

03,10,11

Неэрмитов след в решении задачи о движении носителей в графене в скрещенных полях

© Е.Л. Румянцев, А.В. Германенко

ФГАОУ ВО „Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина“, Екатеринбург, Россия

E-mail: alexander.germanenko@urfu.ru

Поступила в Редакцию 21 июля 2025 г.

В окончательной редакции 19 ноября 2025 г.

Принята к публикации 21 января 2026 г.

Спектр носителей в графене в скрещенных постоянных и однородных электрическом и магнитном полях получен в рамках алгебраического подхода. Данное рассмотрение основано на градиентно-инвариантных коммутационных свойствах кинетических импульсов, что исключает необходимость фиксации конкретной функциональной зависимости вектор потенциала. Особое внимание уделено анализу неэрмитовой составляющей в эффективном Шредингер-подобном гамильтониане, используемом для описания системы. Обсуждены эффекты, связанные с этим необычным свойством, и прием, позволяющий вернуться к эрмитовому описанию, соответствующему первоначальной постановке задачи.

Ключевые слова: графен, энергетический спектр, скрещенные электрические и магнитные поля.

DOI: 10.61011/FTT.2026.01.62572.207-25

1. Введение

Спектр носителей в графене в присутствии скрещенных постоянных и однородных магнитном и электрических полях обычно рассматривается в рамках подхода Фока-Фейнмана-Гель-Манна [1,2], что обусловлено формальным подобием релятивистского гамильтониана Дирака и \mathbf{kp} гамильтониана графена. Решение Дирак-подобных уравнений в графене, как правило, сводится к решению дифференциальных уравнений второго порядка, подобных шредингеровским, с помощью так называемой операции „квадрирования“ [3,4]. Подобный подход, однако, требует фиксации конкретной калибровки вектора потенциала, что противоречит принципу градиентной инвариантности. В этой связи особое значение приобретает так называемый алгебраический подход, основанный на общепринятых градиентно-инвариантных коммутационных свойствах кинетических импульсов [5]

$$[\pi_x, \pi_y] = i/l_B^2 \quad (1)$$

зависящих только от интенсивности магнитного поля B . В этом выражении $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{p}} - e\mathbf{A}$, $l_B = \sqrt{1/|eB|}$ — магнитная длина. В дальнейшем мы используем систему единиц $\hbar = c = 1$. Спектр задачи и волновые функции в рамках данного рассмотрения могут быть получены без фиксации конкретного функционального вида вектор-потенциала. В качестве примера применения данного подхода, напомним, как он работает при решении хорошо известной задачи о движении электрона в 2D пленке графена в присутствии статического однородного поперечного магнитного поля. В этой связи, используя коммутационные соотношения для кинетических импульсов, удобно перейти к понижающим (аннигилиру-

ющим) и повышающим (порождающим) Бозе операторам $[a, a^+] = 1$

$$a^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (\hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y), \quad a = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (\hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y), \quad (2)$$

\mathbf{kp} — гамильтониан графена в окрестности точки K зоны Бриллюэна в этих операторах имеет вид

$$\hat{H} = v_F \sigma_x \hat{\pi}_x + v_F \sigma_y \hat{\pi}_y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{v_F \sqrt{2}}{l_B} a^+ \\ \frac{v_F \sqrt{2}}{l_B} a & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Собственные значения ε и собственные вектора $|\varphi_{\pm, n}\rangle$ задачи легко вычисляются

$$\varepsilon = \pm \frac{v_F \sqrt{2n}}{l_B} |\varphi_{\pm, n}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} |n\rangle \\ \pm |n-1\rangle \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$. Как видно, ни на одном этапе вычислений в дираковском ket-bra представлении, нам не потребовалось использовать конкретный вид вектор потенциала, что необходимо при аналитическом решении в шредингеровском координатном представлении. Как будет показано в дальнейшем, проблема движения в скрещенных постоянных и однородных магнитном и электрическом полях также может быть аналогично решена без выбора конкретного вида вектор-потенциала. Вариант подобного рассмотрения, предложенный в [6], не может рассматриваться, как пример заявленного алгебраического подхода, поскольку он основан с самого начала на выборе фиксированной линейной калибровки Ландау $\mathbf{A} = (-yB, 0)$. Такое рассмотрение противоречит самой идее алгебраического подхода, основанного

только на коммутационных соотношениях, зависящих от интенсивности полей. Необходимо отметить, что предложенное авторами рассмотрение представляется нам необоснованно усложненным. В данной статье мы покажем, что существует простой в решении и удобный для интерпретации алгебраический подход к решению данной задачи.

