11

Полосовой фильтр для излучения Вавилова–Черенкова

© С.Н. Галямин, И.А. Климов, С.Г. Григорьев, А.В. Тюхтин

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: s.galyamin@spbu.ru

Поступило в Редакцию 13 марта 2025 г.
В окончательной редакции 7 августа 2025 г.
Принято к публикации 1 сентября 2025 г.

Исследовано влияние простейшей нелокальной поверхности — тонкопроволочной мелкопериодической одномерной сетки проводников — на характеристики электромагнитного поля, генерируемого заряженным сгустком при движении по оси цилиндрического вакуумного канала в безграничном диэлектрике. Сетка расположена в вакууме на расстоянии порядка периода структуры от границы раздела. Для решения задачи использованы усредненные граничные условия с учетом поправок, описывающих влияние границы раздела на возбуждаемый в плоскости сетки усредненный поверхностный ток. Показано, что в совокупности данная конфигурация работает как полосовой фильтр, позволяя выделять в спектре излучения Вавилова–Черенкова достаточно узкую полосу частот.

Ключевые слова: излучение Вавилова–Черенкова, форм-фактор, мелкопериодическая сетка, тонкопроволочная сетка, усредненные граничные условия, полосовой фильтр.

DOI: 10.61011/JTF.2026.01.62047.35-25

Введение

Задача о генерации излучения Вавилова–Черенкова (ИВЧ) при пролете заряженного сгустка сквозь канал в диэлектрической среде является ключевой задачей для целого ряда перспективных направлений современной электродинамики, таких как развитие новых методов неинвазивной диагностики пучков частиц на ускорительных установках [1–4] и разработка новых типов источников излучения [5–12].

Решение данной задачи в простейшей постановке хорошо известно [13]. В частности, при достаточно узком канале ИВЧ генерируется почти как в безграничном диэлектрике, а в целом влияние канала можно сравнить с фильтром нижних частот, так как высокие частоты или короткие длины волн (порядка и меньше размера канала) существенно подавляются в спектре ИВЧ [14,15].

Как известно, генерация ИВЧ возможна не только в диэлектрике, но и в любой другой замедляющей структуре. Поэтому излучение движущихся заряженных сгустков в присутствии мелкопериодических структур из так называемых проводов (т.е. протяженных проводников различного поперечного сечения) достаточно активно исследовалось. В частности, большой интерес привлекала к себе так называемая проволочная среда (wire medium) – трехмерная решетка из тонких проводов (поперечный размер проводников мал по сравнению с расстоянием между ними), рассматриваемая в длинноволновом приближении (в этом случае более точным термином будет метасреда) [16–18]. Так, в ряде работ анализировалось ИВЧ как в безграничных [19–21], так и в полуограниченных проволочных метасредах [22], в основном в контексте развития методов диагностики заряженных сгустков. Также проволочная среда неизменно присутствовала в теоретических и эспериментальных работах по левым средам (left-handed media) [23,24], включая исследования по тематике излучения движущихся зарядов [25–27].

Генерация излучения движущимися зарядами в присутствии двумерных мелкопериодических структур (сеток) также привлекала существенное внимание исследователей [28,29]. Такие сетки в длинноволновом приближении (т.е. когда длина волны существенно превышает расстояния между проводниками; синонимом данного приближения применительно к сеткам является термин мелкопериодические) и в предположении, что поперечные размеры проводников малы по сравнению с периодом, могут описываться с помощью усредненных граничных условий (УГрУ) Конторовича [30–32], что значительно упрощает анализ. В работе [33] в такой постановке исследовалась генерация ИВЧ в открытом круглом волноводе (расположенном в вакууме) с тонкопроволочной сетчатой стенкой из перекрещивающихся проводов. В частности, в [33] было показано, что в проволочном волноводе только из продольных проводов генерация излучения черенковского типа не происходит.

Отметим также, что одномерные сетки из толстых проводников также поддаются усредненному описанию в длинноволновом приближении с помощью так называемых эквивалентных граничных условий Вайнштейна–Сивова [34], однако эта ситуация в настоящей работе не рассматривается. Тем не менее в этой связи следует отметить, например, работу [35], где исследовалась кильватерная диэлектрическая ускорительная структура (круглый волновод, заполненный диэлектриком и имеющий осевой вакуумный канал),

внешняя стенка которой представляла собой не сплошной металлический кожух, а формировалась плотной одномерной сеткой продольных проводников. Также в работе [36] анализировалась многослойная частотно-перестраиваемая кильватерная структура, в которой слой управляющих электродов (постоянное напряжение, подаваемое на них, изменяет диэлектрическую проницаемость соседнего сегнетоэлектрического слоя) представлял собой одномерную сетку продольных проводящих лент. В обоих случаях, такая азимутальная сегментация проводящих цилиндрических слоев приводит к подавлению азимутальных поверхностных токов и препятствует возбуждению паразитных несимметричных мод.

В настоящей работе мы обращаемся к упомянутой в самом начале данного обзора ключевой задаче о генерации ИВЧ при пролете заряженного сгустка сквозь канал в диэлектрике и исследуем влияние мелкопериодической сетки из параллельных проводов, расположенной в канале вблизи поверхности диэлектрика, на характеристики излучения. Необходимо отметить, что обсуждаемая сетка является простейшим примером так называемой нелокальной поверхности, так как в соответствующих УГрУ присутствует касательная производная от усредненного поверхностного тока (в фурье-представлении это означает зависимость коэффициентов УГрУ от компонент волнового вектора). В целом нелокальные поверхности в последние годы привлекают пристальное внимание исследователей, так как предоставляют широкие возможности для управления характеристиками электромагнитного излучения [37–39]. Однако в известной нам литературе данный вопрос не исследовался в контексте управления структурой поля ИВЧ. Более того, граничные задачи с применением УГрУ в случае, когда сетка близка к границе диэлектрика (в этой ситуации коэффициенты УГрУ существенно модифицируются [40,41]), а источником поля является равномерно движущийся заряженный сгусток, не анализировались в известной нам научной литературе. Основным физическим результатом работы является обнаружение и описание нового физического эффекта, который назван эффектом полосового фильтра для ИВЧ.

1. Формулировка задачи. Поле сгустка зарядов в безграничной диэлектрической среде

Пусть в однородном изотропном диэлектрике с $\varepsilon > 1$ ($\mu = 1$) имеется вакуумный цилиндрический канал радиуса a, по оси которого равномерно со скоростью $\upsilon = c\beta$ (c — скорость света в вакууме) движется сгусток зарядов (рис. 1) (используется цииндрическая система координат r, φ, z), при этом $\varepsilon > \beta^{-2}$, т.е. выполнено условие ИВЧ в диэлектрике. Будем считать, что исследуемый сгусток представляет собой бесконечно тонкий равномерно заряженный диск радиуса b (влияние

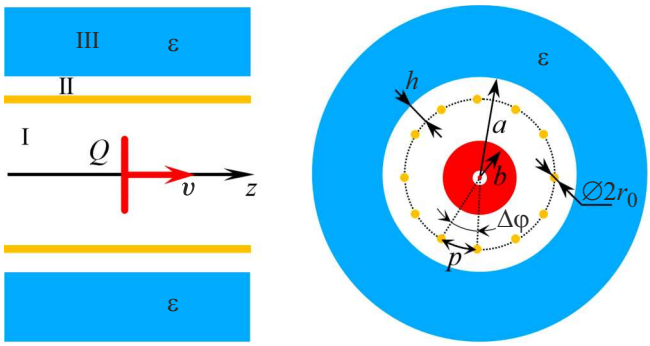

Рис. 1. Геометрия задачи и основные обозначения.

