Физика твердого тела, 2026, том 68, вып. 1

03,10,11

Неэрмитов след в решении задачи о движении носителей в графене в скрещенных полях

© *Е.Л. Румянцев, А.В. Германенко*

ФГАОУ ВО „Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина“,
Екатеринбург, Россия

E-mail: alexander.germanenko@urfu.ru

Поступила в Редакцию 21 июля 2025 г.
В окончательной редакции 19 ноября 2025 г.
Принята к публикации 21 января 2026 г.

Спектр носителей в графене в скрещенных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях получен в рамках алгебраического подхода. Данное рассмотрение основано на градиентно-инвариантных коммутационных свойствах кинетических импульсов, что исключает необходимость фиксации конкретной функциональной зависимости вектор потенциала. Особенное внимание уделено анализу неэрмитовой составляющей в эффективном Шредингер-подобном гамильтониане, ипользуемом для описания системы. Обсуждены эффекты, связанные с этим необычным свойством, и прием, позволяющий вернуться к эрмитовому описанию, соответствующему первоначальной постановке задачи.

Ключевые слова: графен, энергетический спектр, скрещенные электрические и магнитные поля.

DOI: 10.61011/FTT.2026.01.62572.207-25

1. Введение

Спектр носителей в графене в присутствии скрещенных постоянных и однородных магнитном и электрических полях обычно рассматривается в рамках подхода Фока-Фейнмана-Гель-Манна [1,2], что обусловлено формальным подобием релятивистского гамильтониана Дирака и **kp** гамильтониана графена. Решение Дирак-подобных уравнений в графене, как правило, сводится к решению дифференциальных уравнений второго порядка, подобных шредингеровским, с помощью так называемой операции „квадрирования“ [3,4]. Подобный подход, однако, требует фиксации конкретной калибровки вектора потенциала, что противоречит принципу градиентной инвариантности. В этой связи особое значение приобретает так называемый алгебраический подход, основанный на общепринятых градиентно-инвариантных коммутационных свойствах кинетических импульсов [5]

$$[\pi_x, \pi_y] = i/l_B^2 \tag{1}$$

зависящих только от интенсивности магнитного поля B. В этом выражении $\widehat{\mathbf{n}} = \widehat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}$, $l_B = \sqrt{1/|eB|}$ — магнитная длина. В дальнейшем мы используем систему единиц $\hbar = c = 1$. Спектр задачи и волновые функции в рамках данного рассмотрения могут быть получены без фиксации конкретного функционального вида вектор-потенциала. В качестве примера применения данного подхода, напомним, как он работает при решении хорошо известной задачи о движении электрона в 2D пленке графена в присутствии статического однородного поперечного магнитного поля. В этой связи, используя коммутационные соотношения для кинетических импульсов, удобно перейти к понижающим (аннигилирующим) и повышающим (порождающим) Бозе операторам $[a, a^+] = 1$

$$a^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(\widehat{\pi}_x - i\widehat{\pi}_y), \quad a = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(\widehat{\pi}_x + i\widehat{\pi}_y), \tag{2}$$

kp — гамильтониан графена в окрестности точки K зоны Бриллюэна в этих операторах имеет вид

$$\widehat{H} = v_F\sigma_x\widehat{\pi}_x + v_F\sigma_y\widehat{\pi}_y = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{v_F\sqrt{2}}{l_B}a^+ \\ \dfrac{v_F\sqrt{2}}{l_B}a & 0 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Собственные значения ε и собственные вектора $|\varphi_{\pm,n}\rangle$ задачи легко вычисляются

$$\varepsilon = \pm\frac{v_F\sqrt{2n}}{l_B}\,|\varphi_{\pm,n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} |n\rangle \\ \pm|n-1\rangle \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Как видно, ни на одном этапе вычислений в дираковском ket-bra представлении, нам не потребовалось использовать конкретный вид вектор потенциала, что необходимо при аналитическом решении в шредингеровском координатном представлении. Как будет показано в дальнейшем, проблема движения в скрещенных постоянных и однородных магнитном и электрическом полях также может быть аналогично решена без выбора конкретного вида вектор-потенциала. Вариант подобного рассмотрения, предложенный в [6], не может рассматриваться, как пример заявленного алгебраического подхода, поскольку он основан с самого начала на выборе фиксированной линейной калибровки Ландау $\mathbf{A} = (-yB, 0)$. Такое рассмотрение противоречит самой идее алгебраического подхода, основанного только на коммутационных соотношениях, зависящих от интенсивности полей. Необходимо отметить, что предложенное авторами рассмотрение представляется нам необоснованно усложненным. В данной статье мы покажем, что существует простой в решении и удобный для интерпретации алгебраический подход к решению данной задачи.