2. Неэрмитов след в проблеме скрещенных полей

Гамильтониан, описывающий движение носителей в графене в присутствии скрещенных однородных, постоянных электрическом ($E_x \neq 0$) и магнитном (перпендикулярном плоскости графена $H_z \neq 0$) полях в окрестности точки K , имеет вид

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -eEx & v_F \hat{\pi}^+ \\ v_F \hat{\pi}^- & -eEx \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где $\hat{\pi}^\pm = \hat{\pi}_x \mp i\hat{\pi}_y$. Решение уравнения $\hat{H}|\Psi\rangle - \varepsilon|\Psi\rangle = 0$ будет получено с использованием подхода, изложенного в монографии [7], поскольку рассматриваемая задача формально математически аналогична релятивистской задаче Дирака. С этой целью определим следующие операторы

$$\begin{aligned} \hat{H}_+ &= \begin{pmatrix} -(eEx + \varepsilon) & v_F \hat{\pi}^+ \\ v_F \hat{\pi}^- & -(eEx + \varepsilon) \end{pmatrix}, \\ \hat{H}_- &= \begin{pmatrix} eEx + \varepsilon & v_F \hat{\pi}^+ \\ v_F \hat{\pi}^- & eEx + \varepsilon \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (6)$$

Собственные значения ε и собственные вектора $|\Psi\rangle$ являются решениями уравнения

$$\hat{H}_+|\Psi\rangle = 0. \quad (7)$$

Волновую функцию будем искать в виде (множитель l_B/v_F добавлен из размерностных соображений)

$$|\Psi\rangle = \frac{l_B}{v_F} \hat{H}_-|\Psi\rangle. \quad (8)$$

$|\Psi\rangle$ и ε являются решениями уравнения, подобного уравнению Шредингера

$$\hat{H}_+\hat{H}_-|\Psi\rangle = 0. \quad (9)$$

Важное свойство оператора $\hat{H}_+\hat{H}_-$ состоит в том, что он действует раздельно в координатном пространстве и в пространстве псевдо-спиновых переменных графена

$$\hat{H}_+\hat{H}_- = [v_F^2(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2) - (eEx + \varepsilon)^2]I + \hat{H}_S, \quad (10)$$

$$\hat{H}_S = -\frac{v_F^2}{l_B^2} [\sigma_z + i\delta\sigma_x],$$

где $\delta = v_d/v_F$, $v_d = E/B$ — аналог дрейфовой скорости в классической задаче. Подобный прием „квადрирования“ исходной системы уравнений используется в основном для решения релятивистской задачи Дирака о движении электрона в электромагнитном поле [1–4]. Наше решение уравнения (9) стартует с диагонализации оператора \hat{H}_S путем вращения в пространстве псевдо-спинов. Отметим, что в случае проблемы Дирака подобный оператор действует в реальном спиновом пространстве. Реальные собственные значения \hat{H}_S имеют вид

$$\lambda_\pm = \pm \frac{v_F^2}{l_B^2} \mu, \quad (11)$$

где $\mu = \sqrt{1 - \delta^2}$. Собственные состояния \hat{H}_S имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_S|r_\pm\rangle &= \lambda_\pm|r_\pm\rangle, \quad |r_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\delta \\ \sqrt{1+\mu} \\ \sqrt{1+\mu} \end{pmatrix}, \\ |r_-\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{1+\mu} \\ i\delta \\ \sqrt{1+\mu} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Оставшаяся шредингеровская часть псевдо-гамильтониана $\hat{H}_+\hat{H}_-$ легко диагонализуется поскольку, как будет показано ниже, эта задача математически эквивалентна задаче о квантовом осцилляторе в присутствии постоянной возмущающей силы. На этом этапе необходимо отметить необычное свойство используемого оператора $\hat{H}_+\hat{H}_-$, на которое почему-то не обратили внимания ни в одной из известных нам статей, использующих рассмотренный прием „квადрирования“. Подчеркнем, что эта проблема существует и для релятивистского уравнения Дирака. Дело в том, что оператор $\hat{H}_+\hat{H}_-$ существенно **неэрмитов**, благодаря присутствию псевдо-спинового гамильтониана $\hat{H}_S \neq \hat{H}_S^\dagger$. Гамильтониан подобного типа является унитарно-эквивалентным хорошо известному неэрмитовому гамильтониану, который используется для демонстрации необычных следствий неэрмитовости [8,9]. Появления данной особенности не избежали и авторы работы [6], предложившие свой вариант „квадрирования“. Подчеркнем, что \hat{H}_S становится эрмитовым в отсутствие внешнего электрического поля.

