01,14

Упругие свойства поликристаллического Fe: эффект давления

© О.М. Красильников, Ю.Х. Векилов

Национальный исследовательский технологический университет „МИСиС“,
Москва, Россия

E-mail: omkras@mail.ru

Поступила в Редакцию 15 июля 2025 г.
В окончательной редакции 17 декабря 2025 г.
Принята к публикации 17 декабря 2025 г.

Упругие модули поликристалла (константы Ламе) второго и третьего порядка при давлении P выражены через производные свободной энергии Гиббса по инвариантам тензора конечных деформаций Лагранжа. Приведены соотношения, связывающие эти константы Ламе с соответствующими упругими постоянными монокристаллических зерен с гексагональной решеткой, составляющих поликристалл. На основе данных по упругим постоянным второго и третьего порядка ε-Fe рассчитаны соответствующие константы Ламе поликристаллического Fe в диапазоне давлений от 50 до 340 GPa. С помощью полученных результатов проведен анализ интенсивности различных трехфононных процессов рассеяния в железе и влияние на них давления.

Ключевые слова: высокие давления, константы Ламе второго и третьего порядка, трехфононные процессы рассеяния.

DOI: 10.61011/FTT.2026.01.62570.198-25

1. Введение

Железо — основной компонент внутреннего ядра Земли, где давление достигает 330–360 GPa. Имеются многочисленные доказательства стабильности эпсилон-фазы железа с гексагональной плотноупакованной (ГПУ) кристаллической решеткой при таких экстремально высоких давлениях и при низких и умеренных температурах [1–4]. Согласно экспериментальным данным, переход Fe из объемно-центрированной кубической (ОЦК) в ГПУ-структуру при комнатной температуре происходит при давлениях 10–18 GPa, и ГПУ-фаза остается устойчивой, по крайней мере, до 400 GPa [3–5]. Знание упругих свойств этой фазы имеет важное значение по многим причинам. Например, упругие свойства железа влияют на распространение сейсмических волн через ядро Земли, и знание их критично для интерпретации сейсмологических данных и понимания внутренней структуры нашей планеты [6]. Исследование упругих свойств поликристаллического железа при сверхвысоких давлениях является перспективной задачей.

Упругие свойства ε-Fe изучались в различных экспериментальных и теоретических работах. В работах [7–10] из экспериментов с поликристаллическими образцами ε-Fe найдены упругие постоянные второго порядка (SOEC) монокристаллов при различных давлениях. Результаты расчетов SOEC монокристаллического ε-Fe в интервале давлений до 400 GPa в рамках теории функционала плотности (DFT) приведены в [11–16]. В работе [16] рассчитаны также и упругие постоянные третьего порядка (TOEC) ε-Fe в диапазоне давлений 50–340 GPa. Наряду с SOEC, которые характеризуют линейный упругий отклик материала, упругие постоянные третьего порядка определяют нелинейный отклик на конечную деформацию и важны для объяснения ангармонических свойств твердого тела, таких как тепловое расширение, зависимость скорости звука от температуры и приложенной нагрузки, генерации второй гармоники при распространении в твердом теле ультразвуковых волн конечной амплитуды [17–20].

В случае ε-Fe речь идет об упругих постоянных твердого тела, находящегося при очень высоком давлении (давление сравнимо с величиной объемного модуля). Давление P является, наряду с температурой T, фундаментальной термодинамической переменной. Однако, в отличие от T, исследования при высоких давлениях долго сдерживались отсутствием возможности как получения статических давлений в мегабарном диапазоне (100 GPa), так и измерения свойств сильно сжатого материала. В настоящее время после изобретения ячейки с алмазными наковальнями (DAC) и появления современных технологий микро-нано-зондирования появилась возможность исследовать состояние вещества за пределами трех мегабар. В результате, количество исследований свойств твердых тел при высоких давлениях растет быстрыми темпами [21]