2. Неэрмитов след в проблеме скрещенных полей

Гамильтониан, описывающий движение носителей в графене в присутствии скрещенных однородных, постоянных электрическом ($E_x \neq 0$) и магнитном (перпендикулярном плоскости графена $H_z \neq 0$) полях в окрестности точки K, имеет вид

$$\widehat{H} = \begin{pmatrix} -eEx & v_F\widehat{\pi}^+ \\ v_F\widehat{\pi}^- & -eEx \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где $\widehat{\pi}^{\pm} = \widehat{\pi}_x \mp i\widehat{\pi}_y$. Решение уравнения $\widehat{H}|\Psi\rangle - \varepsilon|\Psi\rangle = 0$ будет получено с использованием подхода, изложенного в монографии [7], поскольку рассматриваемая задача формально математически аналогична релятивистской задаче Дирака. С этой целью определим следующие операторы

$$\widehat{H}_+ = \begin{pmatrix} -(eEx+\varepsilon) & v_F\widehat{\pi}^+ \\ v_F\widehat{\pi}^- & -(eEx+\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$$\widehat{H}_- = \begin{pmatrix} eEx+\varepsilon & v_F\widehat{\pi}^+ \\ v_F\widehat{\pi}^- & eEx+\varepsilon \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Собственные значения ε и собственные вектора $|\Psi\rangle$ являются решениями уравнения

$$\widehat{H}_+|\Psi\rangle = 0. \qquad (7)$$

Волновую функцию будем искать в виде (множитель l_B/v_F добавлен из размерностных соображений)

$$|\Psi\rangle = \frac{l_B}{v_F}\widehat{H}_-|\Psi\rangle. \qquad (8)$$

$|\Psi\rangle$ и ε являются решениями уравнения, подобного уравнению Шредингера

$$\widehat{H}_+\widehat{H}_-|\Psi\rangle = 0. \qquad (9)$$

Важное свойство оператора $\widehat{H}_+\widehat{H}_-$ состоит в том, что он действует раздельно в координатном пространстве и в пространстве псевдо-спиновых переменных графена

$$\widehat{H}_+\widehat{H}_- = [v_F^2(\widehat{\pi}_x^2 + \widehat{\pi}_y^2) - (eEx+\varepsilon)^2]I + \widehat{H}_S, \qquad (10)$$

$$\widehat{H}_S = -\frac{v_F^2}{l_B^2}[\sigma_z + i\delta\sigma_x],$$

где $\delta = v_d/v_F$, $v_d = E/B$ — аналог дрейфовой скорости в классической задаче. Подобный прием „квадрирования“ исходной системы уравнений используется в основном для решения релятивистской задачи Дирака о движении электрона в электромагнитном поле [1–4]. Наше решение уравнения (9) стартует с диагонализации оператора $\widehat{H}_S$ путем вращения в пространстве псевдо-спинов. Отметим, что в случае проблемы Дирака подобный оператор действует в реальном спиновом пространстве. Реальные собственные значения $\widehat{H}_S$ имеют вид

$$\lambda_\pm = \pm\frac{v_F^2}{l_B^2}\mu, \qquad (11)$$

где $\mu = \sqrt{1-\delta^2}$. Собственные состояния $\widehat{H}_S$ имеют вид

$$\widehat{H}_S|r_\pm\rangle = \lambda_\pm|r_\pm\rangle,\ |r_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \dfrac{-i\delta}{\sqrt{1+\mu}} \\ \sqrt{1+\mu} \end{pmatrix},$$

$$|r_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \sqrt{1+\mu} \\ \dfrac{i\delta}{\sqrt{1+\mu}} \end{pmatrix}. \qquad (12)$$