Несмотря на указанные особенности, связанные с неэрмитовостью псевдо-гамильтониана, мы продолжим рассмотрение, основываясь на том, что собственные значения данной псевдо-спиновой задачи тем не менее действительны. Соответственно, мы будем искать решение уравнения (9) в виде $|\Phi_\pm\rangle = |r_\pm\rangle|\varphi_\pm\rangle$, где $|\varphi_\pm\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$[v_F^2(\hat{\pi}_x^2 + \hat{\pi}_y^2) - (eEx + \varepsilon)^2 + \lambda_\pm]|\varphi_\pm\rangle = 0. \quad (13)$$

3. Операторы псевдо-момента

На данной стадии рассмотрения удобно использовать следующее представление оператора координаты $\hat{\mathbf{r}}$ [10]

$$\hat{\mathbf{r}} = \hat{\boldsymbol{\rho}} + \hat{\mathbf{R}}, \quad (14)$$

где $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ — описывает „быстрое“ циклотронное вращение, а вектор $\hat{\mathbf{R}}$ при классическом рассмотрении определяет центр вращения (guiding center vector). Подобное разделение используется при описании поведения плазмы в слабо-меняющихся как в пространстве, так и во времени электромагнитных полях. Разделение оператора координаты на две составляющие, имеющие вполне определенный физический смысл, также многократно использовалось и используется при квантовом описании поведения электрона в магнитном поле. Впервые оно появилось в работе [11]. В этой статье приведены соответствующие коммутационные соотношения для операторов $\hat{\mathbf{R}}$, задающих местоположение циклотронной орбиты (guiding center vector), которые обеспечивают коммутацию операторов координат. Поскольку циклотронное движение удобно представлять через операторы кинетических моментов

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = l_B^2 (-\hat{\pi}_y, \hat{\pi}_x). \quad (15)$$

вектор-операторы центра вращения $\hat{\mathbf{R}}$ могут быть определены по аналогии с (15) через введение так называемых псевдо-моментов [12]

$$\hat{\mathbf{k}} = \hat{\boldsymbol{\pi}} - e[\mathbf{r} \times \mathbf{V}]. \quad (16)$$

Поскольку при этом

$$\hat{\mathbf{R}} = l_B^2 [\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{V}] / |\mathbf{V}|, \quad (17)$$

можно показать, используя результаты [11], что определенные таким образом операторы псевдо-моментов подчиняются следующим коммутационным соотношениям

$$[\hat{k}_x, \hat{k}_y] = -i/l_B^2, \quad [\hat{k}_i, \hat{\pi}_j] = 0. \quad (18)$$

Аналог данного разбиения, например, используется в работе [13] при описании релятивистских уровней Ландау, где соответствующие операторы носят названия циклотронных и магнетронных. Необходимо подчеркнуть, что как следует из их определения (16), операторы псевдо-моментов $\hat{\mathbf{k}}$ являются строго градиентно-инвариантными. Действительно, кинетические моменты градиентно-инвариантны по построению, а операторы координат нечувствительны к градиентным преобразованиям по определению. В данных операторах уравнение (13) приобретает вид

$$[v_F^2 \hat{\pi}_x^2 + v_F^2 \mu^2 \hat{\pi}_y^2 + 2\hat{\varepsilon} v_d \hat{\pi}_y - \hat{\varepsilon}^2 + \lambda_{\pm}] |\varepsilon_{\pm}\rangle = 0, \quad (19)$$