продольного размазывания сгустка обсуждается в конце разд. 1).

На расстоянии h от границы раздела вакуум–диэлектрик расположен проволочный волновод из тонких проводов с радиусом поперечного сечения r_0, расположенных равномерно на расстоянии $p = (a - h)\Delta\varphi$ друг от друга (p отсчитывается вдоль дуги, $\Delta\varphi = 2\pi/N$, $N \gg 1$ — общее количество проводников) и ориентированных вдоль оси канала (вдоль оси z). Описанную структуру нетрудно реализовать практически, если между проводниками и диэлектриком поместить слой материала с проницаемостью, близкой к единице. Таким материалом может быть, например, гидрофобный аэрогель, специально разработанный для пучковых приложений, показатель преломления n которого может лежать в широком диапазоне близких к единице значений: $1.0026 < n < 1.26$ [42].

Для определенности в настоящей работе провода считаются круглыми, однако данное обстоятельство не является принципиальным: для проводов иного поперечного сечения следует лишь заменить r_0 на эффективный радиус [30]. Подразумевается, что $b < a - h$ (сгусток целиком находится внутри проволочного волновода), а также выполнены следующие неравенства:

$$r_0 \ll p \ll \lambda, \tag{1}$$

где λ — длина волны. Требуется определить электромагнитное поле во всем пространстве, но главный интерес представляет область в диэлектрике III ($r > a$).

В используемой системе координат плотность заряда ρ и плотность тока $\mathbf{j} = j\mathbf{e}_z$ рассматриваемого сгустка имеют вид

$$\rho = \frac{Q}{\pi b^2}\,\theta(b - r)\delta(z - \upsilon t), \quad j = \upsilon\rho, \tag{2}$$

где θ — функция единичного включения (Хэвисайда), δ — дельта-функция, Q — полный заряд диска.

Для дальнейшего целесообразно в первую очередь рассмотреть электромагнитное поле, создаваемое источником (2) в безграничной изотропной немагнитной среде с произвольной диэлектрической проницаемостью

$\tilde{\varepsilon}$ (в дальнейшем будут обсуждены случаи $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, 1). Кратко приведем соответствующие вычисления и сделаем некоторые замечания относительно результата. Предполагаем, что компоненты поля и источники разложены в частотный интеграл Фурье вида

$$H_\varphi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_{\omega\varphi} e^{-i\omega t}\, d\omega = 2\,\mathrm{Re} \int\limits_{0}^{+\infty} H_{\omega\varphi} e^{-i\omega t}\, d\omega, \qquad (3)$$

(благодаря второму равенству в (3) достаточно рассматривать только положительные частоты, $\omega > 0$). В частности, для фурье-образа плотности заряда (2) имеем

$$\rho_\omega = \frac{Q}{2(\pi b)^2}\, \frac{\theta(b-r)}{\upsilon}\, e^{i\frac{\omega}{\upsilon}z}. \qquad (4)$$

Система уравнений Максвелла для фурье-гармоник принимает следующий вид

$$\begin{cases} \mathrm{rot}\vec{E}_\omega = ik_0\vec{H}_\omega, \\ \mathrm{div}\vec{E}_\omega = 4\pi\tilde{\varepsilon}^{-1}\rho_\omega, \\ \mathrm{rot}\vec{H}_\omega = -k_0\tilde{\varepsilon}\vec{E}_\omega + 4\pi c^{-1}\vec{j}_\omega, \\ \mathrm{div}\vec{H}_\omega = 0, \end{cases} \qquad (5)$$

где $k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$, и учтены материальные соотношения: $\vec{B}_\omega = \vec{H}_\omega$, $\vec{D}_\omega = \tilde{\varepsilon}\vec{E}_\omega$. Удобно ввести однокомпонентный векторный потенциал $\vec{A}_\omega = A_\omega \vec{e}_z$ и скалярный потенциал Φ_ω, через которые вектора поля выражаются стандартным образом: $\vec{B}_\omega = \mathrm{rot}\vec{A}_\omega$, $\vec{E}_\omega = -\nabla\Phi_\omega + ik_0\vec{A}_\omega$. Наложением калибровочного условия Лоренца, $\partial A_\omega/\partial z - ik_0\tilde{\varepsilon}\Phi_\omega = 0$, стандартным путем получим два неоднородных уравнения Гельмгольца на введенные потенциалы, откуда следует связь между ними, $A_{\omega z} = \tilde{\varepsilon}\beta\Phi_\omega$, что позволяет в дальнейшем искать, скажем, только потенциал Φ_ω. Источник (4) навязывает всем величинам свою зависимость от z, поэтому факторизуем искомый потенциал следующим образом: $\Phi_\omega(r,z) = \phi_\omega(r)\exp(ik_0 z/\beta)$. В результате получим неоднородное уравнение Бесселя нулевого порядка на радиальную часть потенциала ϕ_ω:

$$\left(\Delta_r + \tilde{s}^2\right)\phi_\omega(r) = -\frac{2Q}{\tilde{\varepsilon}\pi b^2}\frac{\theta(b-r)}{\upsilon} = -\frac{2Q}{\tilde{\varepsilon}\pi\upsilon b}\int\limits_0^\infty J_0(\eta r)J_1(b\eta)d\eta, \qquad (6)$$

где $J_{0,1}$ — функции Бесселя, $\Delta_r = \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial/\partial r$, $\tilde{s}^2 = k_0^2\beta^{-2}(\tilde{\varepsilon}\beta^2 - 1)$. Интересующее нас падающее поле есть частное решение уравнения (6), которое можно найти различными известными способами. В частности, можно разложить правую часть в интеграл Фурье–Бесселя нулевого порядка (см. (6), второе равенство) [43] и искать $\phi_\omega(r)$ в виде соответствующего обратного преобразования, что приводит нас к следующему результату:

$$\phi_\omega(r) = \frac{2Q}{\tilde{\varepsilon}\pi b\upsilon}\int\limits_0^\infty \frac{J_1(b\eta)J_0(\eta r)}{\eta^2 - \tilde{s}^2}\, d\eta = \frac{iQ}{2\upsilon\tilde{\varepsilon}}\, 2\,\frac{J_1(b\tilde{s})}{b\tilde{s}}\, H_0^{(1)}(r\tilde{s}), \quad r > b, \qquad (7)$$