Давление кардинально изменяет все свойства твердых тел, в том числе упругие — упругие постоянные различных порядков. Упругие постоянные n-го порядка ($n \geq 2$) определяются как соответствующие частные производные термодинамического потенциала термоупругой среды, подвергнутой малой, но конечной деформации [22]. В переменных S (энтропия) и V (объем) термодинамическим потенциалом является внутренняя энергия $U = U(S, V)$, в переменных T и V — свободная энергия Гельмгольца $F = F(T, V)$. Для этих двух случаев (давление отсутствует) стандартное определение упругих постоянных n-го порядка ($n \geq 2$) дано в работе [22]:

$$C^S_{ijkl\ldots} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial^n U}{\partial\eta_{ij}\partial\eta_{kl\ldots}}\right)_S, \quad (1)$$

$$C^T_{ijkl\ldots} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial^n F}{\partial\eta_{ij}\partial\eta_{kl\ldots}}\right)_T, \quad (2)$$

Здесь $C^S_{ijkl\ldots}$ и $C^T_{ijkl\ldots}$ — соответственно адиабатические и изотермические упругие постоянные при $P = 0$, η_{ij} — компоненты тензора конечных деформаций Лагранжа [17], V_0 — объем в исходном (недеформированном) состоянии. Производные вычисляются при постоянной энтропии S и температуре T.

В переменных S и P термодинамическим потенциалом служит энтальпия $H(S, P)$, а в переменных T и P — свободная энергия Гиббса $G(T, P)$. Поэтому адиабатические и изотермические упругие постоянные различного порядка предварительно нагруженного кристалла (при давлении P) можно определить, как соответствующие производные энтальпии H и потенциала Гиббса G по компонентам η_{ij} [23–25]:

$$\tilde{C}^S_{ijkl\ldots} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial^n H}{\partial\eta_{ij}\partial\eta_{kl\ldots}}\right)_S, \quad (3)$$

$$\tilde{C}^T_{ijkl\ldots} = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial^n G}{\partial\eta_{ij}\partial\eta_{kl\ldots}}\right)_T, \quad (4)$$

Эти постоянные называют „эффективными“ упругими постоянными, чтобы подчеркнуть, что они определяются не только межатомным взаимодействием (производными n-го порядка свободной (внутренней) энергии по компонентам тензора деформации η_{ij}), но и непосредственно внешней нагрузкой [23,25]. Они полностью определяют упругие свойства нагруженного кристалла: соотношение напряжение Коши (true stress) — деформация η_{ij}, уравнение малых колебаний, условия устойчивости [17,26]. В случае гидростатического давления постоянные (3) и (4) обладают полной фогтовской симметрией к перестановке индексов [17]. При $P = 0$ упругие постоянные (3) и (4) совпадают с постоянными для ненагруженного кристалла (1) и (2). Далее, говоря об упругих постоянных, мы будем иметь в виду постоянные (4).

В поликристаллическом состоянии материал можно рассматривать как изотропный агрегат монокристаллических зерен. Соответственно, упругие модули поликристалла (константы Ламе) можно получить путем усреднения тензора упругих постоянных соответствующего порядка по всем ориентациям монокристаллических зерен. В работах [27–30] получены соотношения, связывающие константы Ламе второго (SOLC) и третьего порядка (TOLC) с упругими постоянными 2-го и 3-го порядка кристалла произвольной симметрии (давление отсутствует), а также рассмотрен частный случай монокристаллических зерен кубической симметрии.

В настоящей работе приведены выражения для констант Ламе 2-го и 3-го порядка через упругие постоянные монокристаллических зерен гексагональной симметрии, составляющих поликристалл, находящийся при высоком давлении. На основе этих соотношений, с использованием данных по упругим постоянным ε-Fe [16], рассчитаны SOLC и TOLC поликристаллического Fe в широком интервале давлений (50–340 GPa). Оценено также влияние различных трехфононных процессов рассеяния на ангармоническое поведение ε-Fe. Полученные результаты важны для интерпретации сейсмических исследований, позволяют глубже понять механизмы фазовых переходов, происходящих при высоких давлениях, способствуют разработке новых материалов, способных выдерживать экстремальные внешние воздействия, такие как высокие давления и температуры.