где $\hat{\varepsilon} = \varepsilon + v_d \hat{k}_y$. Поскольку \hat{k}_y коммутирует с $\hat{H}_+ \hat{H}_-$, решение уравнения (19) можно искать в виде

$$|\varphi_{\pm}\rangle = |\psi_{\pm}\rangle_a |k_y\rangle_b. \quad (20)$$

В этом выражении $|k_y\rangle_b$ является собственной функцией оператора \hat{k}_y . Используя приведенные коммутационные соотношения (18) для псевдо-импульсов определим соответствующие Бозе операторы b и b^+ ($[b, b^+] = 1$)

$$b = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (\hat{k}_y + i\hat{k}_x), \quad b^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2}} (\hat{k}_y - i\hat{k}_x), \quad b|0\rangle_b = 0. \quad (21)$$

Следуя [14–16], рассмотрим состояние

$$\begin{aligned} |k_y\rangle_b &= \frac{e^{l_B^2 k_y^2 / 2}}{(2\pi)^{1/4}} \sqrt{2} l_B \int_{-\infty}^{\infty} dk_x |\sqrt{2} k l_B\rangle_b \\ &= \frac{e^{l_B^2 k_y^2 / 2} \pi^{1/4}}{2^{3/4}} e^{-(\sqrt{2} k_y l_B - \hat{b}^+)^2 / 2} |0\rangle_b, \end{aligned} \quad (22)$$

где $k = k_y + i k_x$, $|\sqrt{2} k l_B\rangle$ — когерентное состояние $b|\sqrt{2} k l_B\rangle = \sqrt{2} k l_B |\sqrt{2} k l_B\rangle$. Легко установить справедливость следующего коммутационного соотношения

$$b e^{-(\sqrt{2} k_y l_B - \hat{b}^+)^2 / 2} = e^{-(\sqrt{2} k_y l_B - \hat{b}^+)^2 / 2} [\hat{b} + \sqrt{2} k_y l_B - \hat{b}^+]. \quad (23)$$

Используя (23) легко показать, что (22) есть искомым собственным вектором оператора \hat{k}_y

$$\hat{k}_y |k_y\rangle_b = k_y |k_y\rangle_b. \quad (24)$$

Состояния $|k_y\rangle_b$ нормированы на дельта функцию Дирака

$$\langle k'_y | k_y \rangle_b = \delta(k'_y - k_y). \quad (25)$$

Это условие является следствием следующего интегрального равенства [16]

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dy dy'}{\pi} \langle z' / z \rangle &= \iint_{-\infty}^{\infty} dy dy' \exp -\frac{1}{2} (|z|^2 + |z'|^2 + 2z'^* z) \\ &= (2)^{-1/2} \pi^{3/2} e^{-x^2/2} \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (26)$$

где $z = x + iy$. Используя полученные собственные вектора $|k_y\rangle_b$, $\hat{\varepsilon}$ — оператор в уравнении (19) можно рассматривать как c -число $\hat{\varepsilon} \rightarrow \varepsilon = \varepsilon + v_d k_y$. При этом уравнение, определяющее волновую функцию $|\psi_{\pm}\rangle_a$ (19), приобретает вид

$$[v_F^2 \hat{\pi}_x^2 + v_F^2 \mu^2 \hat{\pi}_y^2 + 2\varepsilon v_d \hat{\pi}_y - \varepsilon^2 + \lambda_{\pm}] |\psi_{\pm}\rangle_a = 0. \quad (27)$$

4. 1D отображение

На данном этапе рассмотрения воспользуемся эффективным 1D свойством уравнения (27). Существование точного соответствия описания 2D системы квантового Холла эффективной 1D системе обсуждается, например, в работе [17]. Подобное „проектирование“ осуществляется путем определения операторов квази-координаты \hat{Q} и квази-момента \hat{P}

$$\hat{Q} = -l_B^2 \hat{\pi}_y, \quad \hat{P} = \hat{\pi}_x. \quad (28)$$

Эти операторы подчиняются стандартному коммутационному соотношению координата-импульс $[\widehat{Q}, \widehat{P}] = i$. Используя введенные операторы (28), определим соответствующие Бозе операторы рождения/уничтожения $\widehat{c}, \widehat{c}^+$

$$\widehat{c} = \frac{l_B}{\sqrt{2\mu}} \left[\widehat{P} - i \frac{\mu \widehat{Q}}{l_B^2} \right], \quad \widehat{c}^+ = \frac{l_B}{\sqrt{2\mu}} \left[\widehat{P} + i \frac{\mu \widehat{Q}}{l_B^2} \right], \quad [\widehat{c}, \widehat{c}^+] = 1. \quad (29)$$