Оставшаяся шредингеровская часть псевдо-гамильтониана $\widehat{H}_+\widehat{H}_-$ легко диагонализируется поскольку, как будет показано ниже, эта задача математически эквивалентна задаче о квантовом осцилляторе в присутствии постоянной возмущающей силы. На этом этапе необходимо отметить необычное свойство используемого оператора $\widehat{H}_+\widehat{H}_-$, на которое почему-то не обратили внимания ни в одной из известных нам статей, использующих рассмотренный прием „квадрирования“. Подчеркнем, что эта проблема существует и для релятивистского уравнения Дирака. Дело в том, что оператор $\widehat{H}_+\widehat{H}_-$ существенно **неэрмитов**, благодаря присутствию псевдоспинового гамильтониана $\widehat{H}_S \neq \widehat{H}_S^{\dagger}$. Гамильтониан подобного типа является унитарно-эквивалентным хорошо известному неэрмитовому гамильтониану, который используется для демонстрации необычных следствий неэрмитовости [8,9]. Появления данной особенности не избежали и авторы работы [6], предложившие свой вариант „квадрирования“. Подчеркнем, что $\widehat{H}_S$ становится эрмитовым в отсутствие внешнего электрического поля.

Несмотря на указанные особенности, связанные с неэрмитовостью псевдо-гамильтониана, мы продолжим рассмотрение, основываясь на том, что собственные значения данной псевдо-спиновой задачи тем не менее действительны. Соответственно, мы будем искать решение уравнения (9) в виде $|\Phi_\pm\rangle = |r_\pm\rangle|\varphi_\pm\rangle$, где $|\varphi_\pm\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$\left[v_F^2(\widehat{\pi}_x^2 + \widehat{\pi}_y^2) - (eEx+\varepsilon)^2 + \lambda_\pm\right]|\varphi_\pm\rangle = 0. \qquad (13)$$

3. Операторы псевдо-момента

На данной стадии рассмотрения удобно использовать следующее представление оператора координаты $\widehat{\mathbf{r}}$ [10]

$$\widehat{\mathbf{r}} = \widehat{\boldsymbol{\rho}} + \widehat{\mathbf{R}}, \tag{14}$$

где $\widehat{\boldsymbol{\rho}}$ — описывает „быстрое“ циклотронное вращение, а вектор $\widehat{\mathbf{R}}$ при классическом рассмотрении определяет центр вращения (guiding center vector). Подобное разделение используется при описании поведения плазмы в слабо-меняющихся как в пространстве, так и во времени электромагнитных полях. Разделение оператора координаты на две составляющие, имеющие вполне определенный физический смысл, также многократно использовалось и используется при квантовом описании поведения электрона в магнитном поле. Впервые оно появилось в работе [11]. В этой статье приведены соответствующие коммутационные соотношения для операторов $\widehat{\mathbf{R}}$, задающих местоположение циклотронной орбиты (guiding center vector), которые обеспечивают коммутацию операторов координат. Поскольку циклотронное движение удобно представлять через операторы кинетических моментов

$$\widehat{\boldsymbol{\rho}} = l_B^2(-\widehat{\pi}_y, \widehat{\pi}_x). \tag{15}$$

вектор-операторы центра вращения $\widehat{\mathbf{R}}$ могут быть определены по аналогии с (15) через введение так называемых псевдо-моментов [12]

$$\widehat{\mathbf{k}} = \widehat{\boldsymbol{\pi}} - e[\mathbf{r} \times \mathbf{B}]. \tag{16}$$

Поскольку при этом

$$\widehat{\mathbf{R}} = l_B^2[\widehat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B}]/|\mathbf{B}|, \tag{17}$$

можно показать, используя результаты [11], что определенные таким образом операторы псевдо-моментов подчиняются следующим коммутационным соотношениям

$$[\widehat{k}_x, \widehat{k}_y] = -i/l_B^2, \quad [\widehat{k}_i, \widehat{\pi}_j] = 0. \tag{18}$$

Аналог данного разбиения, например, используется в работе [13] при описании релятивистских уровней Ландау, где соответствующие операторы носят названия циклотронных и магнетронных. Необходимо подчеркнуть, что как следует из их определения (16), операторы псевдо-моментов $\widehat{\mathbf{k}}$ являются строго градиентно-инвариантными. Действительно, кинетические моменты градиентно-инвариантны по построению, а операторы координат нечувствительны к градиентным преобразованиям по определению. В данных операторах уравнение (13) приобретает вид

$$\left[v_F^2\widehat{\pi}_x^2 + v_F^2\mu^2\widehat{\pi}_y^2 + 2\widehat{\varepsilon}v_d\widehat{\pi}_y - \widehat{\varepsilon}^2 + \lambda_\pm\right]|\varepsilon_\pm\rangle = 0, \tag{19}$$

