_{\max} + \frac{c}{2} \sqrt{1 - 8/c},
 \end{aligned} \tag{9}$$

где  $r_{\max} = c/2 - 1$  — значение накачки, при котором  $I_{\text{int}}$  (7) достигает своего максимума:

$$I_{\max} = \frac{cI_s}{8} (1 - 8/c). \tag{10}$$

Как показано нами ранее, лучшее совпадение аналитических решений (7), (8) с численными расчётами имеет место в случае „хорошего“ резонатора:  $I_s \gg 1$ .

## 2.3. Используемые условия

Теперь определим характерные значения параметров лазера, при которых будем исследовать уравнения для  $P$ - и  $Q$ -распределений.

Если специально не оговаривается, то будем считать, что выполняются следующие условия:

$$cI_s \gg 8, \quad c \gg 8. \tag{11}$$

Выполнение этих условий, которые будем называть условиями существования полуклассического решения (7), позволяет накопить большое число когерентных фотонов в моде резонатора.

Выделим два возможных случая: 1)  $c > I_s$  — случай сильной связи „атом–поле“, когда связь атома с модой резонатора сильнее, чем связь атома с резервуаром, ответственным за его спонтанный распад; 2)  $c < I_s$  — обратный случай — случай слабой связи „атом–поле“.

„Предельным“ случаям сильной и слабой связи „атом–поле“ будут соответствовать следующие предельные переходы:  $c \rightarrow \infty$  и  $I_s \rightarrow \infty$ .

Решение (8) предсказывает слабое субпуассоновское поведение лазера<sup>1</sup>, которое имеет место для  $c > 200$  вблизи значения  $r = c/5$  ( $r_{th} \ll c/5 < r_{\max}$ ). В пределе при  $c \rightarrow \infty$ ,  $Q_f \approx -0.05$ . Именно вблизи этих параметров  $P$ -распределение сильно проявляет свои квазивероятностные свойства [14,15].

## 3. $P$ - и $Q$ -распределения в условиях существования полуклассического решения

Пусть выполняется условие существования полуклассического решения (11), тогда в уравнениях (3) и (5) появляется большой параметр  $\lambda = cI_s$  (см. коэффициенты в Приложении 1  $a_{22}$  (П2),  $b_{52}$  (П4)).

Введём характерный масштаб задачи  $I_{sc}$  и перепишем уравнения (3) и (5) через новую переменную  $x = I/I_{sc}$ . Тогда, уравнение для  $P$ -распределения принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 x^2 (x - x_0) P^{(2)}(x) - \lambda \alpha (x - x_{-1}) (x - x_{+1}) P^{(1)}(x) \\
 + \lambda I_{sc} (x - x_{-2}) (x - x_{+2}) P(x) = 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

где  $x_0 = I_0/I_{sc}$ ,  $x_{\pm 1,2} = I_{\pm 1,2}/I_{sc}$  и было учтено, что  $a_{12} = -\alpha\lambda$ ,  $\alpha = [1 + 3(r + 1)/2c]$  и  $a_{22} = \lambda$ .

<sup>1</sup> В [12] все численные расчёты, подтверждающие выражения (7), (8), проводились с использованием именно уравнения (3), которое позже было опубликовано нами в [14]. При этом в силу квазивероятностных свойств  $P$ -распределения область расчётов была ограничена корнем  $I_{-1}$ . Именно поэтому субпуассоновость, которая предсказывается выражением (8), обсуждается нами позже в [14,23].

Уравнение для Q-распределения

$$\begin{aligned}
 & I_{sc}^{-3} x^2 (x - x_{00}) Q^{(5)}(x) + 3I_{sc}^{-2} x (x - x_{11})(x - x_{12}) \\
 & \times Q^{(4)}(x) + 3I_{sc}^{-1} (x - x_{21})(x - x_{22})(x - x_{23}) Q^{(3)}(x) \\
 & + (x^3 + I_{sc}^{-3} b_{30}) Q^{(2)}(x) + \lambda I_{sc}^{-1} (\tilde{b}_{32} x^2 + I_{sc}^{-1} \tilde{b}_{31} x) \\
 & \times Q^{(2)}(x) + \lambda \beta (x - x_{41})(x - x_{42}) Q^{(1)}(x) \\
 & + \lambda I_{sc} (x - x_{51})(x - x_{52}) Q(x) = 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

где было учтено, что  $b_{42} = \lambda \beta$ ,  $b_{52} = \lambda$  и  $\beta = [2 - 3(r + 1)/2c]$  и введены обозначения  $\tilde{b}_{31} = b_{31}/\lambda$ ,  $\tilde{b}_{32} = b_{32}/\lambda$ .

### 3.1. „Квадратичный“ характерный масштаб

#### 3.1.1. Порождающее решение для P-распределения

Зададим следующий характерный масштаб задачи  $I_{sc} = cI_s/8 \approx I_{max}$  (10), который будем называть „квадратичным“, предполагая квадратичную зависимость  $I_{int}$  (7) от параметра накачки.

Анализируя полиномы в (12), можно показать, что в интересующих нас условиях (11), в частности когда параметр накачки сопоставим с кооперативным параметром  $r \sim c$ , корни полиномов  $x_0, x_{\pm 1,2} \sim 1$ .

Как видно из (12), выделенный большой параметр  $\lambda$  позволяет рассматривать уравнение для P-распределения как уравнение с малым параметром при старшей производной [25,29]. Отбрасывая в (12) член с  $1/\lambda$ , получаем порождающее уравнение, решение которого имеет вид

$$P_0(I) = \begin{cases} N_0(I_{-1} - I)^{f_1} (I_{+1} - I)^{f_2} e^{I/\alpha}, & I \leq I_{-1}, \\ 0, & I > I_{-1}, \end{cases} \tag{14}$$

где  $N_0$  — нормировочная константа и был сделан переход обратно к переменной интенсивности  $I$  и корням  $I_{\pm 1}, I_{\pm 2}$ . Показатели степени в (14)

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{(I_{-1} - I_{-2})(I_{-1} - I_{+2})}{\alpha(I_{-1} - I_{+1})}, \\
 f_2 &= -\frac{(I_{+1} - I_{-2})(I_{+1} - I_{+2})}{\alpha(I_{-1} - I_{+1})}.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Решение (14) было получено нами ранее в [14]. Подробный анализ показал, что (14) хорошо согласуется с численными расчётами практически во всём интервале изменений параметра накачки: от  $r \ll r_{th}$  до  $r \gg r_q$  (см. раздел „Результаты расчётов...“).

Близкий результат был получен в работе [9]. Однако решение (14), как показано в [14], более точно описывает поведение одноатомного лазера и может быть использовано для более широкого диапазона значений параметров лазера.

Отметим некоторые особенности коэффициентов в уравнении (3) (или (12)).

(1) В случае хорошего резонатора  $I_s \gg 1$ , при выполнении условий (9), (11), имеем следующие приближённые равенства:

$$\begin{aligned}
 I_0 &\approx I_{+1} \approx I_{+2}, \\
 I_{-1} &\approx I_s r / 2\alpha, \quad I_{-2} \approx I_{int}, \\
 \frac{(I_{-1} - I_{-2})^2}{I_{-2} f_1} &\approx \frac{\alpha(I_{-1} - I_{-2})}{I_{-2}} \approx Q_f.
 \end{aligned} \tag{16}$$

Здесь выражение для  $I_{-1}$  частично объясняет ограниченность области определения (14) — невозможность наблюдения поля с интенсивностью, большей чем  $I_s r / 2$ .

(2) В случае предельной сильной связи „атом–поле“, т.е. при  $c \rightarrow \infty$ , для корней полиномов имеем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{I_s(r + 1) - 1}{2}, \\
 I_{\pm 1} &= \frac{I_s(2r + 1) - 1 \pm |I_s - 1|}{4}, \\
 I_{\pm 2} &= \frac{I_s r \pm \sqrt{(I_s - 1)(I_s - 3)}}{2}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

#### 3.1.2. Приближённое решение для Q-распределения

В интересующих нас условиях (11) корни полиномов и коэффициенты в уравнении (13) порядка единицы:  $x_{00}, x_{ik} \sim 1, I_{sc}^{-3} b_{30}, I_{sc}^{-1} \tilde{b}_{31}, \tilde{b}_{32} \sim 1$ .