2. Основные определения и соотношения

Рассмотрим изотропное твердое тело (поликристалл) в равновесном состоянии при давлении P и температуре T. При заданных P и T состояние системы описывается свободной энергией Гиббса G. Пусть поликристалл подвергается малой, но конечной деформации, описываемой тензором Лагранжа с компонентами η_{ij}. Величина G не должна зависеть от выбора системы координат. Она инвариантна относительно вращения и перемещения деформированного тела как целого. Это возможно, если G является функцией инвариантов тензора деформации. Главные инварианты тензора деформации имеют вид [19]

$$I_1 = \mathrm{tr}(\eta) = \eta_{11} + \eta_{22} + \eta_{33}, \quad (5a)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\left[(\mathrm{tr}\eta)^2 - \mathrm{tr}\eta^2\right] = (\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2) + (\eta_{11}\eta_{33} - \eta_{13}^2) + (\eta_{22}\eta_{33} - \eta_{23}^2), \quad (5b)$$

$$I_3 = \det\eta = \eta_{11}\eta_{22}\eta_{33} + 2\eta_{23}\eta_{13}\eta_{12} - \eta_{11}\eta_{23}^2 - \eta_{22}\eta_{13}^2 - \eta_{33}\eta_{12}^2. \quad (5c)$$

Поскольку деформации являются малыми, разложим G в ряд по инвариантам (5) вблизи недеформированного состояния. Так как недеформированное состояние считается равновесным, то $(\frac{\partial G}{\partial I_1})_0 = 0$. Поэтому разложение начинается с квадратичных членов. Коэффициенты этого разложения представляют собой коэффициенты Ламе 2-го и 3-го порядка.

Из инвариантов (5) можно создать два квадратичных скаляра (I_1^2, I_2), и три кубических (I_1^3, I_1I_2, I_3). По аналогии с [19] получим

$$\left.\begin{array}{c} \mu = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial I_2}\right)_0, \\ \lambda + 2\mu = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial I_1^2}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial G}{\partial I_3}\right)_0 = n = A, \ \left(\frac{\partial^2 G}{\partial I_1 \partial I_2}\right)_0 = -4m = -2A - 4B \\ \left(\frac{\partial^3 G}{\partial I_1^3}\right)_0 = 4m + 2l = 2A + 6B + 2C \end{array}\right\}. \quad (6)$$

Здесь λ и μ — константы Ламе 2-го порядка; l, m, n — константы Ламе 3-го порядка в определении Мурнагана [31], A, B, C — в определении Ландау–Лифшица [32]. Константы Ламе (6) представляют собой производные потенциала Гиббса соответствующего порядка, а не свободной энергии Гельмгольца, как в [31,32]. Конечно, при $P = 0$ эти определения совпадают.

Выражение для свободной энергии Гиббса, отнесенное к единице объема, с учетом вклада 3-го порядка имеет вид

$$\frac{\Delta G}{V_0} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_1^2 - 2\mu I_2 + \frac{1}{3}(l + 2m)I_1^3 - 2mI_1I_2 + nI_3, \quad (7)$$

где $\Delta G = G(P, T, \eta) - G(P, T, 0)$, V_0 — объем тела в недеформированном состоянии. В этом приближении упругие свойства изотропного тела характеризуются пятью константами. Чаще всего в качестве констант Ламе 3-го порядка используют аналогичные величины в определении Тоупина и Бернштейна — ν_1, ν_2, ν_3 [33], связанные с l, m, n соотношениями [28]:

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 &= 2(l - m) + n = 2C \\ \nu_2 &= m - \tfrac{1}{2}n = B \\ \nu_3 &= \tfrac{1}{4}n = \tfrac{1}{4}A \end{aligned}\right\}. \quad (8)$$

При таком выборе констант Ламе все они совпадают с независимыми упругими постоянными изотропного твердого тела [28]:

$$\lambda = \tilde{C}^*_{12},\ \mu = \tilde{C}^*_{44},\ \nu_1 = \tilde{C}^*_{123},\ \nu_2 = \tilde{C}^*_{144},\ \nu_3 = \tilde{C}^*_{456}. \quad (9)$$

Здесь упругие постоянные изотропного твердого тела даны в обозначениях Фогта (1 1 − 1, 2 2 − 2, 3 3 − 3, 2 3 − 4, 1 3 − 5, 1 2 − 6).