где $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon + v_d\widehat{k}_y$. Поскольку $\widehat{k}_y$ коммутирует с $\widehat{H}_+\widehat{H}_-$, решение уравнения (19) можно искать в виде

$$|\varphi_\pm\rangle = |\psi_\pm\rangle_a|k_y\rangle_b. \tag{20}$$

В этом выражении $|k_y\rangle_b$ является собственной функцией оператора $\widehat{k}_y$. Используя приведенные коммутационные соотношения (18) для псевдо-импульсов определим соответствующие Бозе операторы b и b^+ ($[b, b^+] = 1$)

$$b = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(\widehat{k}_y + i\widehat{k}_x), \; b^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}}(\widehat{k}_y - i\widehat{k}_x), \; b|0\rangle_b = 0. \tag{21}$$

Следуя [14–16], рассмотрим состояние

$$|k_y\rangle_b = \frac{e^{l_B^2k_y^2/2}}{(2\pi)^{1/4}}\sqrt{2}l_B\int\limits_{-\infty}^{\infty}dk_x|\sqrt{2}kl_B\rangle_b$$

$$= \frac{e^{l_B^2k_y^2/2}\pi^{1/4}}{2^{3/4}}e^{-(\sqrt{2}k_yl_B - \widehat{b}^+)^2/2}|0\rangle_b, \tag{22}$$

где $k = k_y + ik_x$, $|\sqrt{2}kl_B\rangle$ — когерентное состояние $b|\sqrt{2}kl_B\rangle = \sqrt{2}kl_B|\sqrt{2}kl_B\rangle$. Легко установить справедливость следующего коммутационного соотношения

$$be^{-(\sqrt{2}k_yl_B - \widehat{b}^+)^2/2} = e^{-(\sqrt{2}k_yl_B - \widehat{b}^+)^2/2}\left[\widehat{b} + \sqrt{2}k_yl_B - \widehat{b}^+\right]. \tag{23}$$

Используя (23) легко показать, что (22) есть искомый собственный вектор оператора $\widehat{k}_y$

$$\widehat{k}_y|k_y\rangle_b = k_y|k_y\rangle_b. \tag{24}$$

Состояния $|k_y\rangle_b$ нормированы на дельта функцию Дирака

$$\langle k_y'|k_y\rangle_b = \delta(k_y' - k_y). \tag{25}$$

Это условие является следствием следующего интегрального равенства [16]

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dydy'}{\pi}\langle z'/z\rangle = \iint\limits_{-\infty}^{\infty}dydy'\exp -\frac{1}{2}\left(|z|^2 + |z'|^2 + 2z'^*z\right)$$

$$= (2)^{-1/2}\pi^{3/2}e^{-x^2/2}\delta(x - x'), \tag{26}$$

где $z = x + iy$. Используя полученные собственные вектора $|k_y\rangle_b$, $\widehat{\varepsilon}$ — оператор в уравнении (19) можно рассматривать как c-число $\widehat{\varepsilon} \to \varepsilon = \varepsilon + v_dk_y$. При этом уравнение, определяющее волновую функцию $|\psi_\pm\rangle_a$ (19), приобретает вид

$$\left[v_F^2\widehat{\pi}_x^2 + v_F^2\mu^2\widehat{\pi}_y^2 + 2\varepsilon v_d\widehat{\pi}_y - \varepsilon^2 + \lambda_\pm\right]|\psi_\pm\rangle_a = 0. \tag{27}$$

4. 1D отображение

На данном этапе рассмотрения воспользуемся эффективным 1D свойством уравнения (27). Существование точного соответствия описания 2D системы квантового Холла эффективной 1D системе обсуждается, например, в работе [17]. Подобное „проектирование“ осуществляется путем определения операторов квази-координаты $\widehat{Q}$ и квази-момента $\widehat{P}$

$$\widehat{Q} = -l_B^2\widehat{\pi}_y, \quad \widehat{P} = \widehat{\pi}_x. \tag{28}$$

Эти операторы подчиняются стандартному коммутационному соотношению координата-импульс $[\widehat{Q}, \widehat{P}] = i$. Используя введенные операторы (28), определим соответствующие Бозе операторы рождения/уничтожения $\widehat{c}, \widehat{c}^{+}$

$$\widehat{c} = \frac{l_B}{\sqrt{2\mu}}\left[\widehat{P} - i\,\frac{\mu\widehat{Q}}{l_B^2}\right], \widehat{c}^{+}=\frac{l_B}{\sqrt{2\mu}}\left[\widehat{P} + i\,\frac{\mu\widehat{Q}}{l_B^2}\right], [\widehat{c}, \widehat{c}^{+}] = 1. \tag{29}$$