где $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля, $\tilde{s} = \sqrt{\tilde{s}^2}$, $\mathrm{Im}\,\tilde{s} > 0$ (как обычно, в среде учитывается малое поглощение). Удобно также ввести в рассмотрение величину $\tilde{\sigma} = \sqrt{-\tilde{s}^2}$, $\mathrm{Re}\,\tilde{\sigma} > 0$, при этом $\tilde{s} = i\tilde{\sigma}$. В результате потенциал заряженного диска Φ_ω можно записать в следующем виде:

$$\Phi_\omega = F_b \Phi_\omega^{\tilde{\varepsilon}}, \qquad (8)$$

где величины в правой части равенства (8) могут быть записаны в двух эквивалентных формах:

$$\Phi_\omega^{\tilde{\varepsilon}} = e^{i\frac{\omega}{\upsilon}z}\left[\begin{array}{l} \dfrac{iQ}{2\upsilon\tilde{\varepsilon}}H_0^{(1)}(r\tilde{s}), \\ \dfrac{Q}{\pi\upsilon\tilde{\varepsilon}}K_0(r\tilde{\sigma}), \end{array}\right. \qquad F_b = \left[\begin{array}{l} \dfrac{2J_1(b\tilde{s})}{b\tilde{s}}, \\ \dfrac{2I_1(b\tilde{\sigma})}{b\tilde{\sigma}}. \end{array}\right. \qquad (9)$$

Здесь K_0 — функция Макдональда, I_1 – модифицированная функция Бесселя, $\Phi_\omega^{\tilde{\varepsilon}}$ — потенциал поля точечного заряда Q, равномерно движущегося в среде с проницаемостью $\tilde{\varepsilon}$, а F_b — так называемый поперечный форм-фактор диска, т.е. множитель, которым потенциал движущегося заряженного диска радиуса b отличается от потенциала движущегося точечного заряда. Тот же самый форм-фактор будет отличать компоненты поля точечного заряда и сгустка, последние вычисляются следующим образом:

$$E_{\omega z} = i\beta k_0^{-1}\tilde{s}^2\Phi_\omega, \quad H_{\omega\varphi} = \tilde{\varepsilon}\beta E_{\omega r} = -\tilde{\varepsilon}\beta\partial\Phi_\omega/\partial r. \qquad (10)$$

Другими словами, в данном случае возбуждается ТМ-поляризация относительно z-координаты [44], при этом компоненты $E_{\omega\varphi}$ и $H_{\omega r}$ равны нулю в силу осевой симметрии, $\partial/\partial\varphi = 0$. В итоге магнитное поле имеет единственную компоненту $H_{\omega\varphi}$, а электрическое поле лежит в плоскости (r, φ), как обычно для поля осесимметричного сгустка в изотропной среде [14].

Запись в соответствии с верхней строкой в (9) удобна в случае (i), когда $\tilde{\varepsilon} > \beta^{-2}$, т.е. в случае движения сгустка в среде со скоростью, превышающей порог ИВЧ. Согласно постановке исходной задачи (рис. 1), случай (i) имел бы место, если бы рассматриваемый сгусток двигался в безграничной среде с проницаемостью области III, т.е. при $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$. При этом $\tilde{s}$ вещественно и имеет вид $\tilde{s} = s \equiv k_0\beta^{-1}\sqrt{\varepsilon\beta^2 - 1}$.

Нижняя строка в (9) удобна в случае (ii), когда $\tilde{\varepsilon} < \beta^{-2}$, т.е. в случае движения сгустка медленнее черенковского порога. Именно этот случай реализуется в рассматриваемой задаче (рис. 1), так как сгусток движется в вакуумной области I, $\tilde{\varepsilon} = 1$ и условие ИВЧ не может быть выполнено, при этом

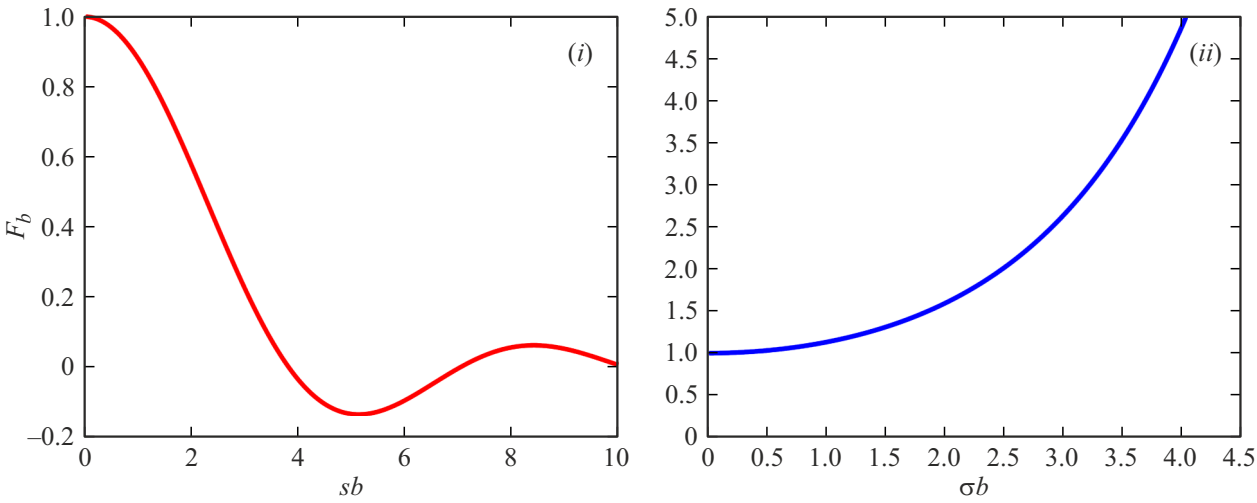

Рис. 2. Зависимость форм-фактора F_b от sb при выполнении условия ИВЧ, случай (i) (слева) и его зависимость от σb при невыполнении этого условия, случай (ii) (справа).

$\tilde{\sigma} = \sigma \equiv k_0\beta^{-1}\sqrt{1-\beta^2} = k_0/(\beta\gamma)$, где γ — Лоренц-фактор сгустка.

На рис. 2 приведены типичные зависимости форм-фактора от аргумента (пропорцинального частоте ω). Видно, что в обоих случаях $F_b \to 1$ при $b \to 0$. Однако, в случае (i) форм-фактор осциллирует с убыванием и зануляется при значениях sb, равных нулям функции Бесселя J_1 (поле движущегося заряженного диска отсутствует при таких параметрах вследствие деструктивной интерференции). Можно принять в качестве верхней границы спектра ИВЧ частоту, удовлетворяющую соотношению $sb = j_{11} \approx 3.832$, где j_{11} — первый нуль функции Бесселя J_1. Другими словами, в этом случае размазывание заряда в поперечном направлении эквивалентно действию фильтра нижних частот с частотой отсечки $\omega_0 = cb^{-1}\beta j_{11}/\sqrt{\varepsilon\beta^2-1}$.

Напротив, в случае (ii) форм-фактор экспоненциально возрастает, так как в данном случае складываются неосциллирующие так называемые эванесцентные волны, амплитуды которых имеют один и тот же знак, т.е. интерференция полностью конструктивная. Экспоненциальный рост F_b не приводит к физическому противоречию, так как потенциал поля точечного заряда $\Phi_\omega^{\tilde{\varepsilon}}$ сам по себе экспоненциально мал и убывает с ростом σ быстрее форм-фактора ($r > b$): $\sim \exp(-\sigma r)$ против $\sim \exp(\sigma b)$. Какой-либо частотной отсечки, вызванной поперечным размыванием сгустка, в данном случае нет.

