

# Метод расчета времени переходного процесса многоступенчатой охлаждающей термобатареи

© Ю.И. Равич, А.Н. Гордиенко<sup>†</sup>

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Получена 18 апреля 2006 г. Принята к печати 25 мая 2006 г.)

Производится расчет времени  $\tau$  выхода каскадной охлаждающей термобатареи на стационарный режим. Используемый метод не требует решения уравнений в частных производных для ветвей полупроводниковых элементов. Время переходного процесса двухступенчатой батареи получается в аналитической форме как решение квадратного уравнения, коэффициенты которого определяются термоэлектрическими параметрами полупроводников, теплоемкостями материалов батареи и размерами различных частей устройства. Для батареи с произвольным числом ступеней  $N$  расчет сводится к стандартной задаче вычисления собственных значений двух симметричных матриц  $N$ -го порядка. Полученные расчетные значения  $\tau$  для конкретных двухступенчатых батарей находятся в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными.

PACS: 07.20.Dt, 72.20Pa, 85.80.Fi

## 1. Введение

Расчет переходных процессов при включении термоэлемента Пельтье обычно производится операционным методом, или методом преобразования Лапласа [1–5]. При использовании операционного метода зависимость температуры холодного рабочего контакта от времени представляется в виде разложения по убывающим экспонентам. Время выхода термоэлемента на стационарный режим в основном определяется наибольшей из временных констант, входящих в показатели экспонент.

При попытках применения операционного метода к каскадной двухступенчатой термобатарее получаются громоздкие выражения, неудобные в практических расчетах [6,7]. Расчеты переходных процессов в многоступенчатых батареях с числом ступеней более 2 операционным методом не производилось. В случае многоступенчатых батарей приходится численно решать уравнения в частных производных для распределения температуры по полупроводниковым ветвям, сшивая решения на контактах различных ступеней [8].

Для отдельного термоэлемента в [9,10] предложен простой приближенный метод расчета времени выхода на стационарный режим. Суть этого метода состоит в том, что теплоемкости различных частей элемента рассматриваются как сосредоточенные на краях ветвей, при этом считалось, что рабочий контакт обладает теплоемкостью контактной пластины и половиной теплоемкости полупроводниковых ветвей, прилегающих к контакту. Сравнение результатов относительно точного операционного метода и приближенного метода сосредоточенных теплоемкостей для термоэлемента (или одноступенчатой батареи) показало [5], что точность приближенного метода будет больше, если к рабочему контакту отнести не половину, а  $4/\pi^2 \approx 0.4$  теплоемкости полупроводникового материала ветвей. Метод применим при условии, что ток через термоэлемент относи-

тельно мал, так что зависимость температуры холодного контакта от времени носит монотонный характер. Этому условию удовлетворяют оптимальные токи в режимах наибольших холодопроизводительности и холодильного коэффициента.

В настоящей работе метод сосредоточенных теплоемкостей применяется к каскадной термобатарее, причем 0.4 теплоемкости полупроводниковых ветвей в каждой ступени прибавляется к теплоемкости более холодного контакта, а остальные 0.6 теплоемкости полупроводников — к противоположному контакту. Использование этого расчетного метода приводит к системе обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, содержащих производные только по времени  $t$  и описывающих тепловой баланс на рабочем и промежуточных контактах. Решение системы для двухступенчатой батареи дает квадратичное уравнение для времени переходного процесса  $\tau$ , и, таким образом, выражение для константы  $\tau$  представлено в аналитическом виде. В случае, когда число ступеней больше 2, задачу вычисления  $\tau$  удастся свести к определению собственных значений двух симметричных матриц.

## 2. Постановка задачи

Под временем переходного процесса  $\tau$ , как и в работе [5], для определенности имеется в виду время, за которое перепад температуры на термобатарее  $\Delta$  достигает значения, отличающегося от стационарного  $\Delta_{st}$  на 5%. Выбор величины 0.05 удобен тем, что с хорошей точностью  $\ln(0.05) \approx -3$ , и если при включении батареи принять момент времени  $t = 0$ , то затем перепад температуры приближается к стационарному значению по экспоненциальному закону

$$\Delta = \Delta_{st} [1 - \exp(-\lambda t)], \quad (1)$$

и  $\tau = 3/\lambda$ .