Расположение большого параметра  $\lambda$  в уравнении (13) позволяет искать его приближённое решение, рассматривая следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\begin{aligned}
 & I_{sc}^{-1} (\tilde{b}_{32} x^2 + I_{sc}^{-1} \tilde{b}_{31} x) Q_0^{(2)}(x) + \beta (x - x_{41})(x - x_{42}) Q_0^{(1)}(x) \\
 & + I_{sc} (x - x_{51})(x - x_{52}) Q_0(x) = 0.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Это уравнение соответствует порождающему уравнению первого порядка для распределения  $P_0$  (14). Найти решение уравнения (18) в случае произвольных параметров лазера затруднительно. В работе [23] в (18) был отброшен член со второй производной, что частично оправдывается связью между характерным масштабом и большим параметром  $I_{sc} = \lambda/8$ . Решение оставшегося уравнения первого порядка даёт ожидаемый результат:

$$\begin{aligned}
 Q_0(I) &= N_0 (I - I_{41})^{g_1} (I_{42} - I)^{g_2} e^{-I/\beta}, \\
 g_1 &= -\frac{(I_{41} - I_{51})(I_{41} - I_{52})}{\beta (I_{41} - I_{42})}, \\
 g_2 &= \frac{(I_{42} - I_{51})(I_{42} - I_{52})}{\beta (I_{41} - I_{42})}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь выражение в первой скобке всегда положительно, так как  $I_{41} < 0$ . Экспонента в отличие от (14) убывает ( $\beta > 0$ ). Во второй скобке для интересующих нас параметров лазера  $I_{42} \approx I_s r/2$ , что достаточно далеко от области существенного изменения функции  $Q$ .

Решение (19) в отличие от решения (14) позволило описать слабое субпуассоновское поведение одноатомного лазера ( $Q_f \approx -0.05$  для  $c > 200$ ,  $r = c/5$ ), предсказанное линейной теорией (8) [12,14], а также повторить основные результаты (см. раздел „Результаты расчётов. . .“), полученные ранее с помощью (14).

В качестве наблюдения и здесь отметим поведение корней полиномов в уравнении для  $Q$ -распределения. Так, в интересующих нас условиях корни полиномов в (18) удовлетворяют следующим приближённым равенствам.

(1) В случае хорошего резонатора  $I_s \gg 1$  при выполнении условий (9), (11) имеем следующие приближённые равенства:

$$I_{31} \approx I'_{31} = -\frac{b_{31}}{b_{32}} \approx I_{42} \approx I_{52},$$

$$I_{41} \approx -I_s r/4, \quad I_{51} \approx I_{int},$$

$$\frac{(I_{41} - I_{51})^2}{I_{51} g_1} - 2 \approx \frac{\beta(I_{51} - I_{41})}{I_{51}} - 2 \approx Q_f. \quad (20)$$

(2) В случае предельной сильной связи „атом–поле“ ( $c \rightarrow \infty$ ) интересно сравнить корни, соответствующие корням  $I_{\pm 2}$  в (17):

$$I_{51} = \frac{I_s r - \sqrt{(I_s + 1)(I_s + 3)}}{2},$$

$$I_{52} = \frac{I_s r + \sqrt{(I_s + 1)(I_s + 3)}}{2}. \quad (21)$$

### 3.2. Линейный характерный „масштаб“

Для предельного случая  $c \rightarrow \infty$  необходимо выбрать другой „масштаб“ задачи. Оценить его можно исходя из решений (7), (8). Устремим в (7), (8)  $c \rightarrow \infty$ , получаем

$$I_{int}(r, I_s) = \frac{I_s(r-1)}{2}, \quad (22)$$

$$Q_f(r) = \frac{1}{(r-1)}. \quad (23)$$

Отсюда видно, что в качестве характерного „масштаба“ задачи можно выбрать величину  $I_{sc} = I_s r/2$ .

#### 3.2.1. Порождающее решение для $P$ -распределения при $c \rightarrow \infty$

Из оценки характерного масштаба задачи понятно, что решением уравнения (12) будет найденная выше функция (14), в которой во всех коэффициентах нужно

просто перейти к пределу  $c \rightarrow \infty$ . Используя (17), получаем

$$P_0(I) = \begin{cases} N_0 \left( \frac{I_s(r+1)-1}{2} - I \right) \left( \frac{I_s r}{2} - I \right)^{\frac{I_s-3}{2}} e^I, & I \leq \frac{I_s r}{2}, \\ 0, & I > \frac{I_s r}{2}. \end{cases} \quad (24)$$

Решение (24) на первый взгляд имеет достаточно простую структуру, из которой, в частности, видно, когда  $P$ -распределение может стать отрицательным. В самом деле, при  $I_s < 1$  и  $r > (1 - I_s)/I_s$  первая скобка в (24) меняет свой знак на промежутке  $(0, I_s r/2)$ . Следовательно, можно ожидать наличие субпуассоновской статистики.

#### 3.2.2. Порождающее решение для $Q$ -распределения при $c \rightarrow \infty$

Теперь рассмотрим уравнение (18). Переходя в нём к пределу  $c \rightarrow \infty$  и переписывая его через переменную интенсивности, получаем

$$(\tilde{b}_{31} I + I^2) Q_0^{(2)}(I) + (\tilde{b}_{40} + \tilde{b}_{41} I + 2I^2) Q_0^{(1)}(I) + (\tilde{b}_{50} + \tilde{b}_{51} I + I^2) Q_0(I) = 0, \quad (25)$$

$$\tilde{b}_{31} = -\frac{1}{2} (I_s(r+1) + 1),$$

$$\tilde{b}_{40} = -\frac{1}{4} (I_s + 3) (I_s(r+1) + 1),$$

$$\tilde{b}_{41} = -\frac{1}{2} (I_s(2r+1) + 1),$$

$$\tilde{b}_{50} = \frac{1}{4} (I_s^2(r^2 - 1) - 4I_s - 3), \quad \tilde{b}_{51} = -I_s r.$$

Решение уравнения (25) (в отличие от (3)) можно искать стандартным способом в виде ряда  $Q_0 = I^\alpha (c_0 + c_1 I + c_2 I^2 + \dots)$  с соответствующим определяющим уравнением для  $\alpha$  [28,29]. Или воспользоваться интегральной связью между  $P$ - и  $Q$ -распределениями [26,30]:

$$Q(I) = \int_0^\infty P(I') e^{-(I'+I)} I_0(2\sqrt{I'I}) dI', \quad (26)$$

где  $I_n(x)$  — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Не вдаваясь в подробности, выпишем решение уравнения (25):

$$Q_0(I) = N_0 I^{\frac{1-\nu}{2}} \left[ \frac{(I_s r + 2\nu)}{\sqrt{2I_s r I}} I_\nu(\sqrt{2I_s r I}) + I_{\nu+1}(\sqrt{2I_s r I}) \right] e^{-I}, \quad (27)$$

где  $\nu = (I_s + 1)/2$ .

Отметим, что при решении уравнения второго порядка (25) получаются два независимых решения. А физическое решение (27) получается из суперпозиции этих решений с условием ограниченности в нуле.

Решения (24) и (27) впервые были получены и исследованы в работе [10] на основе системы уравнений для вспомогательных вероятностей. Отметим, что данные решения не учитывают такую особенность одноатомного лазера как эффект самотушения, что уже видно из (22) и (23).

Таким образом, в этом подразделе показано, что случай предельной сильной связи „атом–поле“ ( $c \rightarrow \infty$ ) содержится в решении (14). А сравнение друг с другом уравнений (25) и (18) объясняет, почему решение (19) не может перейти в решение (27) при  $c \rightarrow \infty$ : отбрасывание второй производной в (18) не позволяет это сделать. Это первый основной результат настоящей работы.

За более подробным анализом решений (24) и (27) отправляем читателя к оригинальной работе. Здесь для полноты изложения выделим три частных случая. Первый случай, когда  $I_s \rightarrow 1$ , также рассмотренный в [10], в котором  $P$ -распределение проявляет себя как обобщённая функция. Вторым случаем —  $I_s \rightarrow 0$ , при этом произведение  $I_s r$  остаётся постоянным. Третий случай —  $I_s r \ll 1$ .

### 3.2.3. Случай $I_s \rightarrow 1$

Устремим в выражении (24)  $I_s \rightarrow 1$ . На первый взгляд получаем  $P_0 = N_0 e^I$ , но это ошибочный результат. Рассмотрим решение (24), переписав его следующим образом (только часть для  $I \leq I_s r/2$ ):

$$P_0(I) = N_0 \left( \frac{I_s - 1}{2} + \frac{I_s r}{2} - I \right) \left( \frac{I_s r}{2} - I \right)^{\frac{I_s - 3}{2}} e^I = N_0 \left[ \left( \frac{I_s r}{2} - I \right)^\varepsilon + \varepsilon \left( \frac{I_s r}{2} - I \right)^{\varepsilon - 1} \right] e^I, \quad (28)$$

где  $\varepsilon = (I_s - 1)/2$ .