Отметим, что на уровне фурье-гармоник нетрудно учесть отличное от дельта-образного распределение заряда по продольной координате z, обозначим его $\eta(z-\upsilon t)$. Для продольно-размазанного заряженного диска плотность заряда вместо (2) имеет вид

$$\rho_l = \frac{Q}{\pi b^2}\,\theta(b-r)\eta(z-\upsilon t). \tag{11}$$

Фурье-образ плотности (11) имеет вид $\rho_{l\omega} = \rho_\omega F_l$, где ρ_ω дается формулой (4), а

$$F_l = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \eta(\xi) e^{-i\xi\frac{\omega}{\upsilon}}\,d\xi, \tag{12}$$

т. е. с точностью до множителя 2π является преобразованием фурье функции продольного распределения заряда по разностной координате $\xi = z - \upsilon t$, вычисленным в точке ω/υ. С физической точки зрения F_l является так называемым продольным форм-фактором, т. е. множителем, которым поле продольно-размазанного диска отличается от поля бесконечно тонкого (дельта-образного) диска (2). В частности, в случае гауссова распределения со среднеквадратичной полушириной (rms half-length) τ,

$$\eta(\xi) = (\sqrt{2\pi}\tau)^{-1}\exp\left[-\xi^2/(2\tau^2)\right],$$

и продольный форм-фактор имеет вид

$$F_l = \exp\left[-\omega^2\tau^2/(2\upsilon^2)\right].$$

Поскольку в настоящей работе основное внимание уделяется влиянию поперечных эффектов, мы не будем учитывать F_l в дальнейших выкладках (конкретные неравенства, при которых можно приближенно положить $F_l \approx 1$, будут выписаны далее), а также под форм-фактором всюду ниже будем понимать поперечный форм-фактор.

2. УГрУ на сетке и решение задачи

Перейдем к рассмотрению граничной задачи, представленной на рис. 1. На границе областей II и III ставятся стандартные условия непрерывности компонент $E_{\omega z}$ и $H_{\omega\varphi}$. Далее задача решается в приближении (1), которое позволяет использовать для описания

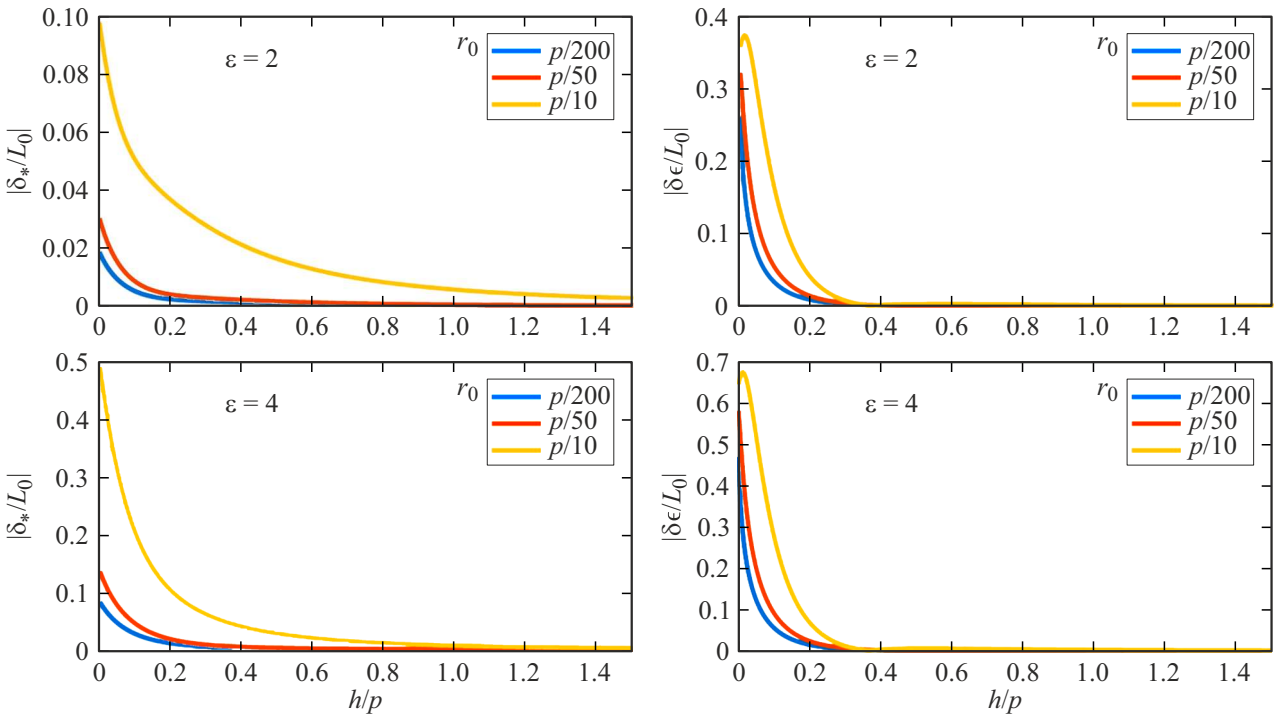

Рис. 3. Зависимость величин $\left|\delta_* L_0^{-1}\right|$ (левый столбец) и $\left|\delta\epsilon L_0^{-1}\right|$ (правый столбец) от отношения h/p при различных значениях r_0 (указаны в легенде), $\varepsilon = 2$ (верхний ряд) и $\varepsilon = 4$ (нижний ряд), $p = 1$ cm, $\lambda = 3p$. Введены обозначения: $L_0 \equiv \ln\left(\frac{p}{2\pi r_0}\right)$, $\epsilon \equiv \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$.

проволочной сетки усредненные граничные условия (УГрУ) [30,32,41]. Используя эти условия, мы фактически вычисляем усредненное поле (именно оно представляет практический интерес), которое совпадает с реальным на удалении от сетки порядка периода p. В случае сонаправленных с осью z-проводов (с идеальной проводимостью) УГрУ сводятся к непрерывности $E_{\omega z}$ на границе $r = a - h$ и скачку магнитного поля $H_{\omega\varphi}$ в этом слое, связанным с $E_{\omega z}$ следующим образом (учтена зависимость всех величин от z в виде $\exp\left(ik_0\beta^{-1}z\right)$):

$$E^{\mathrm{II}}_{\omega z}\big|_{r=a-h} = E^{\mathrm{I}}_{\omega z}\big|_{r=a-h} = \frac{-ipk_0}{2\pi}\,\Pi\,\left(H^{\mathrm{II}}_{\omega\varphi} - H^{\mathrm{I}}_{\omega\varphi}\right)\big|_{r=a-h}. \tag{13}$$

Параметр Π зависит от геометрических параметров r_0, p и проницаемости среды ε следующим образом:

$$\Pi = \ln\left(\frac{p}{2\pi r_0}\right) - \delta_* - \frac{1}{\beta^2}\left[\ln\left(\frac{p}{2\pi r_0}\right) - \delta\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right], \tag{14}$$

где поправочные коэффициенты δ_* и δ (сохранено принятое в [30,40,41] обозначение, которое не должно приводить к путанице с дельта-функцией) вызваны близостью диэлектрика к сетке и описывают его влияние на распределение усредненного поверхностного тока в слое $r = a - h$, они имеют следующий вид [40,41]:

$$\delta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p^2+4h^2}{r_0^2+4h^2}\right) + \frac{p^2}{6\left(p^2+4h^2\right)} + \frac{4h}{p}\arctan\left(\frac{p}{2h}\right) - 2, \tag{15}$$

$$\delta_* = \int\limits_0^\infty \frac{2J_2(\xi)}{\xi}\left[\ln\left(\frac{p^2+\left(2h+\xi\ell\right)^2}{r_0^2+\left(2h+\xi\ell\right)^2}\right) + \frac{p^2}{3\left(p^2+(2h+\xi\ell)^2\right)} + 4\,\frac{2h+\xi\ell}{p}\arctan\left(\frac{p}{2h+\xi\ell}\right) - 4\right]d\xi, \tag{16}$$

где $\ell = ik_0^{-1}/\sqrt{\varepsilon-1}$. Интеграл (16) легко рассчитывается численно.