<sup>†</sup> E-mail: gorynych9@mail.ru

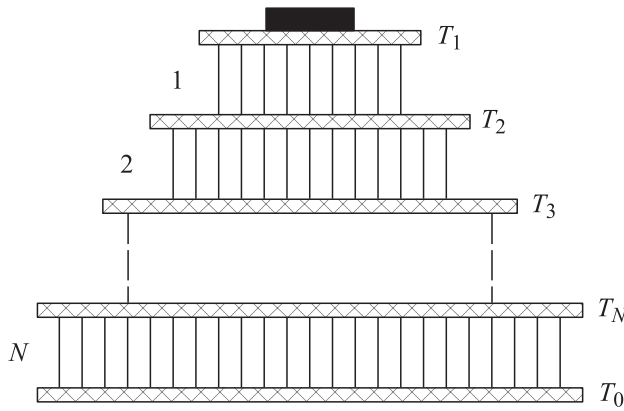


Рис. 1. Схематическое изображение термобатареи. Приведены номера ступеней и обозначения температур теплопереходов.

Расположение ступеней каскадной батареи и тепловой нагрузки, а также обозначения температур контактных пластин показаны на рис. 1. Теплопоглощающие контакты каждой ступени имеют тот же номер  $i$ , что и сами ступени, тепловыделяющие контакты — индекс  $i + 1$  при  $i \leq N - 1$ . Температуру тепловыделяющего контакта нижней  $N$ -й ступени считаем константой  $T_0$ . Перепады температур на ступенях батареи обозначаем  $\Delta_i = T_{i+1} - T_i$  при  $i \leq N - 1$  и  $\Delta_N = T_0 - T_N$  при  $i = N$ , электрические токи  $I_i$ , число термоэлементов в  $i$ -й ступени  $n_i$ , длины полупроводниковых ветвей  $l_i$ , площади сечения ветвей  $n$ - и  $p$ -типа проводимости соответственно  $s_{ni}$  и  $s_{pi}$ , удельные теплопроводности  $\kappa_{ni}$  и  $\kappa_{pi}$ , коэффициенты термоэдс  $\alpha_{ni}$  и  $\alpha_{pi}$ , удельные теплоемкости  $c_{ni}$  и  $c_{pi}$ , плотности полупроводников  $\gamma_{ni}$  и  $\gamma_{pi}$ . Полные теплоемкости, теплопроводности и термоэдс полупроводниковых ветвей в  $i$ -й ступени равны соответственно

$$C_i^{(0)} = n_i(c_{ni}\gamma_{ni}s_{ni} + c_{pi}\gamma_{pi}s_{pi})l_i, \quad (2)$$

$$K_i = n_i(\kappa_{ni}s_{ni} + \kappa_{pi}s_{pi})/l_i, \quad (3)$$

$$\alpha_i = n_i(|\alpha_{ni}| + \alpha_{pi}). \quad (4)$$

Наконец, приписываем теплопоглощающим контактам, как описано выше, полные теплоемкости

$$C_1 = c_1\gamma_1S_1L_1 + 0.4C_1^{(0)} + C_0,$$

$$C_i = c_i\gamma_iS_iL_i + 0.4C_i^{(0)} + 0.6C_{i-1}^{(0)} \quad (i \geq 2), \quad (5)$$

где  $c_i$  — удельные теплоемкости контактных пластин,  $\gamma_i$  — их плотности,  $S_i$  и  $L_i$  — их площади и толщины,  $C_0$  — теплоемкость охлаждаемого достаточно малого объекта.

Далее предполагается, что перечисленные выше параметры материалов, включая термоэдс  $\alpha_i$ , не зависят от температуры. Коэффициенты Пельтье при этом пропорциональны температурам контактов и через них зависят от времени. Благодаря этой зависимости эффект Пельтье, пропорциональный току, влияет на время переходного процесса.