В дальнейшем нам понадобится связь операторов $\widehat{c}$, диагонализирующих неэрмитов гамильтониан, с операторами $\widehat{a}$ определенными в (2)

$$\widehat{c} = \frac{l_B}{\sqrt{2\mu}}[\widehat{\pi}_x + i\mu\widehat{\pi}_y]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\mu}}[(1+\mu)\widehat{a} + (1-\mu)\widehat{a}^{+}] = u\widehat{a} + v\widehat{a}^{+}, \tag{30}$$

где

$$u = \cosh\varphi = (1+\mu)/2\sqrt{\mu},\ v = \sinh\varphi = (1-\mu)/2\sqrt{\mu}.$$

При таком переопределении искомое решение уравнения (27) становится эквивалентно решению 1D задачи Шредингера о поведении квантового осциллятора при приложении внешней постоянной силы [18]

$$\left[\frac{v_F^2\mu}{l_B^2}\,(2\widehat{c}^{+}\widehat{c}+1) + i2\varepsilon\,\frac{v_d}{l_B\sqrt{2\mu}}\,(\widehat{c}^{+}-\widehat{c}) - \varepsilon^2 + \lambda_{\pm}\right] \times |\Psi_{\pm}\rangle_c = 0. \tag{31}$$

Собственные вектора $|\Psi_{\pm}\rangle_c$, являющиеся решением (27), впервые появились в работе [19] под названием „полу-когерентные состояния“, или как они были названы в дальнейшем, „обобщенные когерентные состояния“ [20]. Для их определения зададим оператор сдвига

$$D(\alpha_\varepsilon) = \exp[\alpha_\varepsilon\widehat{c}^{+} - \alpha_\varepsilon^{*}\widehat{c}],\ \ \alpha_\varepsilon = -i2\,\frac{\delta l_B\varepsilon}{(2\mu)^{3/2}v_F}. \tag{32}$$

Используя (32), обобщённое когерентное состояние, являющееся решением уравнения (31), можно представить в виде [20]

$$|\Psi_{\pm}\rangle = |n, \alpha_\varepsilon\rangle_c = D(\alpha_\varepsilon)|n\rangle_c. \tag{33}$$

Используя

$$|\Phi\rangle_{\pm,n,k_y} = |r_{\pm}\rangle|n, \alpha_\varepsilon\rangle_c|k_y\rangle_b, \tag{34}$$

искомый спектр задачи определяется из уравнения

$$\mu^3\,\frac{v_F^2}{l_B^2}\,(2n+1\pm 1) - \varepsilon_n^2 = 0. \tag{35}$$

Здесь $\varepsilon_n = \varepsilon^{e,h}_{\pm,n} + v_d k_y$. Окончательный ответ

$$\varepsilon^{e,h}_{\pm,n} = -v_d k_y + s\mu^{3/2}\,\frac{v_F}{l_B}\,\sqrt{2n+1\pm 1}. \tag{36}$$

В этом выражении $s = +1(c)$ относится к зоне проводимости, а $s = -1(h)$ к валентной зоне. Полученный результат совпадает с ответами, полученными в совершенно отличных подходах, включающих квазиклассическое рассмотрение [21], метод псевдо-лоренцевских преобразований [22–24], а также вариант алгебраического решения [6]. Предложенное нами алгебраическое рассмотрение представляется более простым по сравнению с [6]. Необходимо отметить, что авторы в данной работе используют фиксированную функциональную зависимость вектор потенциала (калибровка Ландау), что противоречит самой идеи алгебраического подхода к решению данной задачи. Проверим, совпадает ли полученный ответ с известным ответом, полученным в предельном случае отсутствия электрического поля ($E = v_d = \delta = 0$, $\mu = 1$, $\widehat{c} = \widehat{a}$). В этом случае неэрмитовая псевдо-спиновая часть гамильтониана становится эрмитовой и выражение для собственных векторов $|r_{\pm}\rangle$ упрощается

$$|r_{+}\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ |r_{-}\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}. \tag{37}$$

Удивление вызывает тот факт, что в нашем рассмотрении мы получаем двукратное вырождение для данного положительного (отрицательного) значения собственной энергии

$$\varepsilon^{e}_{+,n-1} = \frac{v_F}{l_B}\sqrt{2(n-1)+2} = \varepsilon^{e}_{-,n} = \frac{v_F}{l_B}\,\sqrt{2n}. \tag{38}$$