Из (28) видно, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  второе слагаемое в скобках можно рассматривать как слабый предел, определяющий  $\delta$ -функцию Дирака. Отсюда

$$P_0(I) = \begin{cases} \frac{1}{\pi(2e^{I/2} - 1)} [1 + \delta(\frac{I}{2} - I)] e^I, & I \leq \frac{I_s}{2}, \\ 0, & I > \frac{I_s}{2}, \end{cases} \quad (29)$$

где явно записан нормировочный множитель.

Устремляя в (27)  $I_s$  к единице и используя интегральную связь (26), легко убедиться в правильности решения (29) с его ограниченной областью определения.

### 3.2.4. Случай $I_s \rightarrow 0$ при $I_s r = \text{const}$

Устремим в решениях (24), (27)  $I_s \rightarrow 0$ , при этом произведение  $I_s r$  будем считать постоянным. Тогда

$$P_0(I) = N_0 \left( \frac{I_s r - 1}{2} - I \right) \left( \frac{I_s r}{2} - I \right)^{-\frac{3}{2}} e^I, \quad (30)$$

$$Q_0(I) = N_0 \left[ \frac{I_s r}{\sqrt{2I_s r I}} \text{sh}(\sqrt{2I_s r I}) + \text{ch}(\sqrt{2I_s r I}) \right] e^{-I}. \quad (31)$$

Эти решения для случая  $I_s r = 1$  были проанализированы нами ранее в [18,19].

### 3.2.5. Случай $I_s r \ll 1$

Разложим функции Бесселя в решении (27) в ряд по малому параметру  $I_s r$  и ограничимся членами первого порядка малости, тогда

$$Q_0(I) = \frac{1}{\pi(1 + I_s + 2I_s r)} [1 + I_s(r + 1) + I_s r I] e^{-I}. \quad (32)$$

Примечательность выражения (32) в том, что оно явно раскрывает ферми-статистику, навязываемую атомом полю резонатора. В самом деле, вычисляя с помощью (32) средние значения операторов  $\hat{n}$  и  $\hat{n}^2$ , получаем

$$\langle \hat{n} \rangle = \pi \int_0^\infty I Q_0(I) dI - 1 = \frac{I_s r}{1 + I_s + 2I_s r}, \quad (33)$$

$$\langle \hat{n}^2 \rangle = \pi \int_0^\infty I^2 Q_0(I) dI - 3\langle \hat{n} \rangle - 2 = \frac{I_s r}{1 + I_s + 2I_s r}. \quad (34)$$

Отсюда

$$\langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle = \langle \hat{n}^2 \rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \langle \hat{n} \rangle (1 - \langle \hat{n} \rangle). \quad (35)$$

Полученная дисперсия числа фотонов соответствует флуктуациям числа частиц для идеального ферми-газа [31,32]. Такое поведение одноатомного лазера обусловлено как рассматриваемым случаем предельной сильной связи  $c \rightarrow \infty$ , так и условием малого числа фотонов в резонаторе:  $\langle \hat{n} \rangle \approx I_s r \ll 1$ . Выявление ферми-евских черт в распределении числа фотонов является вторым основным результатом настоящей работы.

### 3.3. Решения для $P$ - и $Q$ -распределений при $r \ll r_{th}$ , $r \gg r_q$

В случае когда параметр накачки много меньше единицы, что эквивалентно неравенству  $r \ll r_{th}$ , или много больше кооперативного параметра, что, в свою очередь, эквивалентно  $r \gg r_q$ , решение (14) преобразуется к виду

$$P_0(I) = \frac{1}{\pi(a_{10}/a_{20})} \exp\left(-\frac{I}{(a_{10}/a_{20})}\right). \quad (36)$$

Этот результат можно получить непосредственно из уравнения (3), отбросив в полиномах все члены, содержащие  $I, I^2, I^3$ , т.е. предполагая, что основные изменения  $P$ -распределения происходят вблизи  $I \approx 0$ .

Полученное выражение (36) описывает тепловое распределение фотонов в моде со средним числом фотонов

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{a_{10}}{a_{20}}. \quad (37)$$

Для значений параметра накачки, лежащих ниже порога  $r \ll r_{th}$ , и при условии, когда  $c > 8$  и  $I_s \gg 1$ , решение (37) даёт результат, полученный ранее в [9]:

$$\langle \hat{n} \rangle \approx \frac{r}{1-r}. \quad (38)$$

Таким образом, и этот предельный случай содержится в решении (14).

Для значений параметра накачки, лежащих выше точки самотушения  $r \gg r_q$ , и при тех же условиях  $c > 8$  и  $I_s \gg 1$  решение (37) даёт следующий результат [14]:

$$\langle \hat{n} \rangle \approx \frac{c}{r-c}. \quad (39)$$

Выражения для среднего числа фотонов (38), (39) в силу того, что они соответствуют тепловому распределению, представляют собой выражение для параметра Манделя в соответствующих областях. Последний имеет максимумы (см. раздел „Результаты расчётов...“), где решения (38), (39) расходятся.

Соответствующее  $Q$ -распределение для  $r \ll r_{th}$  и  $r \gg r_q$  получим из уравнения (5), также пренебрегая в нём всеми членами с  $I, I^2, I^3$  [23], тогда

$$b_{20}Q^{(3)}(I) + b_{30}Q^{(2)}(I) + b_{40}Q^{(1)}(I) + b_{50}Q(I) = 0. \quad (40)$$

Решение этого уравнения

$$Q(I) = N_0 \exp(aI), \quad (41)$$

где  $a$  является действительным корнем уравнения  $b_{20}x^3 + b_{30}x^2 + b_{40}x + b_{50} = 0$ .

Среднее число фотонов даётся выражением  $\langle \hat{n} \rangle = -(a^{-1} + 1)$ , которое для рассмотренных выше случаев совпадает с (38), (39).

При  $r \rightarrow 0, \infty$  корень  $a \approx -1$ , т.е. в этих предельных случаях  $Q$ -функция (так же как и  $P$ -распределение (36)) описывает вакуумное состояния моды —  $Q(I) = e^{-I}/\pi$ .

Интересно отметить, что решение (36) является решением уравнения (3) для случая предельного перехода  $I_s \rightarrow \infty$  (соответствующее решение имеет место и для  $Q$ -распределения). Тогда, устремляя  $I_s \rightarrow \infty$  в отношении  $a_{10}/a_{20}$  в (36), получаем следующее значение для среднего числа фотонов:

$$\langle \hat{n} \rangle = \frac{r}{(1-r) + \frac{(r+1)^2}{c}}. \quad (42)$$

Из (42) явно видна отмеченная выше зависимость  $\langle \hat{n} \rangle$  от  $r$ , в случае когда  $r \ll r_{th} \approx 1$  или  $r \gg r_q \approx c$ . Заметим, что (42) справедливо не только в условиях существования полуклассического решения  $c > 8$ , но и в случае, когда  $c < 8$ , при произвольных значениях  $r$ .

### 3.4. Связь решений (14) и (19) с полуклассической интенсивностью $I_{int}$ и параметром Манделя $Q_f$

Решения (14) и (19) описывают лазер в гораздо более широком интервале значений параметров задачи, чем решения (7), (8). Их можно использовать для значений параметра накачки, лежащих вблизи порога, в допороговой области, в области самотушения. Эти решения описывают более правильно выход на насыщение и переход к самотушению.

Можно явно показать, что выражения для полуклассической интенсивности (7) и параметра Манделя (8) входят и выводятся из решений (14) и (19) [14,23].

Пусть существенные изменения  $P$ -распределения происходят вблизи значения переменной интенсивности  $I = I_{int}$ . Тогда, учитывая приближённые равенства (16), предэкспоненциальный множитель в (14) записывается приближено в виде

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\Delta I}{\Delta I_{int}}\right)^{f_1} (I_{+1} - I)^{f_2} &\approx \exp \left[ f_1 \ln \left(1 - \frac{\Delta I}{\Delta I_{int}}\right) \right] \\ &\approx \exp \left[ -\Delta I - \frac{1}{2} \frac{(\Delta I)^2}{I_{int} Q_f} \right], \end{aligned} \quad (43)$$

где  $\Delta I = I - I_{int}$ ,  $\Delta I_{int} = I_{-1} - I_{int}$  и было учтено, что  $f_2 \approx 0$ ,  $f_1 \approx \Delta I_{int} \approx I_{int} Q_f$ . Подставляя (43) в (14), получаем

$$P_0(I) = N_0 \exp \left[ -\frac{(I - I_{int})^2}{2D_p} \right], \quad (44)$$

где  $D_p = I_{int} Q_f$  играет роль дисперсии случайной величины  $I$ , а  $P_0$  теперь имеет неограниченную область определения.