Отметим, что УГрУ (13) для рассматриваемой здесь цилиндрической сетки без учета влияния диэлектрика непосредственно выведены в [32], а также они следуют из более общего результата для сетки из непараллельных проводов, расположенной на неплоской поверхности [31], при этом их вид не отличается от вида обычных „плоских“ УГрУ. Далее, как отмечалось в [30,41], поправки (15) и (16) эквивалентны влиянию определенных сеток отражения, поэтому вид этих поправок для цилиндрической сетки также не отличается от соответствующих поправок в плоском случае [40,41].

Для иллюстрации влияния поправок (15) и (16) на УГрУ, на рис. 3 приведены типичные графики относительных величин

$$\left|\delta_* \Big/ \ln\left(\frac{p}{2\pi r_0}\right)\right| \quad \text{и} \quad \left|\delta\,\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1} \Big/ \ln\left(\frac{p}{2\pi r_0}\right)\right|$$

в зависимости от отношения h/p. Видно, что при достаточно малых h ($h \ll p$) влияние границы раздела вакуум–диэлектрик оказывается значительным, а уже при $h = p$ становится практически пренебрежимым. При

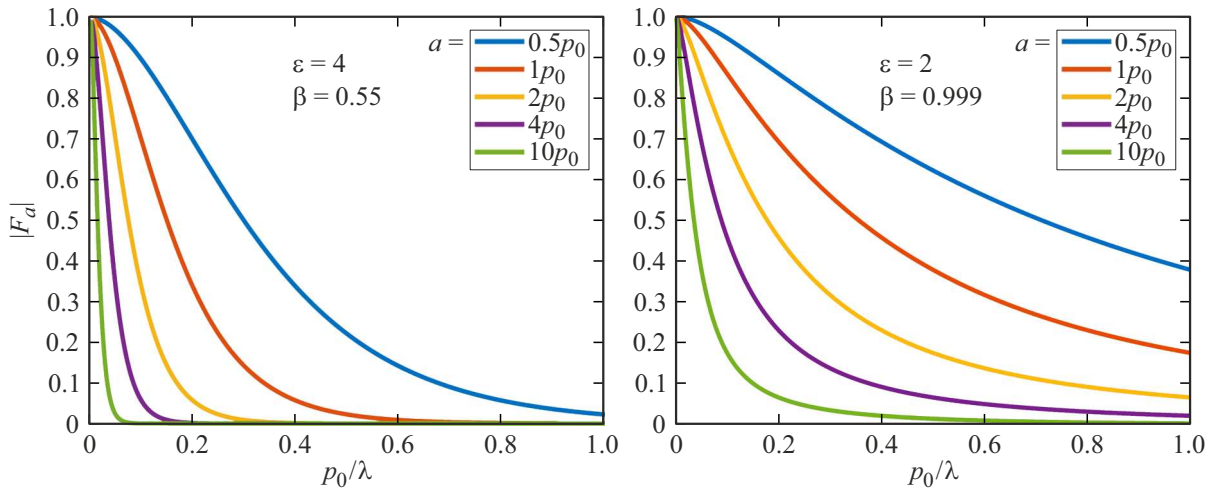

Рис. 4. Зависимость форм-фактора F_a вакуумного канала без сетки от отношения $p_0/\lambda = k_0/(2\pi/p_0)$ при различных ε и β (условие ИВЧ считается выполненным) и различных значениях радиуса канала a (указаны в легенде), $p_0 = 1$ cm.

$h \gg p$ формулы (15) и (16) также перейдут в соотношения, определяющие УГрУ в вакууме [32]. Таким образом, рис. 3 подтверждает известный факт, что влияние близко расположенного к сетке диэлектрика на вид УГрУ существенно только при $h \lesssim p$ [30,40,41]. В дальнейшем при численных расчетах мы будем считать это неравенство выполненным.

Формальное решение для потенциала в области I берется в виде суммы потенциала диска в неограниченном вакууме (формула (9), нижняя строка, $\tilde{\varepsilon} = 1$) и решения однородного уравнения (6), не имеющего особенности при $r = 0$. В области II потенциал берется в виде суммы двух линейно независимых решений однородного уравнения (6), а в области III — в виде одного линейно независимого решения, удовлетворяющего требованию экспоненциального убывания при $r \to \infty$ (в среде учитывается малое поглощение). С учетом этого имеем

$$\Phi_\omega^{(\mathrm{I})} = \frac{Q}{\pi\upsilon} e^{i\frac{\omega}{\upsilon}z} F_b \left[K_0(r\sigma) + C^{\mathrm{I}} I_0(r\sigma)\right],$$

$$\Phi_\omega^{(\mathrm{II})} = \frac{Q}{\pi\upsilon} e^{i\frac{\omega}{\upsilon}z} F_b \left[C^{\mathrm{II}} I_0(r\sigma) + D^{\mathrm{II}} K_0(r\sigma)\right],$$

$$\Phi_\omega^{(\mathrm{III})} = \frac{iQ}{2\upsilon\varepsilon} e^{i\frac{\omega}{\upsilon}z} F_b D^{\mathrm{III}} H_0^{(1)}(rs), \tag{17}$$

где $C^{\mathrm{I,II}}$, $D^{\mathrm{II,III}}$ — искомые константы. Применение вышеописанных граничных условий при $r = a$ и $r = a - h$ приводит к линейной системе 4×4, которая решается стандартными методами. Для краткости приведем только окончательный результат для наиболее интересной области III и запишем его в следующем виде:

$$\Phi_\omega^{(\mathrm{III})} = F_b F_{ag} \Phi_\omega^{\varepsilon}, \tag{18}$$

где $\Phi_\omega^{\varepsilon}$ — потенциал точечного заряда Q, движущегося в безграничном диэлектрике ε (формула (9), случай (i), $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$), а F_{ag} — форм-фактор вакуумного канала радиуса a, модифицированного сеткой:

$$F_{ag} = \frac{pk_0\Pi\varepsilon}{i\pi^2 s k_0^{-1}(a-h)s} \Big\{ I_0\left[(a-h)\sigma\right] I_0^{-1}(a\sigma)\left[I_0\left[(a-h)\sigma\right]\right.$$
$$\left.\times H_0^{(1)}(as) - a\sigma\Delta_a\Delta_h\right] - \frac{pk_0}{2\pi}\frac{k_0}{\sigma}\frac{a}{a-h}\Delta_a\Pi\Big\}^{-1}, \tag{19}$$

где величина Π определена формулой (14),

$$\Delta_a = H_0^{(1)}(as) I_1(a\sigma) - \frac{\sigma\varepsilon}{s} H_1^{(1)}(as) I_0(a\sigma), \tag{20}$$

$$\Delta_h = K_0(a\sigma) I_0\left[(a-h)\sigma\right] - I_0(a\sigma) K_0\left[(a-h)\sigma\right], \tag{21}$$

причем $\Delta_h \to 0$ при $h \to 0$.