### 3. Расчет времени переходного процесса в двухступенчатой батарее

Применяя описанный выше метод расчета и используя введенные обозначения, можно представить уравнения теплового баланса для рабочего и промежуточного контактов в виде

$$\alpha_1 T_1 I_1 - K_1(T_2 - T_1) + C_1 \frac{dT_1}{dt} = 0, \quad (6)$$

$$\alpha_2 T_2 I_2 - K_2(T_0 - T_2) - \alpha_1 T_2 I_1 + K_1(T_2 - T_1) + C_2 \frac{dT_2}{dt} = 0. \quad (7)$$

Для краткости записи мы опустим не зависящие от времени члены, описывающие джоулево тепло, так как в используемом приближении они не влияют на время переходного процесса [5]. Далее для обозначения производных используется штрих.

Заменяем (7) уравнением, полученным сложением (6) и (7), и температуры  $T_i$  их разностями  $\Delta_i$  ( $\Delta_1 = T_2 - T_1$ ,  $\Delta_2 = T_0 - T_2$ ):

$$\alpha_1 I_1 T_0 - (K_1 + \alpha_1 I_1)\Delta_1 - \alpha_1 I_1 \Delta_2 - C_1(\Delta_1' + \Delta_2') = 0, \quad (8)$$

$$\alpha_2 I_2 T_0 - (K_2 + \alpha_2 I_2)\Delta_2 - \alpha_1 I_1 \Delta_1 - C_1 \Delta_1' - (C_1 + C_2)\Delta_2' = 0. \quad (9)$$

Решения (8) и (9) ищем в виде

$$\Delta_i = \Delta_{st} [A_i - B_i \exp(-\lambda_1 t) - D_i \exp(-\lambda_2 t)], \quad i = 1, 2. \quad (10)$$

Константы  $\Delta_{st}$  и  $A_i$ , определяемые путем расчета термобатареи в стационарном режиме, считаются известными,  $A_1 + A_2 = 1$ . Подставляя (10) в уравнения (8) и (9), получаем линейные алгебраические уравнения для  $B_i$  и  $D_i$  и характеристическое квадратное уравнение, два корня которого дают константы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ :

$$C_1 C_2 \lambda^2 - [(C_1 + C_2)(K_1 + \alpha_1 I_1) + C_1(K_2 + \alpha_2 I_2) - 2C_1 \alpha_1 I_1] \lambda + (K_1 + \alpha_1 I_1)(K_2 + \alpha_2 I_2) - (\alpha_1 I_1)^2 = 0. \quad (11)$$

Вводя обозначения

$$\mu_i = \frac{K_i + \alpha_i I_i}{C_i}, \quad \nu = \frac{C_1(K_1 - \alpha_1 I_1)}{C_2(K_1 + \alpha_1 I_1)}, \quad M = \frac{(\alpha_1 I_1)^2}{C_1 C_2}, \quad (12)$$

получаем решения уравнения (11) в виде

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} [\mu_1(1 + \nu) + \mu_2] \pm \left\{ \frac{1}{4} [\mu_1(1 + \nu) + \mu_2]^2 - \mu_1 \mu_2 + M \right\}^{1/2}. \quad (13)$$

Две константы  $\mu_1$  и  $\mu_2$  определяют времена переходных процессов в двух ступенях по отдельности, они имеют один порядок величины. Константа  $\nu$  зависит в основном от отношения размеров ступеней,  $\nu < 1$ . Квадратичная по току величина  $M$  также значительно меньше единицы. Однако это не значит, что величинами  $\nu$  и  $M$  можно пренебречь в расчете, так как формула (13) содержит относительно малые разности больших величин.

Произведенные далее численные расчеты показывают, что  $\lambda_2$  заметно меньше  $\lambda_1$ . Поскольку эти константы входят в показатели экспонент, искомая постоянная  $\tau$  определяется меньшим из параметров  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ,

$$\tau = 3/\lambda_2. \quad (14)$$

Вычисление  $\tau$  с учетом быстро меняющейся экспоненты в (10) дает уточненную формулу для  $\tau$ :

$$\tau = \frac{3 + \ln(1 - B)}{\lambda_2}, \quad B = B_1 + B_2. \quad (15)$$

При численных расчетах, результаты которых описаны далее, оказывается, что отличие числителя (15) от 3 мало, поэтому мы опустим детали вывода формулы (15) и расчета  $B$ .