В дальнейшем нам понадобится связь операторов \widehat{c} , диагонализующих неэрмитов гамильтониан, с операторами \widehat{a} определенными в (2)

$$\begin{aligned} \widehat{c} &= \frac{l_B}{\sqrt{2\mu}} [\widehat{\pi}_x + i\mu\widehat{\pi}_y] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\mu}} [(1+\mu)\widehat{a} + (1-\mu)\widehat{a}^+] = u\widehat{a} + v\widehat{a}^+, \end{aligned} \quad (30)$$

где

$$u = \cosh \varphi = (1+\mu)/2\sqrt{\mu}, \quad v = \sinh \varphi = (1-\mu)/2\sqrt{\mu}.$$

При таком переопределении искомое решение уравнения (27) становится эквивалентно решению 1D задачи Шредингера о поведении квантового осциллятора при приложении внешней постоянной силы [18]

$$\begin{aligned} &\left[\frac{v_F^2 \mu}{l_B^2} (2\widehat{c}^+ \widehat{c} + 1) + i2\varepsilon \frac{v_d}{l_B \sqrt{2\mu}} (\widehat{c}^+ - \widehat{c}) - \varepsilon^2 + \lambda_{\pm} \right] \\ &\quad \times |\Psi_{\pm}\rangle_c = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Собственные вектора $|\Psi_{\pm}\rangle_c$, являющиеся решением (27), впервые появились в работе [19] под названием „полу-когерентные состояния“, или как они были названы в дальнейшем, „обобщенные когерентные состояния“ [20]. Для их определения зададим оператор сдвига

$$D(\alpha_\varepsilon) = \exp[\alpha_\varepsilon \widehat{c}^+ - \alpha_\varepsilon^* \widehat{c}], \quad \alpha_\varepsilon = -i2 \frac{\delta l_B \varepsilon}{(2\mu)^{3/2} v_F}. \quad (32)$$

Используя (32), обобщенное когерентное состояние, являющееся решением уравнения (31), можно представить в виде [20]

$$|\Psi_{\pm}\rangle = |n, \alpha_\varepsilon\rangle_c = D(\alpha_\varepsilon) |n\rangle_c. \quad (33)$$

Используя

$$|\Phi\rangle_{\pm, n, k_y} = |r_{\pm}\rangle |n, \alpha_\varepsilon\rangle_c |k_y\rangle_b, \quad (34)$$

искомый спектр задачи определяется из уравнения

$$\mu^3 \frac{v_F^2}{l_B^2} (2n+1 \pm 1) - \varepsilon_n^2 = 0. \quad (35)$$

Здесь $\varepsilon_n = \varepsilon_{\pm, n}^{e, h} + v_d k_y$. Окончательный ответ

$$\varepsilon_{\pm, n}^{e, h} = -v_d k_y + s\mu^{3/2} \frac{v_F}{l_B} \sqrt{2n+1 \pm 1}. \quad (36)$$

В этом выражении $s = +1(c)$ относится к зоне проводимости, а $s = -1(h)$ к валентной зоне. Полученный результат совпадает с ответами, полученными в совершенно отличных подходах, включающих квазиклассическое рассмотрение [21], метод псевдо-лоренцевских преобразований [22–24], а также вариант алгебраического решения [6]. Предложенное нами алгебраическое рассмотрение представляется более простым по сравнению с [6]. Необходимо отметить, что авторы в данной работе используют фиксированную функциональную зависимость вектор потенциала (калибровка Ландау), что противоречит самой идеи алгебраического подхода к решению данной задачи. Проверим, совпадает ли полученный ответ с известным ответом, полученным в предельном случае отсутствия электрического поля ($E = v_d = \delta = 0, \mu = 1, \widehat{c} = \widehat{a}$). В этом случае неэрмитовая псевдо-спиновая часть гамильтониана становится эрмитовой и выражение для собственных векторов $|r_{\pm}\rangle$ упрощается

$$|r_+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |r_-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Удивление вызывает тот факт, что в нашем рассмотрении мы получаем двукратное вырождение для данного положительного (отрицательного) значения собственной энергии

$$\varepsilon_{+, n-1}^e = \frac{v_F}{l_B} \sqrt{2(n-1)+2} = \varepsilon_{-, n}^e = \frac{v_F}{l_B} \sqrt{2n}. \quad (38)$$