Поскольку в данном случае гамильтониан не зависит от псевдо-импульсов, которые теперь служат лишь для нумерации вырожденной системы собственных векторов, принадлежащих данному уровню Ландау, мы можем опустить зависимость от k_i в выражениях для двух векторов. Поскольку в данном случае $\delta = 0$ ($\mu = 1$),

$$|\Phi\rangle_{e,+,n-1,k_y} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}|n-1\rangle_a,\ |\Phi\rangle_{e,-,n,k_y} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}|n\rangle_a. \tag{39}$$

В то же время факт, что данному положительному (отрицательному) значению собственной энергии принадлежит один и только один собственный вектор, легко проверяется при непосредственном решении уравнения $\widehat{H}_{+}|\Psi\rangle = 0$ ($E = 0$). Покажем, что в определении „правильных“ собственных векторов $|\Psi\rangle$ в предложенном подходе решающее значение приобретает оператор $\widehat{H}_{-}$, действующий согласно определению (8) $|\Psi\rangle = \widehat{H}_{-}|\Phi\rangle$. Напомним, что подобная процедура возвращения к эрмитовому описанию изложена в монографии [7] при решении релятивистского уравнения Дирака. В присутствии лишь магнитного поля

$$\widehat{H}_{-} = \begin{pmatrix}\varepsilon & v_F\pi^{+}\\ v_F\pi^{-} & \varepsilon\end{pmatrix}. \tag{40}$$

Применение оператора $\widehat{H}_-$ приводит для обоих векторов (39) к результату

$$|\Psi\rangle_{e,+,n-1,k_y} = \frac{l_B}{\upsilon_F}\widehat{H}_-|r_+\rangle|n-1\rangle_a$$

$$= \sqrt{2}\begin{pmatrix}\sqrt{n} & a^+\\ a & \sqrt{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}|n-1\rangle_a = \sqrt{2n}\begin{pmatrix}|n\rangle_a\\ |n-1\rangle_a\end{pmatrix},$$

$$|\Psi\rangle_{e,-,n,k_y} = \frac{l_B}{\upsilon_F}\widehat{H}_-|r_-\rangle|n\rangle_a$$

$$= \sqrt{2}\begin{pmatrix}\sqrt{n} & a^+\\ a & \sqrt{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}|n\rangle_a = \sqrt{2n}\begin{pmatrix}|n\rangle_a\\ |n-1\rangle_a\end{pmatrix}. \quad (41)$$

Использование $\widehat{H}_-$ сохраняет *status quo*, поскольку в обоих случаях мы получаем один и только один собственный вектор, принадлежащий данному (невырожденному) значению энергии, как и должно быть. Легко показать, что подобный „коллапс“ собственных векторов справедлив и для отрицательных значений энергий. Докажем, что подобное фиктивное вырождение отсутствует и в общем случае при наличии электрического поля. Рассмотрим ненормированные собственные вектора $|\Psi\rangle_{+,n-1,k_y}$ и $|\Psi\rangle_{-,n,k_y}$, которые принадлежат одному и тому же электронному уровню энергии $\varepsilon_n = \upsilon_F\mu^{3/2}\sqrt{2n}/l_B - \upsilon_d k_y$

$$|\Phi\rangle_{+,n-1,k_y} = D(\alpha_{\varepsilon_n})|r_+\rangle|n-1\rangle_c|k_y\rangle_b,$$
$$|\Phi\rangle_{-,n,k_y} = D(\alpha_{\varepsilon_n})|r_-\rangle|n\rangle_c|k_y\rangle_b. \quad (42)$$

Для доказательства отсутствия реального вырождения в рассматриваемой задаче после применения дополнительной операции мы должны получить

$$|\Psi\rangle_{n,k_y} = \frac{l_B}{\upsilon_F}\widehat{H}_-|\Phi\rangle_{+,n-1,k_y} = \frac{l_B}{\upsilon_F}\widehat{H}_-|\Phi\rangle_{-,n,k_y}. \quad (43)$$