#### 4. Численные оценки и сравнение с экспериментальными данными

Переходные характеристики двухступенчатых термобатарей были получены в тех же экспериментах, что и одноступенчатых модулей [5]. Конструкционные параметры исследованных двухступенчатых модулей приведены в табл. 1. Полупроводниковые ветви были изготовлены из твердых растворов  $n\text{-Bi}_2(\text{Te}_{0.9}\text{Se}_{0.1})_3$  и  $p\text{-(Bi}_{0.25}\text{Sb}_{0.75})_2\text{Te}_3$ , теплопереходы представляли собой керамические пластины на основе  $\text{BeO}$ . В качестве охлаждаемого объекта использовался медный брусок с размерами  $3 \times 3 \times 2$  мм.<sup>1</sup>

Максимальные токи, пропускаемые через модули в процессе измерений, были близки к оптимальным в режиме наибольшей разности температур, минимальные — к оптимальным в режиме наибольшего холодильного коэффициента. Во всех случаях зависимости перепада температуры от времени были монотонными, близкими к экспоненциальным. Величины токов, перепадов температуры на всем модуле в стационарном режиме и измеренных переходных констант  $\tau$  приведены в табл. 2.

В расчете использовались те же параметры полупроводниковых материалов  $c = 0.15$  Дж/г·К,  $\gamma = 7.86$  г/см<sup>3</sup>,  $\kappa = 1.6$  Вт/м·К,  $\alpha_p = |\alpha_n| = 195$  мкВ/К и

<sup>1</sup> Такой же брусок был помещен на теплопоглощающие контакты одноступенчатых модулей [5], но не учитывался в расчете времени  $\tau$ . Учет этой тепловой нагрузки приближает расчетные значения  $\tau$  к экспериментальным.

**Таблица 1.** Параметры двухступенчатых термоэлектрических модулей

Номер модуля и ступени	Число ветвей	Длина ветвей, мм	Сечение ветвей, мм <sup>2</sup>	Площадь керамической пластины, мм <sup>2</sup>	Толщина керамической пластины, мм
1.1	12	3.0	1.9 × 1.9	8 × 9	1
1.2	34	3.0	1.9 × 1.9	15 × 15	1
2.1	12	3.4	1 × 1	5 × 5	1
2.2	38	3.8	1 × 1	8 × 11	1

**Таблица 2.** Результаты измерений и расчетов времени переходного процесса

Номер модуля	Ток, А	$\Delta_{st}$ , К	$\tau$ , с	
			эксперимент	расчет
1	5	97.6	53	45
	3	82.4	58	54
	2.5	75.8	62	57
2	1.1	96.4	102	81
	0.77	91.2	102	93
	0.55	80.3	110	103

бериллиевой керамики  $c_k = 1$  Дж/г·К,  $\gamma_k = 3.1$  г/см<sup>3</sup>, что и в работе [5]; параметры меди считались равными  $c_0 = 0.384$  Дж/г·К,  $\gamma_0 = 8.93$  г/см<sup>3</sup> [11]. Расчетные значения  $\tau$ , полученные по формулам (2)–(5), (12)–(14), приведены в табл. 2 вместе с экспериментальными. Из сравнения расчета с экспериментом видно, что, несмотря на упрощающие предположения, имеется согласие результатов теории с экспериментальными данными с точностью  $\sim (10\text{--}15)\%$ , с которой известны параметры материалов термобатареи.

Результаты расчета указывают на слабое увеличение времени  $\tau$  при уменьшении тока в соответствии с экспериментом.

Как и в случае одноступенчатых модулей, теплоемкость контактных пластин в большей степени влияет на инерционность модулей, чем теплоемкость полупроводниковых ветвей.

Параметры  $\mu_1$  и  $\mu_2$  оказались близкими друг к другу,  $\nu \approx 0.2$ . Константы  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  различались более чем в 2 раза.