Поскольку в данном случае гамильтониан не зависит от псевдо-импульсов, которые теперь служат лишь для нумерации вырожденной системы собственных векторов, принадлежащих данному уровню Ландау, мы можем опустить зависимость от k_i в выражениях для двух векторов. Поскольку в данном случае $\delta = 0$ ($\mu = 1$),

$$|\Phi\rangle_{e, +, n-1, k_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} |n-1\rangle_a, \quad |\Phi\rangle_{e, -, n, k_y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} |n\rangle_a. \quad (39)$$

В то же время факт, что данному положительному (отрицательному) значению собственной энергии принадлежит один и только один собственный вектор, легко проверяется при непосредственном решении уравнения $\widehat{H}_+ |\Psi\rangle = 0$ ($E = 0$). Покажем, что в определении „правильных“ собственных векторов $|\Psi\rangle$ в предложенном подходе решающее значение приобретает оператор \widehat{H}_- , действующий согласно определению (8) $|\Psi\rangle = \widehat{H}_- |\Phi\rangle$. Напомним, что подобная процедура возвращения к эрмитовому описанию изложена в монографии [7] при решении релятивистского уравнения Дирака. В присутствии лишь магнитного поля

$$\widehat{H}_- = \begin{pmatrix} \varepsilon & v_F \pi^+ \\ v_F \pi^- & \varepsilon \end{pmatrix}. \quad (40)$$

Применение оператора \hat{H}_- приводит для обоих векторов (39) к результату

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{e,+n-1,k_y} &= \frac{l_B}{v_F} \hat{H}_- |r_+\rangle |n-1\rangle_a \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & a^+ \\ a & \sqrt{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} |n-1\rangle_a = \sqrt{2n} \begin{pmatrix} |n\rangle_a \\ |n-1\rangle_a \end{pmatrix}, \\ |\Psi\rangle_{e,-n,k_y} &= \frac{l_B}{v_F} \hat{H}_- |r_-\rangle |n\rangle_a \\ &= \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{n} & a^+ \\ a & \sqrt{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} |n\rangle_a = \sqrt{2n} \begin{pmatrix} |n\rangle_a \\ |n-1\rangle_a \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (41)$$

Использование \hat{H}_- сохраняет *status quo*, поскольку в обоих случаях мы получаем один и только один собственный вектор, принадлежащий данному (невыврожденному) значению энергии, как и должно быть. Легко показать, что подобный „коллапс“ собственных векторов справедлив и для отрицательных значений энергий. Докажем, что подобное фиктивное вырождение отсутствует и в общем случае при наличии электрического поля. Рассмотрим ненормированные собственные вектора $|\Psi\rangle_{+,n-1,k_y}$ и $|\Psi\rangle_{-,n,k_y}$, которые принадлежат одному и тому же электронному уровню энергии $\varepsilon_n = v_F \mu^{3/2} \sqrt{2n} / l_B - v_d k_y$

$$\begin{aligned} |\Phi\rangle_{+,n-1,k_y} &= D(\alpha_{\varepsilon_n}) |r_+\rangle |n-1\rangle_c |k_y\rangle_b, \\ |\Phi\rangle_{-,n,k_y} &= D(\alpha_{\varepsilon_n}) |r_-\rangle |n\rangle_c |k_y\rangle_b. \end{aligned} \quad (42)$$

Для доказательства отсутствия реального вырождения в рассматриваемой задаче после применения дополнительной операции мы должны получить

$$|\Psi\rangle_{n,k_y} = \frac{l_B}{v_F} \hat{H}_- |\Phi\rangle_{+,n-1,k_y} = \frac{l_B}{v_F} \hat{H}_- |\Phi\rangle_{-,n,k_y}. \quad (43)$$