Отсюда среднее число фотонов и дисперсия числа фотонов выражаются через полуклассические решения следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \hat{n} \rangle &= \pi \int_0^\infty I P_0(I) dI = I_{int}, \\ \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle &= \langle \hat{n} \rangle + \pi \int_0^\infty (I - \langle \hat{n} \rangle)^2 P_0(I) dI = \langle \hat{n} \rangle + D_p \\ &= I_{int} [1 + Q_f]. \end{aligned} \quad (46)$$

Однако нужно отметить, что, когда  $Q_f < 0$ , „дисперсия“ становится отрицательной ( $D_p < 0$ ) и распределение (44) со своей неограниченной областью определения теряет смысл и не может быть использовано.

Аналогичным образом получаем такую же гауссову аппроксимацию и для  $Q$ -распределения (19):

$$Q_0(I) = N_0 \exp \left[ -\frac{(I - I_{int})^2}{2D_q} \right], \quad (47)$$

где  $D_q = 1 + I_{\text{int}}(2 + Q_f)$  — дисперсия случайной величины  $I$ .

Видно, что  $D_q$  всегда положительна. Тогда для любых возможных  $Q_f$  справедливы выражения для средних:

$$\langle \hat{n} \rangle = \pi \int_0^{\infty} I Q_0(I) dI - 1 = I_{\text{int}}, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \langle (\Delta \hat{n})^2 \rangle &= -(\langle \hat{n} \rangle + 1) + \pi \int_0^{\infty} (I - (\langle \hat{n} \rangle + 1))^2 Q_0(I) dI \\ &= -(\langle \hat{n} \rangle + 1) + D_q = I_{\text{int}} [1 + Q_f]. \end{aligned} \quad (49)$$

Таким образом, решение (47) в отличие от (44) может описывать субпуассоновскую статистику, что и было показано в [23].

#### 4. Сравнение с обычным лазером

Добавим к предыдущему предельному переходу  $c \rightarrow \infty$  неравенство  $I_s \gg 1$ . Тогда корни (17) упрощаются:

$$\begin{aligned} I_0 = I_{+1} = I_{+2} &= \frac{I_s(r+1)}{2}, \\ I_{-1} = \frac{I_s r}{2}, \quad I_{-2} &= \frac{I_s(r-1)+2}{2}, \end{aligned} \quad (50)$$

а решение (14) принимает вид

$$P_0(I) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{I_s r}{2} - I\right)^{\frac{I_s r}{2} - 1} e^I, & I \leq \frac{I_s r}{2}, \\ 0, & I > \frac{I_s r}{2}. \end{cases} \quad (51)$$

Полученное выражение (51) совпадает с решением для обычного лазера [26],  $P$ -распределение которого также представлено неаналитической функцией:

$$P_{cl}(I) = \begin{cases} N_0 \left(\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}C} - I\right)^{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}C} - 1} e^I, & I \leq \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}C}, \\ 0, & I > \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}C}. \end{cases} \quad (52)$$

Здесь  $\mathcal{L}$  — линейный коэффициент усиления,  $\mathcal{B}$  — коэффициент самонасыщения и  $C$  — скорость затухания моды резонатора (Приложение 2). И для лазера, работающего существенно выше порога, (52) даёт следующие выражения для внутрирезонаторной интенсивности  $I_{cl}$  и параметра Манделя  $Q_{cl}$ :

$$I_{cl} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{B}} \left( \frac{\mathcal{L}}{C} - 1 \right), \quad (53)$$

$$Q_{cl} = \frac{1}{\left(\frac{\mathcal{L}}{C} - 1\right)}. \quad (54)$$

Отметим, что в рассмотренном здесь предельном случае ( $c \rightarrow \infty$ ) выражения (53), (54) совпадают с соответствующими выражениями для одноатомного лазера (22), (23).

Внутрирезонаторная интенсивность (22) и параметр Манделя (23) описывают поведение обычного лазера [26,33] с пороговым безразмерным значением накачки  $r_{\text{th}} = 1$ . Параметр Манделя  $Q_f$  всегда положителен, т.е. внутрирезонаторное поле является суперпуассоновским. При  $r \gg 1$   $Q_f \approx 0$ , т.е. статистика поля становится пуассоновской.

Совпадение  $P$ -распределения (51) с соответствующим распределением для обычного лазера (52) можно объяснить следующим образом. Предельный переход  $c \rightarrow \infty$  может быть интерпретирован как увеличение числа атомов в системе [34–36]. Условие  $I_s \gg 1$  обеспечивает накопление большого числа когерентных фотонов в моде, случайным образом покидающих её. Оба этих фактора стирают индивидуальность атома, проявляющуюся уже в решениях (7), (8).

Как отмечено в [26], неаналитичность  $P_{cl}(I)$  (52) обусловлена наличием производных всех порядков от  $P_{cl}(I, \varphi, t)$  по переменным  $I$  и  $\varphi$  ( $z = \sqrt{I}e^{i\varphi}$ ) в соответствующем нестационарном уравнении. Можно показать, что в нашем случае вывод уравнения (3) также сталкивается с проблемой производных всех порядков. Поэтому, возможно, ограниченность области определения решения (24) можно понимать так же, как и в случае обычного лазера.

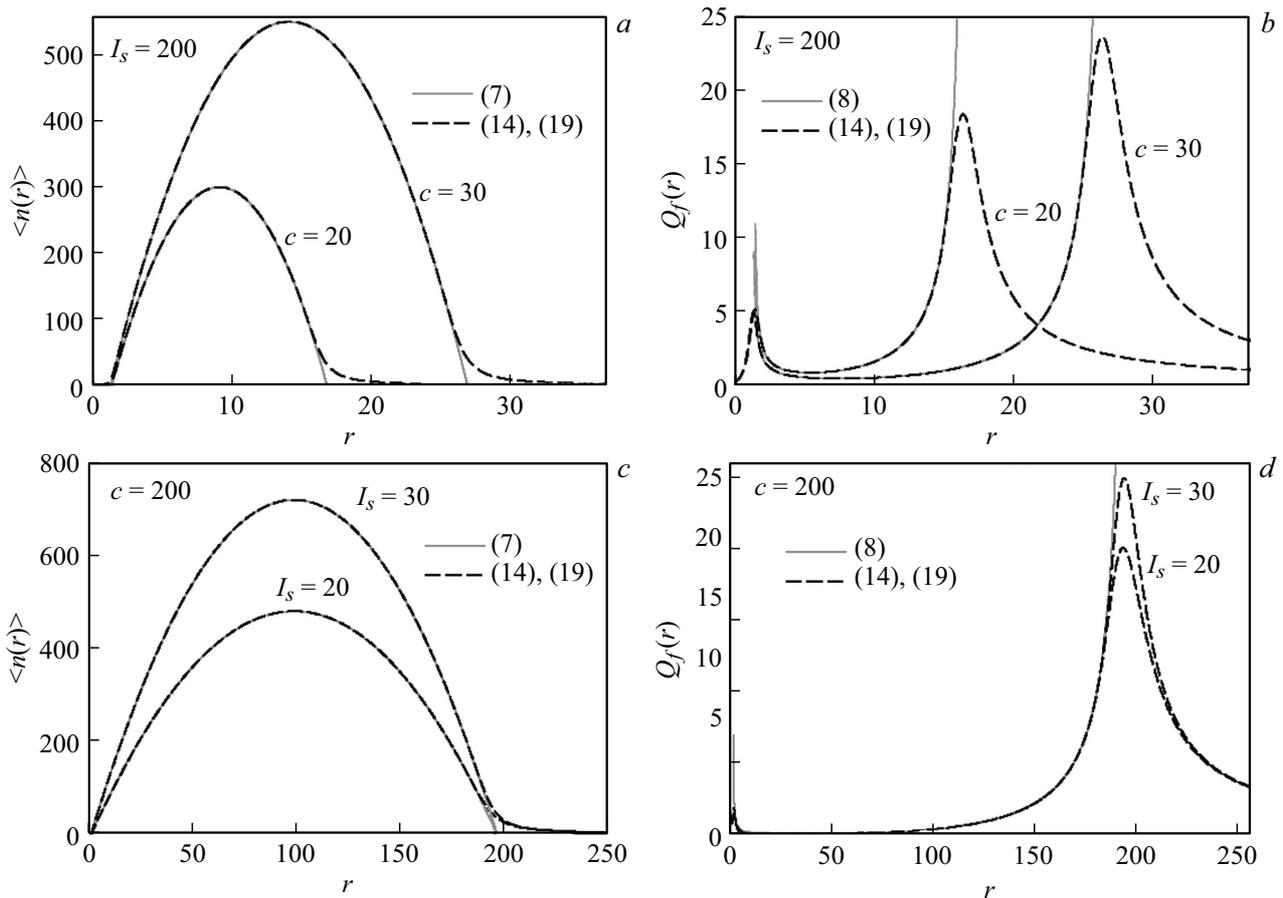
Таким образом, в этом разделе найдена и объяснена связь между одноатомным лазером и обычным лазером на макроскопическом числе излучателей. Это третий, основной результат настоящей работы.