где $\widehat{H}_-$ (6) имеет вид

$$\widehat{H}_-(\varepsilon_n) = \frac{\upsilon_F\sqrt{2}}{l_B}$$
$$\times\begin{pmatrix}-i\,\frac{\delta}{2}\,(\widehat{a}^+-\widehat{a})+\frac{l_B}{\upsilon_F\sqrt{2}}\,\varepsilon_n & \widehat{a}^+\\ \widehat{a} & -i\,\frac{\delta}{2}\,(\widehat{a}^+-\widehat{a})+\frac{l_B}{\upsilon_F\sqrt{2}}\,\varepsilon_n\end{pmatrix}$$
$$= \frac{\upsilon_F\sqrt{2}}{l_B}$$
$$\times\begin{pmatrix}-i\,\frac{\delta}{2}\,(u+\upsilon)(\widehat{c}^+-\widehat{c})+\frac{l_B}{\upsilon_F\sqrt{2}}\,\varepsilon_n & (u\widehat{c}^+-\upsilon\widehat{c})\\ (u\widehat{c}-\upsilon\widehat{c}^+) & -i\,\frac{\delta}{2}\,(u+\upsilon)(\widehat{c}^+-\widehat{c})+\frac{l_B}{\upsilon_F\sqrt{2}}\,\varepsilon_n\end{pmatrix}. \quad (44)$$

Используя полученные выражения для состояний $|\Phi\rangle_{\pm,n,k_y}$ (42) для доказательства (43) достаточно показать, что

$$D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n})\widehat{H}_-D(\alpha_{\varepsilon_n})|r_+\rangle|n-1\rangle_c = D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n})\widehat{H}_-D(\alpha_{\varepsilon_n})|r_-\rangle|n\rangle_c. \quad (45)$$

Используя определение оператора $D(\alpha_{\varepsilon_n})$ (32) и полученное выражение (44) для $\widehat{H}_-(\varepsilon_n)$, оператор $D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n})\widehat{H}_-D(\alpha_{\varepsilon_n})$ можно представить в виде

$$D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n})\widehat{H}_-D(\alpha_{\varepsilon_n}) = \frac{\upsilon_F\sqrt{2n}}{l_B\sqrt{mu}}\,\widehat{\theta} + \frac{\upsilon_F}{l_B\sqrt{2\mu}}\,[\widehat{\vartheta}\widehat{c}^+ + \vartheta^\dagger\widehat{c}], \quad (46)$$
$$\widehat{\theta} = \begin{pmatrix}1 & i\delta\\ -i\delta & 1\end{pmatrix},\ \widehat{\vartheta} = \begin{pmatrix}-i\delta & 1+\mu\\ \mu-1 & -i\delta\end{pmatrix}.$$

Действие операторов $\widehat{\theta}$ и $\widehat{\vartheta}$ на псевдо-спиновые вектора $|r_+\rangle$ и $|r_-\rangle$ задается равенствами

$$\widehat{\theta}|r_+\rangle = \mu|r_+\rangle^*\ \widehat{\theta}|r_-\rangle = \mu|r_-\rangle^*\ \widehat{\vartheta}|r_+\rangle = 2\mu|r_-\rangle^*$$
$$\widehat{\vartheta}|r_-\rangle = 0\ \widehat{\vartheta}^\dagger|r_-\rangle = 2\mu|r_+\rangle^*\ \widehat{\vartheta}^\dagger|r_+\rangle = 0. \quad (47)$$

Используя эти равенства, получаем искомое выражение для невырожденной волновой функции

$$|\Psi\rangle_n = \widehat{H}_-|\Phi\rangle_{+,n-1,k_y} = \widehat{H}_-|\Phi\rangle_{-,n,k_y}$$
$$= \mu\,\frac{\upsilon_F\sqrt{2n}}{l_B}\,D(\alpha_{\varepsilon_n})\big[|r_+\rangle^*|n-1\rangle_c + |r_-\rangle^*|n\rangle_c\big]. \quad (48)$$

Это важный, хотя и ожидаемый результат. Мнимое вырождение, порожденное „квадрированием“ и обусловленное присутствием неэрмитовой составляющей в эффективном гамильтониане, которое проявляется в неортогональности собственных псевдо спиновых векторов, исчезает при учете операции $\widehat{H}_-$. На необходимость дополнительной операции, подобной рассмотренной в нашей работе, для получения „правильных“ волновых функций указано в монографии [7]. Однако, поскольку речь идет о решении соответствующих дифференциальных уравнений, в [7] это мотивируется необходимостью избавления от „лишних“ решений, возникающих при рассмотрении квадрированных уравнений второго порядка, в то время как первоначально мы стартуем с рассмотрения дифференциальных уравнений первого порядка. Как следует из предложенного в работе подхода, это не совсем точное утверждение. Предложенное дополнительное операторное действие призвано привести к исчезновению мнимого двукратного вырождения обеспечив коллапс соответствующих волновых векторов к одному выражению и ортогональности полученных собственных волновых функций.