Оценка поправочного члена в (15) для ряда конкретных термобатарей при различных токах, не превышающих оптимальные, неизменно давала величины  $|B|$ , достаточно малые для того, чтобы можно было считать формулу (14) вполне пригодной для расчета. Наибольшая величина  $|B|$  была получена в случае, когда ток в 1-й ступени отсутствовал, т.е. эта ступень в действительности являлась пассивным объектом охлаждения, а все устройство представляло собой одноступенчатую

батарею с охлаждаемым объектом, обладающим значительными размерами и теплоемкостью. В этом случае формула (15) дала величину  $\gamma$  приблизительно на 10% больше, чем (14).

### 5. Многоступенчатая батарея

Вывод, что время переходного процесса системы определяется наименьшим решением характеристического уравнения, является достаточно общим и используется далее для расчета постоянной  $\tau$  термобатареи с произвольным числом ступеней  $N$ .

Нумерация  $N$  ступеней каскадной батареи и обозначение температур теплопереходов были показаны на рис. 1. Система уравнений теплового баланса для  $N$  теплопоглощающих контактов в переменных  $\Delta_i = T_{i+1} - T_i$ , где  $i = 1, 2, \dots (N - 1)$ ,  $\Delta_N = T_0 - T_N$ , имеет вид

$$\alpha_1 I_1 T_0 - \alpha_1 I_1 \sum_{k=1}^N \Delta_k - K_1 \Delta_1 - C_1 \sum_{k=1}^N \Delta'_k = 0, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &\alpha_i I_i T_0 - \alpha_i I_i \sum_{k=i}^N \Delta_k - K_i \Delta_i - \alpha_{i-1} I_{i-1} T_0 \\ &+ \alpha_{i-1} I_{i-1} \sum_{k=1}^N \Delta_k + K_{i-1} \Delta_{i-1} \\ &- C_i \sum_{k=i}^N \Delta'_k = 0 \quad (i = 2, 3, \dots N). \end{aligned} \quad (17)$$

Далее для сокращения записи опускаем слагаемые вида  $\alpha_i I_i T_0$ , понимая под  $\Delta_i$  только их переменные составляющие. Систему (16), (17) переписываем, складывая каждое уравнение со всеми предыдущими, при этом все  $N$  уравнений принимают одинаковую форму:

$$\alpha_i I_i \sum_{k=i}^N \Delta_k + \sum_{k=1}^{i-1} \alpha_k I_k \Delta_k + K_i \Delta_i + \sum_{j=1}^i C_j \sum_{k=j}^N \Delta'_k = 0. \quad (18)$$

Первые два члена можно объединить, введя обозначение  $m$  для минимального из чисел  $i$  и  $k$ ,

$$m = \min(i, k). \quad (19)$$

Поскольку  $m$  определяется двумя индексами  $i, k$ , совокупность величин  $m$  является матрицей.

Для преобразования последнего члена в (18) рассмотрим область изменения индексов  $j$  и  $k$  в двойной сумме, изображенную на рис. 2. Изменим порядок суммирования, используя индекс  $m$ , после чего система (18) приобретает вид

$$\sum_{k=1}^N \alpha_m I_m \Delta_k + K_i \Delta_i + \sum_{k=1}^N \left( \sum_{j=1}^m C_j \right) \Delta'_k = 0. \quad (20)$$

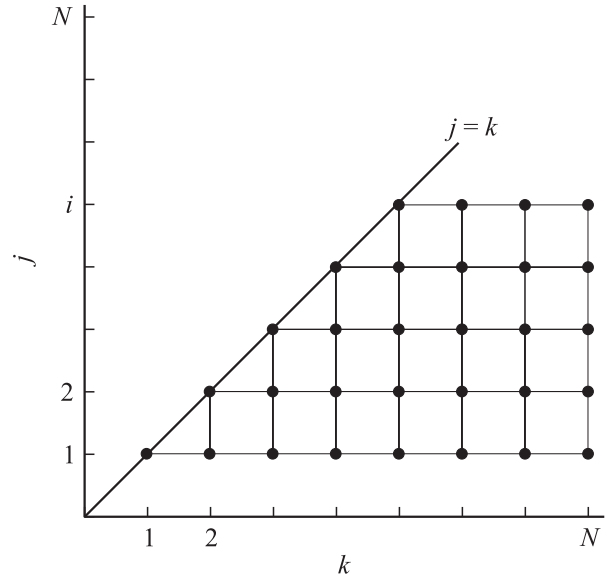


Рис. 2. Область изменения целых чисел  $k, j$  в последних членах уравнений (18) и (20).