#### 5. Результаты расчётов. Переход к беспороговому режиму

На рис. 1 представлены расчёты, выполненные с помощью приближённого решения для  $P$ -распределения (14). Видна характерная квадратичная зависимость среднего числа фотонов в моде от параметра накачки. А также два выраженных пика для параметра Манделя, связанных с его поведением вблизи порогового значения накачки и вблизи значения, соответствующего эффекту самотушения. Для значений накачки выше  $r_{\text{th}}$  и ниже  $r_q$  наблюдается хорошее согласие с полуклассическим решением (7) и решением (8).

Основные зависимости на рис. 1 связаны с тем, что увеличение безразмерной константы связи  $c$  влечёт за собой как естественное увеличение числа фотонов в моде резонатора, так и смещение значений  $r_{\text{max}}$  и  $r_q$ . Последнее связано с тем, что для разрушения более сильной связи „атом–поле“ и „пленения“ атома в возбуждённом состоянии необходимо приложить более сильное некогерентное возбуждение атома.

Такие же графики можно получить и с помощью приближённого решения для  $Q$ -распределения (19). Однако для  $r \ll r_{\text{th}}$  и  $r \gg r_q$  решение (19) даёт неправильный результат.



**Рис. 1.** Среднее значение числа фотонов  $\langle \hat{n} \rangle$  (a, c) и параметр Манделя  $Q_f$  (b, d) как функции параметра накачки  $r$ . Штриховая линия — (14), (19). Серая сплошная линия — (7), (8).

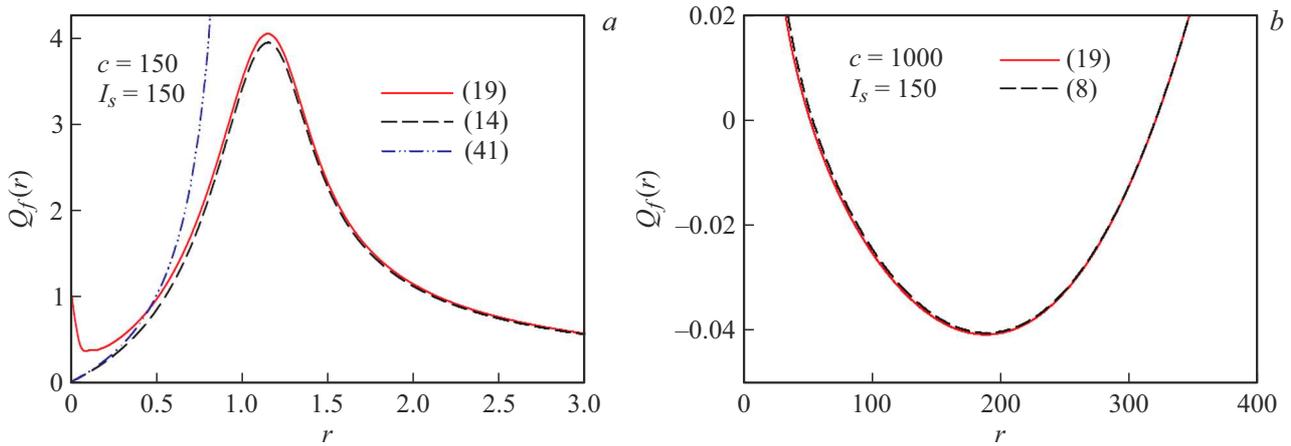
На рис. 2, a сравниваются графики для параметра Манделя  $Q_f$ , построенного с помощью трёх решений (14), (19) и (41), в области классического порога  $r_{th} \approx 1$ . Видно, что  $Q_f$ , построенный с помощью (19), при  $r \rightarrow 0$  возрастает до единицы вместо того, чтобы стремиться к нулю, описывая вакуумное состояние. Такое нефизичное поведение связано с тем, что при получении (19) в соответствующем порождающем уравнении (18) было отброшено слагаемое, содержащее вторую производную от  $Q$ -распределения. „Потеря“ именно этого слагаемого отличает решение (19) от дающего правильный результат решения (14) для  $P$ -распределения (см. текст после формулы (18)). Как можно видеть из уравнения (40) для функции  $Q$  (его решение (41), также, как и решение (14), адекватно описывает приближение к вакуумному состоянию моды), при малых значениях переменной интенсивности слагаемым со второй производной пренебрегать нельзя ( $b_{30} \sim I_s^2$ ). С другой стороны, найденное приближение (19) в силе описать субпуассоновскую статистику фотонов (рис. 2, b), предсказанную решением (8).

Поведение лазера вблизи порога анализируется на рис. 3. Из расчётов следует, что переход к сильной связи „атом–поле“ ( $c > I_s$ ) понижает характерный для

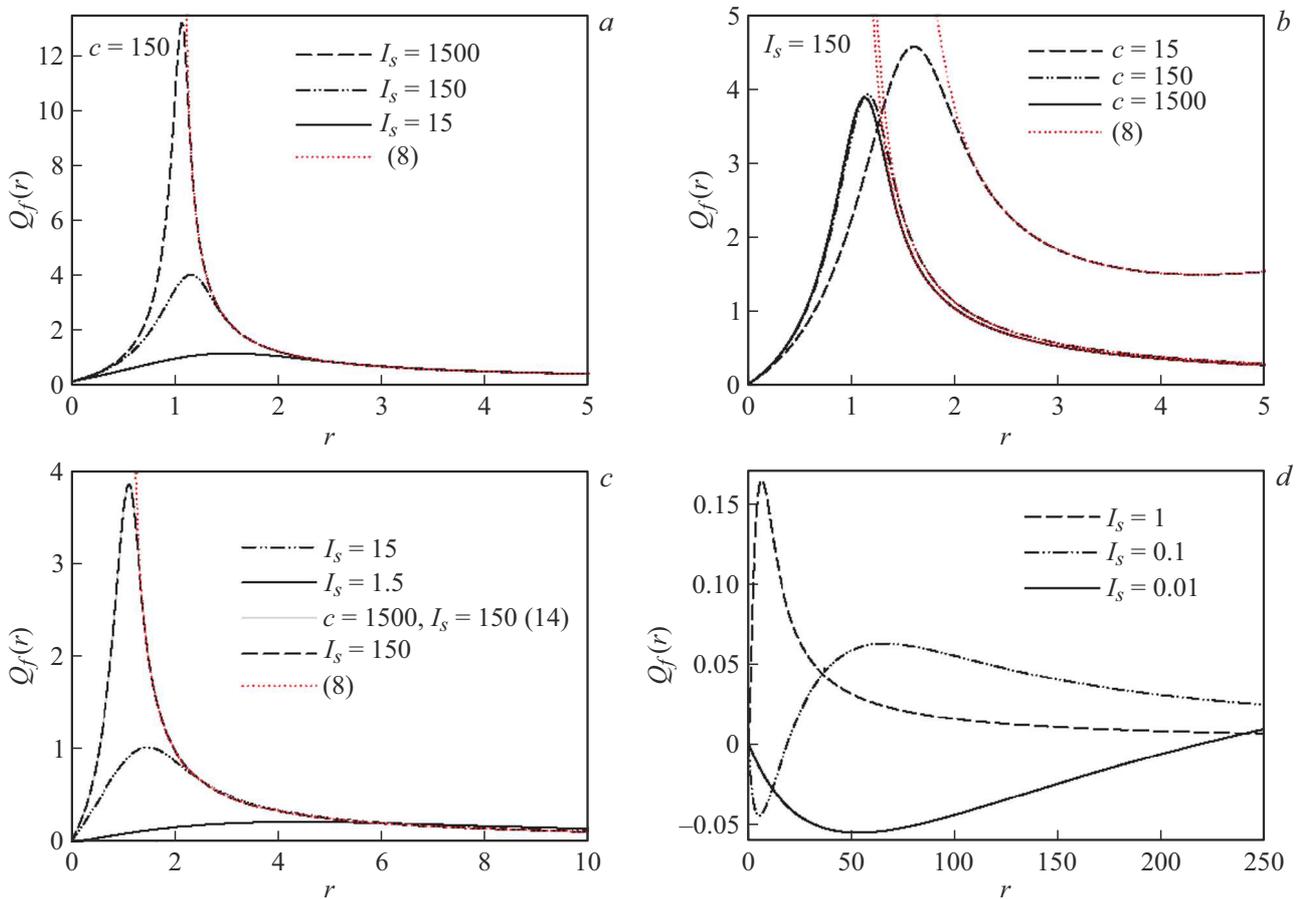
обычного лазера пороговый пик. На рис. 3, a, b этот переход осуществляется в режиме хорошего резонатора:  $I_s \gg 1$ . Видно, что полного исчезновения порога не происходит даже в предельном случае сильной связи:  $c \rightarrow \infty$  (рис. 3, c).