5. Заключение

В настоящей работе мы предложили последовательный алгебраический подход, независящий от необходимости выбора конкретной калибровки вектор потенциала к проблеме нахождения спектра носителей в графене в присутствии скрещенных постоянных и однородных магнитном и электрическом полях. Решение получено в рамках подхода Фока-Фейнмана-Гель-Манна, что обусловлено формальным подобием релятивистского гамильтониана Дирака и **kp** гамильтониана графена и основано на градиентной инвариантности коммутационных соотношений операторов и псевдо-импульсов. Решение системы Дирак-подобных уравнений в графене как правило сводится к решению дифференциальных уравнений второго порядка подобных шредингеровскому с помощью операции „квадрирования". Однако подобное рассмотрение требует фиксации конкретного функционального вида вектор-потенциала. Рассмотренный нами алгебраический подход с использованием операторов псевдо-импульсов позволяет полностью отказаться от конкретного выбора калибровки вектор-потенциала, что отличает его от традиционного подхода к данной проблеме. Показано, что особенностью алгебраического решения в скрещенных полях, которое проходит через стадию „квадрирования", является появление неэрмитовой составляющей в псевдо-шредингеровском гамильтониане, действующей в пространстве псевдо-спиновых переменных графена. Отмечено, что аналогичная проблема в данном подходе возникает и при решении релятивистского уравнения Дирака в скрещенных полях [7]. Поскольку данный неэрмитовый гамильтониан инвариантен относительно $\mathscr{PT}$ преобразования, собственные значения его остаются действительными, что позволяет получить действительный спектр задачи, игнорируя отсутствие эрмитовости. Единственным наследием появления неэрмитовости при решении является коллапс уровней Ландау при стремлении дрейфовой скорости к скорости Ферми графена.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания (проект FEUZ-2023-0017).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] V. Fock. Phys. Zeit. Sowjetunion **12**, 404 (1937).
[2] R.P. Feynman, M. Gell-Mann. Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
[3] A.H. MacDonald. Phys. Rev. B **28**, 2235 (1983).
[4] M.M. Nieto, P.L. Taylor. Am. J. Phys. **53**, 234 (1985).
[5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Quantum Mechanics, Pergamon Press, Oxford (1977) .
[6] N.M.R. Peres, E.V. Castro. J. Phys.: Condens. Matter **19**, 406231 (2007).
[7] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. Relativistic Quantum Theory, Pergamon Press (1971).
[8] A. Mostafazadeh. J. Math. Phys. **43**, 3944 (2002) [and citations within].
[9] C.M. Bender. Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
[10] J.R. Cary, A.J. Brizard. Rev. Mod. Phys. **81**, 693 (2009).
[11] M.H. Johnson, B.A. Lippmann. Phys. Rev. **76**, 828 (1949).
[12] G. Konstantinou, K. Moulopoulos. Eur. J. Phys. **37**, 065401 (2016).
[13] D. Jentschura. Phys. Rev. D **108**, 016016 (2023).
[14] H.Y. Fan. Phys. Lett. A **126**, 145 (1987).
[15] H.Y. Fan, L. Fu. J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4987 (2003).
[16] H. Fan, T. Ruan. Comm. Theor. Phys. **3**, 443 (1984).
[17] M. Horsdal, M. Leinaas. Phys. Rev. B **76**, 195321 (2007).
[18] P. Carruthers, M.M. Nieto. Am. J. Phys. **33**, 537 (1965).
[19] M. Boiteux, A. Levelut. J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. **6**, 589 (1973).
[20] M.V. Satyanarayana. Phys. Rev. D **32**, 400 (1985).
[21] Z.Z. Alisultanov. Physica B: Cond. Matt. **438**, 41 (2014).
[22] V. Lukose,R. Shankar, G. Baskaran. Phys. Rev. Lett. **98**, 116802 (2007).
[23] A. Shitov, M. Rudner, N. Gu, M. Katsnelson, L. Levitov. Solid State Comm. **149**, 1087 (2009).
[24] З.З. Алисултанов. ЖЭТФ **152**, 986 (2017).

Редактор Ю.Э. Китаев