3. Методика и детали расчета

Поликристаллический образец железа при высоком давлении представляет собой совокупность большого числа монокристаллических зерен с ГПУ-структурой. Зерна произвольно ориентированы, их размеры пренебрежимо малы по сравнению с размерами образца, но достаточно велики, чтобы обладать объемно-упругими свойствами. Следуя Фогту [23], считаем, что все монокристаллические зерна в поликристалле находятся в одном и том же деформированном состоянии, поэтому упругие константы такого материала описываются тензором упругих постоянных соответствующего порядка, усредненному по всем направлениям.

Для нахождения изотропных средних значений упругих постоянных 2-го и 3-го порядка поликристаллического ε-Fe воспользуемся результатами недавно опубликованной работы [34]. В ней разработаны численные алгоритмы символьных вычислений эффективных упругих постоянных второго–шестого порядка для поликристаллических агрегатов, имеющих симметрию любого класса, в т.ч. и полную изотропию. Предыдущие изотропные средние значения были ограничены 4-м порядком (см. [35]), поэтому полученные в работе [34] результаты существенно расширяют возможности исследования нелинейной упругости поликристаллических материалов [36].

В приложении Appendix D (см. [34]) приведены выражения для изотропных средних значений упругих постоянных в случае произвольной симметрии кристаллитов. Учитывая соотношения между упругими постоянными для гексагональной структуры (классы 622, $6\bar{2}m$, $6/mmm$) (Appendix A, [34]), получим для констант Ламе (9) поликристаллического железа при давлении P и температуре T:

$$\lambda = \tilde{C}^*_{12} = \frac{1}{15}(\tilde{C}_{11} + 5\tilde{C}_{12} + 8\tilde{C}_{13} + \tilde{C}_{33} - 4\tilde{C}_{44}); \quad (10)$$

$$\mu = \tilde{C}^*_{44} = \frac{1}{15}(3.5\tilde{C}_{11} - 2.5\tilde{C}_{12} - 2\tilde{C}_{13} + \tilde{C}_{33} + 6\tilde{C}_{44}); \quad (11)$$

$$\nu_1 = \tilde{C}^*_{123} = \frac{1}{105}(-\tilde{C}_{111} + 10\tilde{C}_{112} + 3\tilde{C}_{113} + 11\tilde{C}_{122} + 63\tilde{C}_{123} + 18\tilde{C}_{133} - 84\tilde{C}_{144} + 12\tilde{C}_{155} + \tilde{C}_{333} - 12\tilde{C}_{344}); \quad (12)$$

$$\nu_2 = \tilde{C}^*_{144} = \frac{1}{105}(2.5\tilde{C}_{111} + 3\tilde{C}_{112} + 13.5\tilde{C}_{113} + 0.5\tilde{C}_{122} - 24.5\tilde{C}_{123} + 4\tilde{C}_{133} + 56\tilde{C}_{144} - 16\tilde{C}_{155} + \tilde{C}_{333} + 2\tilde{C}_{344}); \quad (13)$$

$$\nu_3 = \tilde{C}^*_{456} = \frac{1}{210}(8.5\tilde{C}_{111} - \tilde{C}_{112} - 15\tilde{C}_{113} - 9.5\tilde{C}_{122} + 21\tilde{C}_{123} - 6\tilde{C}_{133} - 63\tilde{C}_{144} + 45\tilde{C}_{155} + 2\tilde{C}_{333} + 18\tilde{C}_{344}). \quad (14)$$

Здесь $\tilde{C}_{\alpha\beta\cdot}$ — упругие постоянные (4) (точка означает, что здесь возможны упругие постоянные как 2-го, так и 3-го порядка).