Для дальнейшего сравнительного анализа также целесообразно привести известный результат для случая, когда сетка исключена из рассмотрения и мы имеем пустой вакуумный канал радиуса a в диэлектрике ε (снабдим соответствующий потенциал дополнительным верхним индексом „0“) [13]:

$$\Phi_\omega^{(\mathrm{III})0} = F_b F_a \Phi_\omega^{\varepsilon}, \tag{22}$$

где F_a — форм-фактор вакуумного канала радиуса a, не модифицированного сеткой (в работе [13] он обозначен как η):

$$F_a = \frac{2i}{\pi a s}\frac{\sigma\varepsilon}{s}\frac{1}{\Delta_a}. \tag{23}$$

3. Численные результаты

На рис. 4 представлены зависимости форм-фактора вакуумного канала в диэлектрике F_a от нормированного волнового числа k_0 (пропорционального частоте ω) при различных радиусах канала. Радиус канала выражен в единицах предельного периода p_0, смысл которого

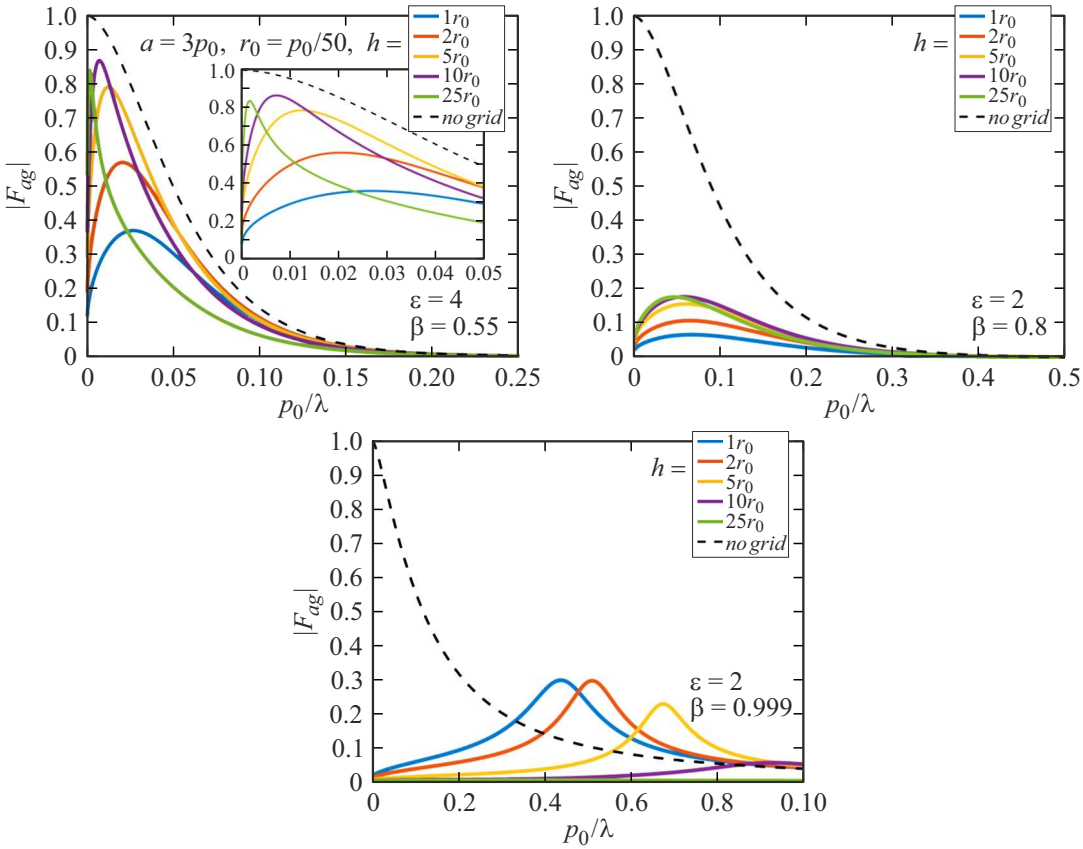

Рис. 5. Зависимость форм-фактора F_{ag} вакуумного канала, модифицированного z-сеткой, от отношения $p_0/\lambda = k_0/(2\pi/p_0)$ при различных ε и β (условие ИВЧ считается выполненным), $a = 3p_0$, $p_0 = 1\,\text{cm}$ и различных расстояниях h между сеткой и диэлектриком (указаны в легенде). Сетка содержит $N = 19$ проводников, p варьируется от $0.99p_0$ до $0.83p_0$ при указанных h.

будет ясен ниже, также на величину $2\pi/p_0$ нормировано волновое число. Пары величин ε и β подобраны таким образом, что условие ИВЧ в диэлектрике выполнено, т.е. в диэлектрике реализуется случай (i). Рис. 4 иллюстрирует известный из литературы факт [13], что введение канала приводит к ограничению частотного спектра ИВЧ сверху, т.е. эквивалентно действию некоторого фильтра нижних частот. Рост a приводит к уменьшению частоты отсечки, а рост β — к ее увеличению. Отметим также, что поведение форм-фактора F_a отличается от соответствующего поведения форм-фактора сгустка, размытого в поперечном направлении (рис. 2) отсутствием строгих нулей и экспоненциальным убыванием (против степенного с осцилляциями) при больших частотах.

На рис. 5 представлены зависимости форм-фактора системы вакуумный канал в диэлектрике — сетка F_{ag} от нормированного волнового числа k_0 (пропорционального частоте ω) при различных значениях расстояния h между сеткой и границей раздела. Пунктирная линия на всех графиках соответствует случаю без сетки при выбранном a (рис. 4). Пары величин ε и β подобраны таким образом, чтобы условие излучения Вавилова-Черенкова в диэлектрике было выполнено. Видно, что вакуумный канал, модифицированный простейшей тонкопроволочной мелкопериодической сеткой, обладает форм-фактором, поведение которого принципиально отличается от поведения обычного форм-фактора канала, представленного на рис. 4. Во всех приведенных случаях видно, что данная структура выделяет в спектре частот ИВЧ определенную полосу, обрезая как нижние, так и верхние частоты. Другими словами, ее действие на спектр ИВЧ эквивалентно действию определенного полосового фильтра, что и отражено в заголовке настоящей работы. Для управления положением полосы пропускания имеется три дополнительных параметра (по сравнению со случаем просто канала) — p, r_0 и h. Для определенности на рис. 5 зафиксирован радиус вакуумного канала a и толщина провода r_0, а параметр h варьируется. Также зафиксировано общее число проводов сетки $N = 19$ ($\Delta\varphi \approx 1/3$), при этом период структуры $p = (a - h)\Delta\varphi$ также варьируется в пределах 15% и при $h \to 0$ он близок к p_0: $p \approx (a - h)/3 \to a/3 = p_0$. Таким образом, p_0 можно трактовать как предельное (наибольшее возможное) значение периода сетки.