Пороговый пик начинает исчезать полностью при переходе к режиму „плохого“ резонатора:  $I_s \approx 1$ . Объяснить такое поведение можно раскрыв неравенства, соответствующие рассматриваемым режимам. Так, для сильной связи ( $c > I_s$ ) при условии „хорошего“ резонатора ( $I_s \gg 1$ ) выполняются следующие неравенства:  $g > \gamma \gg \kappa$ . Вблизи порога  $\Gamma \approx \gamma$ , и среднее число фотонов в моде мало  $\langle \hat{n} \rangle \approx 1$ . Тогда на масштабе времени жизни фотона  $\tau_\kappa \sim \kappa^{-1}$  будет происходить множество актов когерентного взаимодействия атома с модой, так и спонтанного распада атома, обусловленного соответствующим резервуаром. Усиленная связь ( $c \gg I_s$ ), пороговый пик будет уменьшаться, но в силу сохраняющегося условия  $I_s \gg 1$  не исчезнет.

Переходя к режиму „плохого“ резонатора ( $I_s \approx 1$ ), имеем следующие неравенства:  $g \gg \gamma \approx \kappa$ . В этом случае время жизни фотона будет практически совпадать с временем жизни атома как на верхнем, так и на нижнем уровнях. Это обеспечит некоторую упорядо-



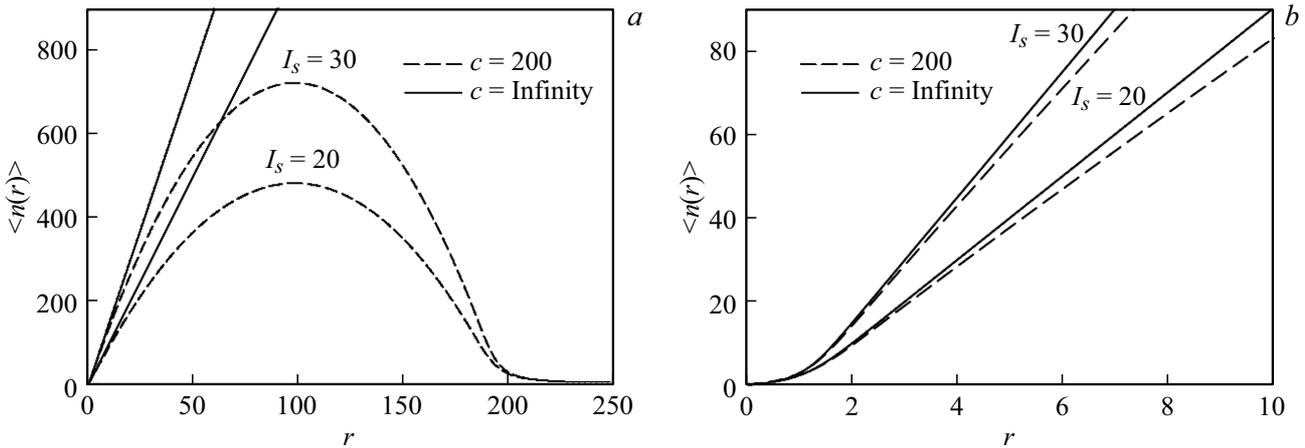
**Рис. 2.** Параметр Мандела  $Q_f$  как функции параметра накачки  $r$ . (a) Сравнение расчётов, проведённых вблизи порогового значения накачки с помощью решений (14) — штрих, (19) — сплошная линия и (41) — штрихпунктир. (b) Субпуассоновская статистика, (19) — сплошная линия, (8) — штрих.



**Рис. 3.** Поведение одноатомного лазера вблизи порога. Параметр Мандела  $Q_f$  как функция параметра накачки  $r$ . Переход к режиму сильной связи „атом–поле“  $c > I_s$ : (a) при фиксированном  $c$ , (b) при фиксированном  $I_s$ , (c,d) случай предельной сильной связи „атом–поле“ ( $c \rightarrow \infty$ ). Там, где не указана ссылка на формулу, используется решение (14) для (a,b) и решение (27) для (c,d).

ченность процесса взаимодействия фотона с атомом, что будет приводить к субпуассоновской статистике, а следовательно, к исчезновению порога.

Таким образом, понятно, что условием перехода к беспороговому режиму работы одноатомного лазера (генерирующего в режиме существования полукласси-



**Рис. 4.** Среднее значение числа фотонов  $\langle \hat{n} \rangle$  как функции параметра накачки  $r$ . Штриховая линия — (14), (19). Сплошная линия — (24), (27).

ческого решения (11)) не может являться лишь одно неравенство  $c \gg I_s$  [12]. Его необходимо уточнить, записав  $c \gg I_s \approx 1$ . Это четвёртый основной результат настоящей работы.

На рис. 4 сравнивается поведение одноатомного лазера на двух разных характерных масштабах задачи — „квадратичном“ и „линейном“. Из графиков видно естественное совпадение среднего числа фотонов для значений накачки вблизи порога и существенное расхождение при выходе на насыщение.

В конце этого раздела отметим, что для рассматриваемой модели одноатомного лазера минимальное значение параметра Манделя  $Q_f = -0.15$  [7,10,18]. Однако при рассмотренных в настоящей работе условиях (11), как видно из представленных результатов (рис. 2, b и рис. 3, d), минимальное найденное значение параметра Манделя  $Q_f \approx -0.05$ .

## 6. Заключение

Целью настоящей работы было рассмотреть все известные стационарные решения для одноатомного лазера с одной позиции. Так, было показано, что в режиме существования полуклассического решения в уравнениях для усреднённых по фазе  $P$ - и  $Q$ -распределений появляется большой параметр. Соответствующие порождающие решения этих уравнений содержат в себе все известные стационарные решения, выявленные ранее.

Помимо этого в работе было получено несколько новых результатов. Явно показано наличие фермиевских черт в распределении фотонов для одноатомного лазера, работающего в режиме предельно сильной связи и малого числа фотонов в резонаторе. Найдены условия, когда одноатомный лазер начинает генерировать как обычный лазер, а соответствующие  $P$ -распределения совпадают. Уточнены условия перехода к беспороговому режиму работы одноатомного лазера в режиме существования

полуклассического решения. Для этого же режима обнаружено, что минимальное значение параметра Манделя  $Q_f \approx -0.05$ .

Описанные в работе приближённые решения удаётся получить только благодаря большому параметру в уравнениях:  $cI_s \gg 1$ . Для случая  $cI_s \approx 1$ , когда параметр Манделя принимает своё наименьшее возможное для данной модели значение  $Q_f \approx -0.15$ , приближённых решений, как нам известно, пока не найдено.

В конце отметим, что интерес к задаче одноатомного лазера и к родственным с ней проблемам [37–45], где существенны эффекты, связанные с взаимодействием квантового поля с одиночными излучателями, не исчезает. А с начала 2000-х гг. ранее чисто теоретические задачи становятся и экспериментальными, нацеленными на практические применения [46–58], в частности в задачах, связанных с квантовыми сетями [59] и их безопасностью [60].