Формулы (10)−(14) полностью совпадают с полученными ранее соотношениями для констант Ламе 2-го и 3-го порядка изотропных агрегатов гексагональных кристаллов [37] (формулы (24)−(28)), если учесть, что $C_{222} = C_{111} + C_{112} - C_{122}$ (Appendix A, [34]).

Нужно отметить, что полученные нами ранее в работах [35] и [38] аналогичные соотношения для констант Ламе 4-го порядка поликристаллов с зернами кубической и гексагональной симметрии также полностью совпадают с соотношениями, следующими из Appendix B, [34].

4. Результаты расчета и их обсуждение

В работе [16] в рамках теории функционала плотности (DFT) рассчитаны упругие постоянные 2-го и 3-го порядка (см. формулу (4)) ГПУ железа в интервале давлений 50−340 GPa при $T = 0$ K. Используя эти данные и соотношения (10)−(14), найдем значения констант Ламе в указанном интервале давлений. Полученные

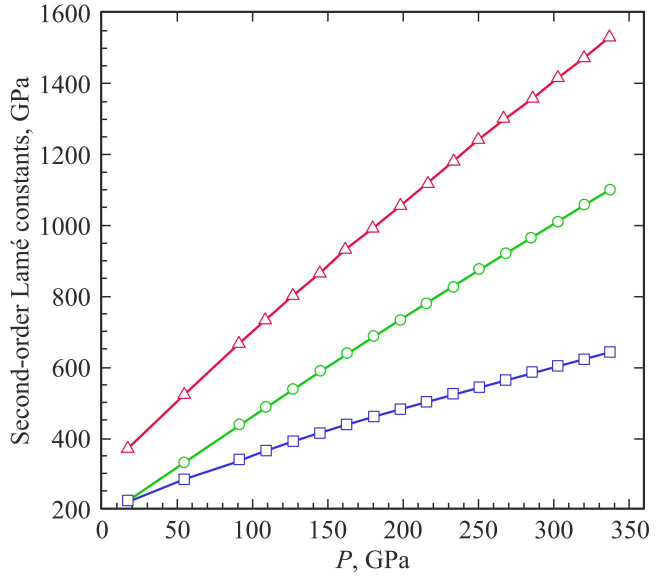

Рис. 1. Зависимость от давления модуля всестороннего сжатия $K = \lambda + (2/3)\mu$, а также λ и μ. Треугольники — K; круги — λ; квадраты — μ.

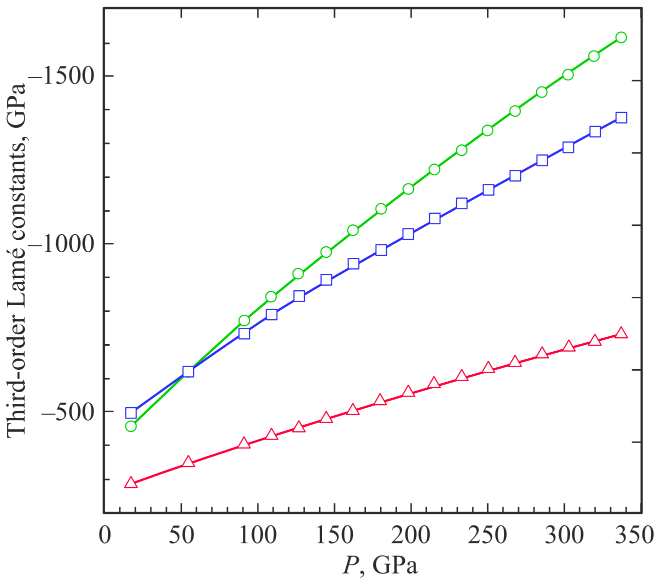

Рис. 2. Зависимость от давления констант Ламе 3-го порядка. Треугольники — ν_1; круги — ν_2; квадраты — ν_3.