Вводя две симметричные матрицы с компонентами

$$k_{ik} = K_i \delta_{ik} + \alpha_m I_m, \quad (21)$$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^m C_j, \quad (22)$$

получаем систему (20) в компактной форме

$$\sum_{k=1}^N (k_{ik} \Delta_k + c_{ik} \Delta'_k) = 0. \quad (23)$$

Ищем частные решения системы дифференциальных уравнений в виде

$$\Delta_i(t) = B_i \exp(-\lambda t) \quad (24)$$

и получаем систему линейных однородных алгебраических уравнений для  $B_i$  и характеристическое уравнение степени  $N$  для собственных значений  $\lambda$ :

$$\det(k_{ik} - \lambda c_{ik}) = 0. \quad (25)$$

Искомое время переходного процесса  $\tau$  выражается через наименьшее из  $N$  решений уравнения (25):

$$\tau = 3/\lambda_{\min}. \quad (26)$$

Уравнение (25) при  $N = 2$  переходит в (11), а при  $N = 1$  дает полученную ранее в [5] формулу для константы  $\tau$  термоэлемента.

Таким образом, вычисление времени выхода многоступенчатой батареи на стационарный режим сводится к стандартной задаче вычислительной математики — поиску собственных значений двух симметричных матриц  $k_{ik}$  и  $c_{ik}$  (или одной матрицы вида  $(c_{ik})^{-1}(k_{ik})$ ).

## Список литературы

- [1] Л.С. Стыльбанс, Н.А. Федорович. ЖТФ, **28**, 489 (1958).
- [2] J.E. Parrot. Sol. St. Electron., **1**, 135 (1960).
- [3] Г.А. Гринберг. ЖТФ, **38**, 418 (1968).
- [4] Е.К. Иорданишвили, В.П. Бабин. *Нестационарные процессы в термоэлектрических и термомагнитных системах преобразования энергии* (М., Наука, 1983).
- [5] Е.И. Астахова, В.П. Бабин, Ю.И. Равич. ИФЖ, **62**, 284 (1992).
- [6] Е.К. Иорданишвили, Б.Е.-Ш. Малкович. Деп. в ВИНТИ, № 1918-76; анн. ИФЖ, **31**, 373 (1976).
- [7] Ю.И. Агеев, Б.М. Гольцман, А.В. Дитман, А.С. Ривкин. Деп. в ВИНТИ, № 4212-76; анн. ИФЖ, **32**, 913 (1977).
- [8] R.P. Wywaters, H.A. Blum. Adv. Energy Conversion, **10**, 193 (1970).
- [9] А.Г. Щербина. В сб.: *Термоэлектрические свойства полупроводников* (М., Л., АН СССР. 1963) с. 146.
- [10] Е.Г. Покорный, А.Г. Щербина. *Расчет полупроводниковых охлаждающих устройств* (Л., Наука, 1969).
- [11] *Справочник химика* (М., Л., Госхимиздат, 1962) т. 1.

Редактор Л.В. Шаронова

## A method of calculating the transient time of a multi stage thermoelectric cooler

*Yu.I. Ravich, A.N. Gordienko*

St. Petersburg State Polytechnical University,  
195251 St. Petersburg, Russia

**Abstract** The calculation of a transient time  $\tau$  of a cascade thermoelectrical cooler has been fulfilled. An applied approximate method does not involve any solution of the heat equations with partial derivatives for semiconducting pellets. The transient time  $\tau$  of a two stage battery has been obtained in an analytical form as a solution of a square equation, its coefficients depending on thermoelectric parameters of the semiconductors, specific heat of the battery materials and sizes of parts of the cooler. For the battery with any number of stages  $N$ , the calculation has been reduced to a standard problem of determination of eigenvalues of two symmetric matrixes of order the  $N$ . The calculated values of the  $\tau$  are in satisfactory agreement with experimental data for concrete two stage batteries.