При малой скорости заряда (рис. 5, левый график) и малом зазоре между сеткой и диэлектриком модуль форм-фактора F_{ag} в максимуме в несколько раз меньше по сравнению с F_a, полоса пропускания сопоставима и

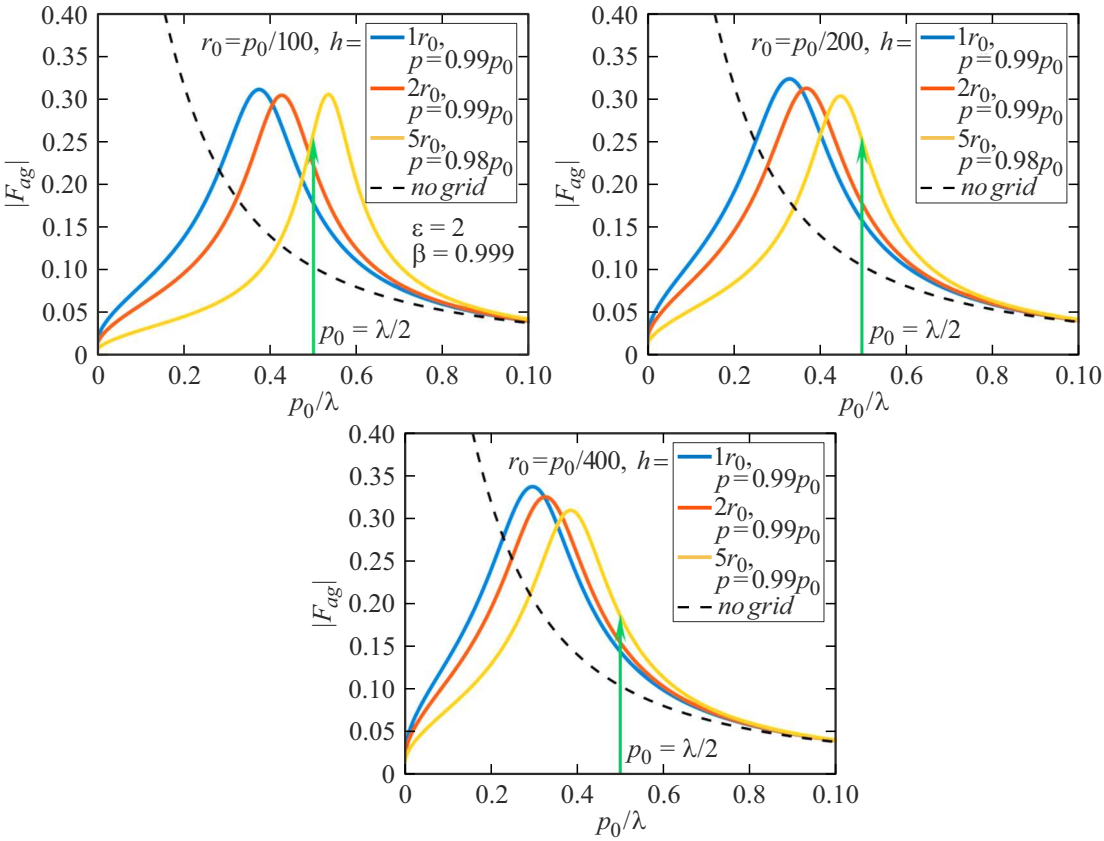

Рис. 6. Зависимость форм-фактора F_{ag} вакуумного канала, модифицированного z-сеткой, от отношения $p_0/\lambda = k_0/(2\pi/p_0)$ при различных r_0 и h, остальные параметры те же, что и на правом графике рис. 5.

отличается только отсутствием близких к нулю частот. Однако с ростом h модуль форм-фактора F_{ag} возрастает, ширина полосы пропускания уменьшается, и при $h = p_0/2$ ($h = 25r_0$) имеем значения в максимуме $|F_{ag}|$ порядка 0.9. При бóльшей скорости сгустка (рис. 5, средний график) имеем более слабую зависимость форм-фактора от величины зазора, однако общая тенденция сохраняется. Величина в максимуме $|F_{ag}|$ в 5–10 раз меньше чем соответствующее значение $|F_a|$.

Эффект подавления близких к нулю частот объясняется следующим образом. Как видно из УГрУ (13), проволочная сетка характеризуется некоторым импедансом $\frac{-ipk_0}{2\pi}\Pi \sim k_0\Pi$. На этих частотах $\Pi \approx \mathrm{const}$, поэтому при $k_0 \to 0$ импеданс также близок к нулю, что при конечном значении $E_{\omega z}$ в плоскости сетки означает возбуждение сильного поверхностного тока, приводящего к экранировке поля заряженного сгустка при $k_0 \to 0$.

Наконец, наиболее интересная ситуация реализуется при релятивистской скорости (рис. 5, правый график). В этом случае полоса пропускания рассматриваемой системы главным образом лежит в том частотном диапазоне, который значительно подавляется каналом без сетки. Форма кривой становится практически симметричной относительно центральной частоты пропускания. Выигрыш в амплитуде потенциала на этой частоте, максимум которого реализуется при малых значениях зазора h (порядка r_0), может быть порядка трехкратного.

Однако на правом графике рис. 5 только кривая для $h = r_0$ (а вернее — только ее длинноволновая часть и окрестность максимума) формально попадает в область применимости УГрУ: как известно [30], приемлемая точность результатов получается уже при $p \leq \lambda/2$. Сдвинуть полосу пропускания в более низкочастотную область можно путем уменьшения радиуса поперечного сечения r_0 и приближением сетки к диэлектрику, что иллюстрируется на рис. 6. Видно, что при вдвое более тонких проводах (рис. 6, левый график) первая кривая ($h = r_0$, т.е. сетка лежит непосредственно на диэлектрике) уверенно попадает в область допустимых длин волн $\lambda \geq 2p_0$. При уменьшении r_0 кривые продолжают сдвигаться влево, и при $r_0 = p_0/400$ все три кривые лежат в области формальной применимости УГрУ. При этом значении r_0 и зазоре $h = 5r_0$ выигрыш в амплитуде потенциала примерно равен 2.

Напомним, что в вышеприведенном анализе мы для простоты не учитывали продольный форм-фактор сгустка F_l (12). Из явного выражения в случае типичного гауссового продольного распределения заряда, $F_l = \exp\left[-k_0^2\tau^2/(2\beta^2)\right]$, следует, что продольное размывание сгустка эквивалентно дополнительному низкочастотному фильтру с частотой отсечки $k_{0\tau} = \sqrt{2}\beta/\tau$.