результаты показаны на рис. 1 и 2, а часть из них приведена в табл. 1.

Видно, что во всем исследованном интервале давлений константы λ и μ положительны, а все константы Ламе 3-го порядка имеют отрицательные значения. С ростом давления все константы 2-го и 3-го порядка увеличиваются по абсолютной величине. При этом зависимость всех констант Ламе от давления близка к линейной.

Ключевую роль при объяснении ряда свойств твердых тел, таких как теплопроводность, температурные

Таблица 1. Результаты расчетов констант Ламе (GPa) в поликристаллическом железе

P, GPa	K	λ	μ	ν_1	ν_2	ν_3
54.27	521.3	331.8	284.3	−348.4	−622.3	−623.0
90.67	664.3	438.2	339.1	−401.8	−772.1	−736.2
126.6	799.6	540.0	389.5	−451.1	−910.2	−840.9
162.1	929.7	638.5	436.9	−500.5	−1041	−940
197.4	1056	734.8	481.3	−554.6	−1163	−1028
232.4	1178	829.0	523.7	−602.8	−1280	−1117
267.3	1298	921.6	564.2	−647.0	−1393	−1203
302.1	1415	1013	602.9	−687.5	−1504	−1290
319.4	1473	1059	621.7	−709.5	−1560	−1333
336.6	1531	1104	640.5	−729.4	−1616	−1375

Таблица 2. Относительная интенсивность трехфононных процессов рассеяния в поликристаллическом железе

P, GPa	d/c	d/b	b/c
54.27	401	151.0	2.65
126.6	381	148.4	2.57
197.4	369	147.5	2.50
267.3	361	147.4	2.45
336.6	355	147.3	2.41

зависимости теплоемкости и скорости звука играют трехфононные процессы рассеяния. Используя соотношения (A1)–(A4) (см. Приложение), оценим интенсивность этих процессов в поликристаллическом железе при высоких давлениях. В табл. 2 приведены отношения интенсивностей различных трехфононных процессов рассеяния в интервале давлений 50–340 GPa.

Видно, что решающее значение в объяснении ангармонических свойств железа при высоких давлениях имеет процесс d (A4), (L+L↔L). Два других процесса — b (A2) и c (A3) — гораздо менее эффективны.

С ростом давления интенсивности трехфононного рассеяния b, c и d монотонно увеличиваются примерно в одинаковой степени:

$$\frac{b(337)}{b(54)} = 5.2; \quad \frac{c(337)}{c(54)} = 5.7; \quad \frac{d(337)}{d(54)} = 5.0.$$

5. Заключение

Константы Ламе 2-го и 3-го порядка при произвольном давлении P определены методом разложения свободной энергии Гиббса по инвариантам тензора конечных деформаций Лагранжа. Для изотропного агрегата монокристаллических зерен с гексагональной структурой получены соотношения, связывающие константы Ламе 2-го и 3-го порядка с соответствующими упругими постоянными кристаллитов. С использованием данных по упругим постоянным ε-Fe вычислены константы Ламе 2-го и 3-го порядка поликристаллического железа в диапазоне давлений от 50 до 340 GPa. С давлением все константы 2-го и 3-го порядка растут по абсолютной величине по закону, близкому к линейному. В данном интервале давлений также оценен вклад различных трехфононных процессов рассеяния в ангармонические свойства поликристаллического железа.

Полученные в работе результаты важны для интерпретации геофизических исследований и способствуют разработке новых материалов, пригодных для работы в экстремальных условиях (высокие давления и температуры).