где \hat{H}_- (6) имеет вид

$$\begin{aligned} \hat{H}_-(\varepsilon_n) &= \frac{v_F \sqrt{2}}{l_B} \\ &\times \begin{pmatrix} -i \frac{\delta}{2} (\hat{a}^+ - \hat{a}) + \frac{l_B}{v_F \sqrt{2}} \varepsilon_n & \hat{a}^+ \\ \hat{a} & -i \frac{\delta}{2} (\hat{a}^+ - \hat{a}) + \frac{l_B}{v_F \sqrt{2}} \varepsilon_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{v_F \sqrt{2}}{l_B} \\ &\times \begin{pmatrix} -i \frac{\delta}{2} (u+v)(\hat{c}^+ - \hat{c}) + \frac{l_B}{v_F \sqrt{2}} \varepsilon_n & (u\hat{c}^+ - v\hat{c}) \\ (u\hat{c} - v\hat{c}^+) & -i \frac{\delta}{2} (u+v)(\hat{c}^+ - \hat{c}) + \frac{l_B}{v_F \sqrt{2}} \varepsilon_n \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (44)$$

Используя полученные выражения для состояний $|\Phi\rangle_{\pm,n,k_y}$ (42) для доказательства (43) достаточно показать, что

$$D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n}) \hat{H}_- D(\alpha_{\varepsilon_n}) |r_+\rangle |n-1\rangle_c = D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n}) \hat{H}_- D(\alpha_{\varepsilon_n}) |r_-\rangle |n\rangle_c. \quad (45)$$

Используя определение оператора $D(\alpha_{\varepsilon_n})$ (32) и полученное выражение (44) для $\hat{H}_-(\varepsilon_n)$, оператор $D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n}) \hat{H}_- D(\alpha_{\varepsilon_n})$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha_{\varepsilon_n}) \hat{H}_- D(\alpha_{\varepsilon_n}) &= \frac{v_F \sqrt{2n}}{l_B \sqrt{m\mu}} \hat{\theta} + \frac{v_F}{l_B \sqrt{2\mu}} [\hat{\vartheta} \hat{c}^+ + \hat{\vartheta}^\dagger \hat{c}], \\ \hat{\theta} &= \begin{pmatrix} 1 & i\delta \\ -i\delta & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\vartheta} = \begin{pmatrix} -i\delta & 1 + \mu \\ \mu - 1 & -i\delta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (46)$$

Действие операторов $\hat{\theta}$ и $\hat{\vartheta}$ на псевдо-спиновые вектора $|r_+\rangle$ и $|r_-\rangle$ задается равенствами

$$\begin{aligned} \hat{\theta} |r_+\rangle &= \mu |r_+\rangle^* \hat{\theta} |r_-\rangle = \mu |r_-\rangle^* \hat{\vartheta} |r_+\rangle = 2\mu |r_-\rangle^* \\ \hat{\vartheta} |r_-\rangle &= 0 \quad \hat{\vartheta}^\dagger |r_-\rangle = 2\mu |r_+\rangle^* \hat{\vartheta}^\dagger |r_+\rangle = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Используя эти равенства, получаем искомое выражение для невырожденной волновой функции

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_n &= \hat{H}_- |\Phi\rangle_{+,n-1,k_y} = \hat{H}_- |\Phi\rangle_{-,n,k_y} \\ &= \mu \frac{v_F \sqrt{2n}}{l_B} D(\alpha_{\varepsilon_n}) [|r_+\rangle^* |n-1\rangle_c + |r_-\rangle^* |n\rangle_c]. \end{aligned} \quad (48)$$

Это важный, хотя и ожидаемый результат. Мнимое вырождение, порожденное „квадрированием“ и обусловленное присутствием неэрмитовой составляющей в эффективном гамильтониане, которое проявляется в неортогональности собственных псевдо спиновых векторов, исчезает при учете операции \hat{H}_- . На необходимость дополнительной операции, подобной рассмотренной в нашей работе, для получения „правильных“ волновых функций указано в монографии [7]. Однако, поскольку речь идет о решении соответствующих дифференциальных уравнений, в [7] это мотивируется необходимостью избавления от „лишних“ решений, возникающих при рассмотрении квадрированных уравнений второго порядка, в то время как первоначально мы стартуем с рассмотрения дифференциальных уравнений первого порядка. Как следует из предложенного в работе подхода, это не совсем точное утверждение. Предложенное дополнительное операторное действие призвано привести к исчезновению мнимого двукратного вырождения обеспечив коллапс соответствующих волновых векторов к одному выражению и ортогональности полученных собственных волновых функций.