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Приложение 1

Запись полиномов (4) через коэффициенты  $a_{ik}$ :

$$\begin{aligned} p_0(I) &= (a_{02}I^2 + a_{03}I^3), \\ p_1(I) &= (a_{10} + a_{11}I + a_{12}I^2), \\ p_2(I) &= (a_{20} + a_{21}I + a_{22}I^2). \end{aligned} \quad (\text{П1})$$

Коэффициенты  $a_{ik}$ :

$$\begin{aligned} a_{02} &= \frac{1}{2} [1 - I_s(r+1)], \quad a_{03} = 1; \\ a_{10} &= \frac{cI_s^2 r}{4} [1 - I_s(r+1)], \\ a_{11} &= \frac{1}{4} [9 - 2I_s(6(r+1)+c) + I_s^2(3(r+1)^2 + c(4r+2))], \\ a_{12} &= \frac{1}{2} [7 - I_s(3(r+1) + 2c)]; \\ a_{20} &= \frac{1}{4} [6 - I_s(11(r+1) + 3c) + 2I_s^2(3(r+1)^2 + 2c) \\ &\quad + cI_s^3(r+1) \left[ (r-1) - \frac{(r+1)^2}{c} \right]], \\ a_{21} &= \frac{1}{2} [3 - 4I_s(r+1) - I_s^2(2cr - (r+1)^2)], \quad a_{22} = cI_s. \end{aligned} \tag{П2}$$

Запись полиномов (6) через коэффициенты  $b_{ik}$ :

$$\begin{aligned} q_0(I) &= (b_{02}I^2 + b_{03}I^3), \\ q_1(I) &= (b_{11}I + b_{12}I^2 + b_{13}I^3), \\ q_2(I) &= (b_{20} + b_{21}I + b_{22}I^2 + b_{23}I^3), \\ q_3(I) &= (b_{30} + b_{31}I + b_{32}I^2 + b_{33}I^3), \\ q_4(I) &= (b_{40} + b_{41}I + b_{42}I^2), \\ q_5(I) &= (b_{50} + b_{51}I + b_{52}I^2). \end{aligned} \tag{П3}$$

Коэффициентов  $b_{ik}$ :

$$\begin{aligned} b_{02} &= -\frac{1}{2} [1 + I_s(r+1)], \quad b_{03} = 1; \\ b_{11} &= -3 [1 + I_s(r+1)], \quad b_{12} = \frac{1}{2} [7 - 3I_s(r+1)], \quad b_{13} = 3; \\ b_{20} &= -3 [1 + I_s(r+1)], \\ b_{21} &= \frac{1}{4} [-21 - 26I_s(r+1) + 3I_s^2(r+1)^2], \\ b_{22} &= -3 [-4 + I_s(r+1)], \quad b_{23} = 3; \\ b_{30} &= \frac{1}{2} [-15 - 8I_s(r+1) + 3I_s^2(r+1)^2], \\ b_{31} &= -\frac{1}{2} I_s [c(1 + I_s(r+1)) - (r+1)(-13 + 3I_s(r+1))], \\ b_{32} &= \frac{1}{2} [23 + I_s(2c - 7(r+1))], \quad b_{33} = 1; \end{aligned} \tag{П4}$$

$$\begin{aligned} b_{40} &= \frac{1}{4} [-24 + I_s(r+1 - 3c) - I_s^3(r+1)(c + (r+1)^2) \\ &\quad + I_s^2(8(r+1)^2 - c(3r+4))], \\ b_{41} &= \frac{1}{4} [15 - 2I_s(c + 10(r+1)) + I_s^2(5(r+1)^2 \\ &\quad - 2c(2r+1))], \\ b_{42} &= \frac{1}{2} [7 + I_s(4c - 3(r+1))]; \\ b_{50} &= \frac{1}{4} [-6 + I_s(5(r+1) - 3c) + I_s^3(r+1) \\ &\quad \times (c(r-1) - (r+1)^2) + I_s^2(2(r+1)^2 - 4c)], \\ b_{51} &= \frac{1}{2} [3 - 4I_s(r+1) + I_s^2((r+1)^2 - 2cr)], \quad b_{52} = cI_s. \end{aligned}$$

## Приложение 2

$P$ -распределение для обычного лазера  $P_{cl}$  удовлетворяет следующей системе дифференциальных уравнений [26]:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \left( \frac{\partial}{\partial I} I - \frac{\partial}{\partial I} I \frac{\partial}{\partial I} \right) M(I) &= C \frac{\partial}{\partial I} (IP_{cl}(I)), \\ \left[ 1 - \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}} \left( I \frac{\partial}{\partial I} - I \right) \right] M(I) &= P_{cl}(I), \end{aligned} \tag{П5}$$

где  $M(I)$  — вспомогательная функция вероятности. Параметры лазера:  $\mathcal{A}$  — линейный коэффициент усиления,  $\mathcal{B}$  — коэффициент самонасыщения и  $C$  — скорость затухания моды резонатора.  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  могут быть переписаны через константу связи атом-поле  $g$ , атомные релаксационные константы  $\gamma_{\perp}$ ,  $\gamma_{\parallel}$  и эффективную скорость накачки  $r_a$ :  $\mathcal{A} = 2g^2 r_a / (\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel})$ ,  $\mathcal{B} = 4g^2 \mathcal{A} / (\gamma_{\perp} \gamma_{\parallel})$ .

Из системы уравнений (П5) достаточно легко получить одно замкнутое уравнение для  $P_{cl}$ . Опуская элементарные преобразования, получаем следующее дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\sum_{v=0}^2 \tilde{p}_{2-v}(I) P_{cl}^{(v)}(I) = 0, \tag{П6}$$

где полиномиальные коэффициенты имеют вид

$$\begin{aligned} \tilde{p}_0(I) &= (\tilde{a}_{01}I + \tilde{a}_{02}I^2 + \tilde{a}_{03}I^3), \\ \tilde{p}_1(I) &= (\tilde{a}_{10} + \tilde{a}_{11}I + \tilde{a}_{12}I^2 + \tilde{a}_{13}I^3), \\ \tilde{p}_2(I) &= (\tilde{a}_{20} + \tilde{a}_{21}I + \tilde{a}_{22}I^2). \end{aligned} \tag{П7}$$

Коэффициенты  $\tilde{a}_{ik}$  равны

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{01} &= \mathcal{A}^3, \\ \tilde{a}_{02} &= \mathcal{A}\mathcal{B}(\mathcal{A} - \mathcal{C}), \\ \tilde{a}_{03} &= -\mathcal{B}^2\mathcal{C}; \\ \tilde{a}_{10} &= \mathcal{A}^3, \\ \tilde{a}_{11} &= \mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{C} - 3\mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{A}^2), \\ \tilde{a}_{12} &= \mathcal{B}(2\mathcal{A}\mathcal{C} - 2\mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{A}^2), \\ \tilde{a}_{13} &= \mathcal{B}^2\mathcal{C}; \\ \tilde{a}_{20} &= \mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}\mathcal{C} - \mathcal{A}^2), \\ \tilde{a}_{21} &= 2\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}, \\ \tilde{a}_{22} &= \mathcal{B}^2\mathcal{C}.\end{aligned}\tag{П8}$$

Решение уравнения (П6) даётся неаналитической функцией (52) [26].