Приложение

Кубический ангармонический член в разложении упругой энергии можно связать с интенсивностями трехфононного рассеяния (the three-phonon scattering strengths) $\overline{|A^{ss's''}|}^2$ [39], которые описывают в изотропной континуальной модели следующие возможные процессы рассеяния акустических фононов [39]:

$$\mathrm{T}+\mathrm{T}\leftrightarrow\mathrm{L};\quad \mathrm{T}+\mathrm{L}\leftrightarrow\mathrm{L};\quad \mathrm{T}+\mathrm{T}\leftrightarrow\mathrm{T};\quad \mathrm{L}+\mathrm{L}\leftrightarrow\mathrm{L},$$

где T и L — поперечные и продольные акустические фононы соответственно.

В терминах изотропных упругих констант величины $\overline{|A^{ss's''}|}^2$ имеют вид [39]

$$a=\overline{|A^{\mathrm{TTT}}|}^2=0, \tag{A1}$$

$$b=\overline{|A^{\mathrm{TLL}}|}^2=0.0255(A+3\mu)^2+0.1333(\lambda+2B)^2 + 0.0593(A+3\mu)(\lambda+2B), \tag{A2}$$

$$c=\overline{|A^{\mathrm{TTL}}|}^2=0.1333[\lambda^2+1.5B(\lambda+B)]+(A+4\mu) \times[0.0124(A+4\mu)+0.0222(\lambda+2B)], \tag{A3}$$

$$d=\overline{|A^{\mathrm{LLL}}|}^2=[3\lambda+6\mu+2(A+3B+C)]^2. \tag{A4}$$

Здесь A, B и C — константы Ламе 3-го порядка в определении Ландау–Лифшица, связанные с ν_1, ν_2, ν_3 соотношением (8). Из (A1) следует, что в модели изотропного континуума интенсивность рассеяния для процесса T+T↔T равна нулю.

Благодарности

Ю.Х. Векилов также благодарит за финансовую поддержку Российский научный фонд (проект № 22-12-00193).