5. Заключение

В настоящей работе мы предложили последовательный алгебраический подход, независимый от необходимости выбора конкретной калибровки вектор потенциала к проблеме нахождения спектра носителей в графене в присутствии скрещенных постоянных и однородных магнитном и электрическом полях. Решение получено в рамках подхода Фока-Фейнмана-Гель-Манна,

что обусловлено формальным подобием релятивистского гамильтониана Дирака и \mathbf{kp} гамильтониана графена и основано на градиентной инвариантности коммутационных соотношений операторов и псевдо-импульсов. Решение системы Дирак-подобных уравнений в графене как правило сводится к решению дифференциальных уравнений второго порядка подобных шредингеровскому с помощью операции „квადрирования“. Однако подобное рассмотрение требует фиксации конкретного функционального вида вектор-потенциала. Рассмотренный нами алгебраический подход с использованием операторов псевдо-импульсов позволяет полностью отказаться от конкретного выбора калибровки вектор-потенциала, что отличает его от традиционного подхода к данной проблеме. Показано, что особенностью алгебраического решения в скрещенных полях, которое проходит через стадию „квадрирования“, является появление неэрмитовой составляющей в псевдо-шредингеровском гамильтониане, действующей в пространстве псевдо-спиновых переменных графена. Отмечено, что аналогичная проблема в данном подходе возникает и при решении релятивистского уравнения Дирака в скрещенных полях [7]. Поскольку данный неэрмитовый гамильтониан инвариантен относительно \mathcal{PT} преобразования, собственные значения его остаются действительными, что позволяет получить действительный спектр задачи, игнорируя отсутствие эрмитовости. Единственным наследием появления неэрмитовости при решении является коллапс уровней Ландау при стремлении дрейфовой скорости к скорости Ферми графена.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания (проект FEUZ-2023-0017).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] V. Fock. Phys. Zeit. Sowjetunion **12**, 404 (1937).
- [2] R.P. Feynman, M. Gell-Mann. Phys. Rev. **109**, 193 (1958).
- [3] A.H. MacDonald. Phys. Rev. B **28**, 2235 (1983).
- [4] M.M. Nieto, P.L. Taylor. Am. J. Phys. **53**, 234 (1985).
- [5] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Quantum Mechanics, Pergamon Press, Oxford (1977).
- [6] N.M.R. Peres, E.V. Castro. J. Phys.: Condens. Matter **19**, 406231 (2007).
- [7] V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. Relativistic Quantum Theory, Pergamon Press (1971).
- [8] A. Mostafazadeh. J. Math. Phys. **43**, 3944 (2002) [and citations within].
- [9] C.M. Bender. Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).
- [10] J.R. Cary, A.J. Brizard. Rev. Mod. Phys. **81**, 693 (2009).
- [11] M.H. Johnson, B.A. Lippmann. Phys. Rev. **76**, 828 (1949).
- [12] G. Konstantinou, K. Mouloupoulos. Eur. J. Phys. **37**, 065401 (2016).
- [13] D. Jentschura. Phys. Rev. D **108**, 016016 (2023).
- [14] H.Y. Fan. Phys. Lett. A **126**, 145 (1987).
- [15] H.Y. Fan, L. Fu. J. Phys. A: Math. Gen. **36**, 4987 (2003).
- [16] H. Fan, T. Ruan. Comm. Theor. Phys. **3**, 443 (1984).
- [17] M. Horsdal, M. Leinaas. Phys. Rev. B **76**, 195321 (2007).
- [18] P. Carruthers, M.M. Nieto. Am. J. Phys. **33**, 537 (1965).
- [19] M. Boiteux, A. Levelut. J. Phys. A: Math. Nucl. Gen. **6**, 589 (1973).
- [20] M.V. Satyanarayana. Phys. Rev. D **32**, 400 (1985).
- [21] Z.Z. Alisultanov. Physica B: Cond. Matt. **438**, 41 (2014).
- [22] V. Lukose, R. Shankar, G. Baskaran. Phys. Rev. Lett. **98**, 116802 (2007).
- [23] A. Shitov, M. Rudner, N. Gu, M. Katsnelson, L. Levitov. Solid State Comm. **149**, 1087 (2009).
- [24] З.З. Алисултанов. ЖЭТФ **152**, 986 (2017).

Редактор Ю.Э. Кутяев