## Список литературы

- [1] Yi Mu, C.M. Savage. Phys. Rev. A, **46**, 5944 (1992). DOI: 10.1103/PhysRevA.46.5944
- [2] G.S. Agarwal, S. Dutta Gupta. Phys. Rev. A, **42**, 1737 (1990). DOI: 10.1103/PhysRevA.42.1737
- [3] С.Я. Килин, Т.Б. Карлович. Опт. и спектр., **70**, 628 (1991). EDN: YTDGOT.
- [4] C. Ginzl, H.J. Briegel, U. Martini, B.G. Englert, A. Schenzle. Phys. Rev. A, **48**, 732 (1993). DOI: 10.1103/PhysRevA.48.732
- [5] T. Pellizzari, H. Ritsch. Phys. Rev. Lett., **72**, 3973 (1994). DOI: 10.1103/PhysRevLett.72.3973
- [6] M. Löffler, G.M. Meyer, H. Walther. Phys. Rev. A, **55**, 3923 (1997). DOI: 10.1103/PhysRevA.55.3923
- [7] А.В. Козловский, А.Н. Ораевский. ЖЭТФ, **115**, 1210 (1999). DOI: 10.1134/1.558842
- [8] B. Jones, S. Ghose, J.P. Clemens, P.R. Rice, L.M. Pedrotti. Phys. Rev. A, **60**, 3267 (1999). DOI: 10.1103/PhysRevA.60.3267
- [9] Т.Б. Карлович, С.Я. Килин. Опт. и спектр., **91**, 374 (2001). EDN: YSPNZR, DOI: 10.1134/1.1405210
- [10] С.Я. Килин, Т.Б. Карлович. ЖЭТФ, **122**, 933 (2002). EDN: YSSXIL, DOI: 10.1134/1.1528672
- [11] Т.Б. Карлович. Опт. и спектр., **111**, 758 (2011). EDN: OJGTRT, DOI: 10.1134/S0030400X11120113
- [12] N.V. Larionov, M.I. Kolobov. Phys. Rev. A, **84**, 055801 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevA.84.055801
- [13] S.Ya. Kilin, A.B. Mikhalychev. Phys. Rev. A, **85**, 063817 (2012). DOI: 10.1103/PhysRevA.85.063817
- [14] N.V. Larionov, M.I. Kolobov. Phys. Rev. A, **88**, 013843 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevA.88.013843
- [15] E.N. Popov, N.V. Larionov. Proc. SPIE, **9917**, 99172X (2016). DOI: 10.1117/12.2229228
- [16] V. Stefanov, S.Y. Kilin. Nonlinear Phenomena in Complex Systems, **22**, 64 (2019). EDN: ZIJQTI.
- [17] В.А. Бобрикова, Р.А. Хачатрян, К.А. Баранцев, Е.Н. Попов. Опт. и спектр., **127**, 976 (2019). DOI: 10.21883/OS.2019.12.48695.39-19
- [18] N.V. Larionov. Proc. IEEE Int. Conf. on Electrical Engineering and Photonics (EExPolytech), 265 (2020). DOI: 10.1109/EExPolytech50912.2020.9243955
- [19] N.V. Larionov. J. Phys.: Conf. Ser., **2103**, 012158 (2021). DOI: 10.1088/1742-6596/2103/1/012158
- [20] B. Parvin. Eur. Phys. J. Plus, **136**, 728 (2021). DOI: 10.1140/epjp/s13360-021-01720-5
- [21] D.B. Horoshko, Chang-Shui Yu, S.Ya. Kilin. J. Opt. Soc. Amer. B, **38**, 3088 (2021). DOI: 10.1364/JOSAB.436004
- [22] A.B. Mikhalychev, S.V. Vlasenko, S.Ya. Kilin. Phys. Rev. A, **105**, 063723 (2022). DOI: 10.1103/physreva.105.063723
- [23] Н.В. Ларионов. ЖЭТФ, **161**, 166 (2022). DOI: 10.31857/S004445102202002X
- [24] B. Parvin. Annals of Physics, **471**, 169832 (2024). DOI: 10.1016/j.aop.2024.169832
- [25] A.H. Nayfeh. *Perturbation Methods* (Wiley. Interscience, N.Y., 2000).
- [26] М.О. Скалли, М.С. Зубайри. *Квантовая оптика*, под ред. В.В. Самарцева (Физматлит, М., 2003).
- [27] H.J. Carmichael. *Statistical methods in quantum optics I: master equations and Fokker-Planck equations* (Springer Science and Business Media, 2013).
- [28] Э. Маделунг. *Математический аппарат физики. Справочное руководство*, под ред. В.И. Левина, Изд. 2-е, стер. (Наука, М., 1968).
- [29] A.D. Polyandin, V.F. Zaitsev. *Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. (Chapman and Hall/CRC Press, London, 2003).
- [30] B. Daeubler, H. Risken, L. Schoendoff. Phys. Rev. A, **48**, 3955 (1993). DOI: 10.1103/PhysRevA.48.3955
- [31] А.И. Ансельм. *Основы статистической физики и термодинамики* (Лань, СПб., 2022).
- [32] Д.Ф. Смирнов, А.С. Трошин. УФН, **153**, 233 (1987). DOI: 10.3367/UFNr.0153.198710b.0233
- [33] Л. Мандель, Э. Вольф. *Оптическая когерентность и квантовая оптика* (Физматлит, Москва, 2000).
- [34] M.O. Scully, W.E. Lamb. Phys. Rev., **159**(2), 208 (1967). DOI: 10.1103/physrev.159.208
- [35] M.G. Raizen, R.J. Thompson, R.J. Brecha, H.J. Kimble, H.J. Carmichael. Phys. Rev. Lett., **63**, 240 (1989). DOI: 10.1103/PhysRevLett.63.240
- [36] R.B. Levien, M.J. Collett, D.F. Walls. Phys. Rev. A, **47**, 5030 (1993). DOI: 10.1103/physreva.47.5030
- [37] S. Ashhab, J.R. Johansson, A.M. Zagoskin, F. Nori. New J. Physics, **11**, 023030 (2008). DOI: 10.1088/1367-2630/11/2/023030
- [38] С.О. Тарасов, С.Н. Андрианов, Н.М. Арсланов, С.А. Моисеев. Известия РАН. Серия физическая, **82** (8), 1148 (2018). DOI: 10.3103/S1062873818080415
- [39] Е.Н. Попов, В.А. Решетов. Письма в ЖЭТФ, **111**, 846 (2020). DOI: 10.31857/S1234567820120113
- [40] А.А. Sokolova, G.P. Fedorov, E.V. Il'ichev, O.V. Astafiev. Phys. Rev. A, **103**, 013718 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevA.103.013718
- [41] Y.-W. Lu, W. Li, R. Liu, Y. Wu, H. Tan, Y. Li, J.-F. Liu. Phys. Rev. B, **106**, 115434 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevB.106.115434

- [42] S. Vlasenko, A. Mikhalychev, S. Pakniyat, G. Hanson, A. Boag, G. Slepian, D. Mogilevtsev. *Advanced Quantum Technologies*, **6**, (2023). DOI: 10.1002/qute.202300060
- [43] A. Dey, A. Pal, S.D. Gupta, B. Deb. *Phys. Scr.*, **98**, 065527 (2023). DOI: 10.1088/1402-4896/acd4f5
- [44] A.S. Kuraptsev, I.M. Sokolov. *Phys. Rev. A*, **112**, 013702 (2025). DOI: 10.1103/s85r-vx8t
- [45] E.N. Popov, A.I. Trifanov, M.A. Moskalenko, V.A. Reshetov. *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, **16**, 176 (2025). DOI: 10.17586/2220-8054-2025-65-2-176-182
- [46] J. McKeever, A. Boca, A.D. Boozer, J.R. Buck, H.J. Kimble. *Nature*, **425**, 268 (2003). DOI: 10.1038/nature01974
- [47] K.M. Birnbaum, A. Boca, R. Miller, A.D. Boozer, T.E. Northup, H.J. Kimble. *Nature*, **436**, 87 (2005). DOI: 10.1038/nature03804
- [48] D. Englund, A. Faraon, I. Fushman, N. Stoltz, P. Petroff, J. Vuckovic. *Nature*, **450**, 857 (2007). DOI: 10.1038/nature06234
- [49] M. Nomura, N. Kumagai, S. Iwamoto, Y. Ota, Y. Arakawa. *Opt. Express*, **17**, 15975 (2009). DOI: 10.1364/OE.17.015975
- [50] M. Nomura, N. Kumagai, S. Iwamoto, Y. Ota, Y. Arakawa. *Nat. Phys.*, **6**, 279 (2010). DOI: 10.1038/nphys1518
- [51] F. Dubin, C. Russo, H. Barros, A. Stute, C. Becher, P. Schmidt, R. Blatt. *Nat. Phys.*, **6**, 350 (2010). DOI: 10.1038/nphys1627
- [52] A. Reiserer, G. Rempe. *Rev. Mod. Phys.*, **87**, 1379 (2015). DOI: 10.1103/RevModPhys.87.1379
- [53] C. Gies, F. Gericke, P. Gartner, S. Holzinger, C. Hopfmann, T. Heindel, J. Wolters, C. Schneider, M. Florian et al. *Phys. Rev. A*, **96**, 023806 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevA.96.023806
- [54] M. Mantovani, A.D. Armour, W. Belzig, G. Rastelli. *Phys. Rev. B*, **99**, 045442 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevB.99.045442
- [55] N. Tomm, S. Mahmoodian, N.O. Antoniadis et al. *Nat. Phys.*, **19**, 857 (2023). DOI: 10.1038/s41567-023-01997-6
- [56] A.A. Sokolova, D.A. Kalacheva, G.P. Fedorov, O.V. Astafiev. *Phys. Rev. A*, **107**, L031701 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevA.107.L031701.
- [57] R. Sett, F. Hassani, D. Phan, S. Barzanjeh, A. Vukics, J.M. Fink. *PRX Quantum*, **5**, 010327 (2024). DOI: 10.1103/PRXQuantum.5.010327
- [58] Z. Wang, S. Guan, G. Teng et al. *Quantum Front*, **4**, 10 (2025). DOI: 10.1007/s44214-025-00083-7
- [59] S. Ritter, C. Nolleke, C. Hahn et al. *Nature*, **484**, 195 (2012). DOI: 10.1038/nature11023
- [60] И.Н. Карцан, В.С. Аверьянов. *Защита информации. Ин-сайд*, **3** (111), 50 (2023). EDN: EQZKRC