Финансирование работы

Работа выполнена при финансовой поддержке федеральной программы академического лидерства „Приоритет 2030“ (стратегический проект МИСиС „Квантовый интернет“).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] L. Stixrude, R.E. Cohen. Sci. **267**, *5206*, 1972 (1995).
[2] X. Sha, R.E. Cohen. Geophys. Res. Lett. **37**, *10*, L10302 (2010).
[3] A.P. Jephcoat, H.K. Mao, P.M. Bell. J. Geophys. Res.: Solid Earth **91**, *B5*, 4677 (1986).
[4] R.D. Taylor, M.P. Pasternak, R. Jeanloz. J. Appl. Phys. **69**, *8*, 6126 (1991).
[5] L. Stixrude. Phys. Rev. Lett. **108**, *5*, 055505 (2012).
[6] X. Song. Rev. Geophys. **35**, *3*, 297 (1997).
[7] A.K. Singh, H.K. Mao, J. Shu, R.J. Hemley. Phys. Rev. Lett. **80**, *10*, 2157 (1998).
[8] S. Merkel, J.F. Shu, P. Gillet, H. Mao, R.J. Hemley. J. Geophys. Res.: Solid Earth **110**, *B5*, B05201 (2005).
[9] D. Antonangeli, F. Occelli, H. Requardt, J. Badro, G. Fiquet, M. Krisch. Earth Planet. Sci. Lett. **225**, *1–2*, 243 (2004).
[10] W.L. Mao, V.V. Struzhkin, A.Q.R. Baron, S. Tsutsui, C.E. Tommaseo, H.-R. Wenk, M.Y. Hu, P. Ghow, W. Sturhahn, J. Shu, R.J. Hemley, D.L. Heinz, H.-K. Mao. J. Geophys. Res.: Solid Earth **113**, *B9*, B09213 (2008).
[11] G. Steinle-Neumann, L. Stixrude, R.E. Cohen. Phys. Rev. B **60**, *2*, 791 (1999).
[12] C. Asker, L. Vitos, I.A. Abrikosov. Phys. Rev. B **79**, *21*, 214112 (2009).
[13] L. Vočadlo, D.P. Dobson, I.G. Wood. Earth Planet. Sci. Lett. **288**, *3–4*, 534 (2009).
[14] X. Sha, R.E. Cohen. Phys. Rev. B **81**, *9*, 094105 (2010).
[15] B. Martorell, J. Brodholt, I.G. Wood, L. Vočadlo. Earth Planet. Sci. Lett. **365**, 143 (2013).
[16] O.M. Krasilnikov, A.V. Lugovskoy, V. Dikan, M.P. Belov, Y.Kh. Vekilov, I.A. Abrikosov. Phys. Rev. B **99**, *18*, 184101 (2019).
[17] D.C. Wallace. In: Solid State Physics, v. 25 / Eds H. Ehrenreich, F. Seitz, D. Turnbull. Academic Press, N.Y. (1970). P. 301.
[18] О.В. Руденко, С.И. Солуян. Теоретические основы нелинейной акустики. Наука, М. (1975). 287 с. [O.V. Rudenko, S.I. Soluyan. Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics. Plenum, Consultants Bureau, New York (1977).]
[19] Л.К. Зарембо, В.А. Красильников. УФН **102**, *12*, 549 (1970). [L.K. Zarembo, V.A. Krasil'nikov. Sov. Phys. – Usp. **13**, *6*, 778 (1971).]
[20] Y. Hiki. Annu. Rev. Mater. Sci. **11**, *1*, 51 (1981).
[21] H.-K. Mao, X.-J. Chen, Y. Ding, B. Li, L. Wang. Rev. Mod. Phys. **90**, *1*, 015007 (2018).
[22] K. Brugger. Phys. Rev. **133**, *6A*, A1611 (1964).
[23] G.R. Barsch, Z.P. Chang. J. Appl. Phys. **39**, *7*, 3276 (1968).
[24] S.L. Qiu, P.V. Marcus. Phys. Rev. B **68**, *5*, 054103 (2003).
[25] Ю.Х. Векилов, О.М. Красильников, А.В. Луговской. УФН **185**, *11*, 1215 (2015). [Yu.Kh. Vekilov, O.M. Krasilnikov, A.V. Lugovskoy. Phys. – Usp. **58**, *11*, 1106 (2015).]
[26] O.M. Krasilnikov, Yu.Kh. Vekilov, S.I. Simak. Phys. Rev. B **105**, *22*, 226101 (2022).
[27] G.R. Barsch. J. Appl. Phys. **39**, *8*, 3780 (1968).
[28] W. Wasserbach. Physica Status Solidi B **159**, *2*, 689 (1990).
[29] V.A. Lubarda. J. Mech. Phys. Solids **45**, *4*, 471 (1997).

[30] D.N. Blaschke. J. Appl. Phys. **122**, *14*, 145110 (2017).
[31] F.D. Murnaghan. Finite Deformations of an Elastic Solid. John Wiley & Sons, New York (1951).
[32] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1987). 248 с. [L.D. Landay, E.M. Lifshitz. Theory of Elasticity. Paperback Bunko (1984).]
[33] R.A. Toupin, B. Bernstein. J. Acoust. Soc. Am. **33**, *2*, 216 (1961).
[34] R.S. Telyatnik. Acta Crystallographica A **80**, *6*, 394 (2024).
[35] O.M. Krasilnikov, Yu.Kh. Vekilov. Phys. Rev. B **100**, *13*, 134107 (2019).
[36] J.D. Clayton. Acta Crystallographica A **81**, *1*, 1 (2025).
[37] O.M. Krasilnikov, A.V. Lugovskoy, Yu.Kh. Vekilov, Yu.E. Lozovik. Mater. Des. **139**, 1 (2018).
[38] О.М. Красильников, Ю.Х. Векилов. ФТТ **66**, *4*, 505 (2024). [O.M. Krasilnikov, Yu.Kh. Vekilov. Phys. Solid State **66**, *4*, 489 (2024).]
[39] G.P. Srivastava. The Physics of Phonons. Taylor & Francis Group, New York (1990). 421 p.

Редактор Е.В. Толстякова