Для того чтобы пренебречь этим влиянием, т.е. чтобы считать $F_l \approx 1$ в наиболее интересном диапазоне частот, $0 < k_0 < 2\pi/p_0$, необходимо, чтобы сгусток был достаточно тонким, т.е. $\tau \ll \beta p_0/(\sqrt{2}\pi)$, или $\tau \lesssim p_0$.

Обсудим физические причины возникновения пиков пропускания в ультрарелятивистском случае $\beta \to 1$ (рис. 6). В этом случае, как видно из формулы (14), величина П практически полностью определяется поправками δ, δ_* и диэлектрической проницаемостью ε, а логарифмические слагаемые компенсируют друг друга (отметим, что δ_* является частотно-зависимой и, вообще говоря, комплексной). Если учесть, что $\sigma/k_0 \to 0$ при $\beta \to 1$, а также считать малой величину зазора, $h/a \to 0$, то можно получить следующие приближенные выражения, справедливые по крайней мере в диапазоне $1/6 < p_0/\lambda < 1/2$, куда попадают интересующие нас пики пропускания:

$$F_a \approx \frac{4i}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\,\frac{1}{H_0^{(1)}(as)}\,\frac{1}{(ak_0)^2 + 2iak_0\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon-1}}}, \tag{24}$$

$$F_{ag} \approx \frac{4i}{\pi}\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}\,\frac{1}{H_0^{(1)}(as)}\,\frac{1}{(ak_0)^2 + 2iak_0\frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon-1}} - \frac{4\pi a}{p\Pi}}. \tag{25}$$

Приближенные зависимости (24) и (25) с пренебрежимо малой погрешностью описывают поведение кривых, представленных на рис. 6. Как видно, форм-фактор F_{ag} в отличие от F_a имеет знаменатель, типичный для последовательного RLC-контура, так как ток J, возбуждаемый в таком контуре генератором напряжения U_0, имеет вид

$$J \sim \frac{U_0}{\omega^2 + 2i\omega R/L - 1/(LC)}.$$

Нуль вещественной части знаменателя в (25) определяет частоту пика пропускания:

$$(ak_0^{\text{res}})^2 = \frac{4\pi a}{p\Pi} \tag{26}$$

(зависимость П от частоты в рассматриваемом диапазоне достаточно слабая, П можно считать вещественной константой). Наличие резонансной частоты означает, что в „контуре“ (25) присутствуют конечные индуктивность и емкость, в то время как в „контуре“ (24) конечна только индуктивность, а емкость бесконечно велика. Роль конечной емкости, очевидно, играет зазор между проволочной сеткой и диэлектриком.

Таким образом, эффект полосового фильтра обусловлен тем, что для релятивистского заряженного сгустка данная мелкопериодическая сетка, расположенная вблизи диэлектрика, представляет собой резонансную структуру. Канал без сетки работает как „контур“, содержащий только активное сопротивление и индуктивность, а сетка привносит в систему необходимую для формирования резонанса ненулевую емкостную нагрузку.

Заключение

В работе исследовано влияние тонкопроволочной мелкопериодической сетки из параллельных проводников на спектральные характеристики ИВЧ заряженного сгустка, равномерно движущегося по оси вакуумного канала в диэлектрике. Проводники направлены вдоль оси канала и равномерно распределены по цилиндрической поверхности, находящейся вблизи границы раздела вакуум–диэлектрик на расстоянии порядка периода структуры. Рассмотрен достаточно низкочастотный диапазон (соответствующие длины волн много больше периода структуры), позволяющий описывать сетку в терминах УГрУ Конторовича. Существенным обстоятельством в данной работе является малость зазора между сеткой и границей канала, что приводит к необходимости учета в УГрУ поправок, обусловленных влиянием диэлектрической среды на распределение усредненного поверхностного тока в сеточном слое.

Было показано, что влияние рассмотренной структуры на ИВЧ эквивалентно действию полосового фильтра. Иными словами, в генерируемом спектре существенно подавляются как низкие (в том числе и близкие к нулю), так и сравнительно высокие частоты (напомним, что рассмотрение ведется в рамках применимости УГрУ, т.е. верхняя частота должна обеспечивать малость отношения периода сетки к длине волны). Положение полосы пропускания, максимум коэффициента пропускания и форма его профиля (как функции частоты) зависят от параметров сетки и величины зазора. Наболее интересная ситуация, по-видимому, возникает при релятивистской скорости сгустка и малом зазоре (порядка радиуса проводников), когда полоса пропускания является достаточно узкой и попадает в ту область частот, которая отсекается каналом без сетки (как известно, сам по себе вакуумный канал работает как фильтр нижних частот). В этом случае коэффициент пропускания рассматриваемой структуры по полю на центральной частоте может превышать соответствующий коэффициент канала в 2–3 раза, что соответствует выигрышу в мощности почти на порядок. Другими словами, при прочих равных условиях можно выбрать излучающую структуру с более широким каналом (через него легче пропускать заряженный сгусток, так как менее критична поперечная динамика, можно повысить его заряд и т.д.), модифицировать его внутреннюю поверхность обсуждаемой тонкопроволочной сеткой и не проиграть в интенсивности черенковского излучения. Кроме того, полосовой характер получающегося генератора в целом представляется достаточно привлекательным, так как позволяет проводить регистрацию ИВЧ в режиме, более приближенном к монохроматическому.

Благодарности

Авторы выражают благодарность С.Б. Глыбовскому за плодотворные дискуссии.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] A.P. Potylitsyn, S.Y. Gogolev, D.V. Karlovets, G.A. Naumenko, Y.A. Popov, M.V. Shevelev, L.G. Sukhikh. Proc. Intern. Particle Accelerator Conf. 07 (2010).

[2] R. Kieffer, L. Bartnik, M. Bergamaschi, V.V. Bleko, M. Billing, L. Bobb, J. Conway, M. Forster, P. Karataev, A.S. Konkov, R.O. Jones, T. Lefevre, J.S. Markova, S. Mazzoni, Y.P. Fuentes, A.P. Potylitsyn, J. Shanks, S. Wang, Phys. Rev. Lett., **121**, 054802 (2018).

[3] A. Curcio, M. Bergamaschi, R. Corsini, W. Farabolini, D. Gamba, L. Garolfi, R. Kieffer, T. Lefevre, S. Mazzoni, K. Fedorov, J. Gardelle, A. Gilardi, P. Karataev, K. Lekomtsev, T. Pacey, Y. Saveliev, A. Potylitsyn, E. Senes. Phys. Rev. Accel. Beams, **23**, 022802 (2020).

[4] P. Karataev, K. Fedorov, G. Naumenko, K. Popov, A. Potylitsyn, A. Vukolov. Sci. Rep., **10**, 20961 (2020).

[5] T. Takahashi, Y. Shibata, K. Ishi, M. Ikezawa, M. Oyamada, Y. Kondo. Phys. Rev. E, **62**, 8606 (2000).

[6] N. Sei, T. Sakai, K. Hayakawa, T. Tanaka, Y. Hayakawa, K. Nakao, K. Nogami, M. Inagaki. Phys. Lett. A, **379**, 2399 (2015).

[7] N. Sei, T. Takahashi. Sci. Rep., **7**, 17440 (2017).

[8] S.N. Galyamin, A.V. Tyukhtin. Phys. Rev. Lett., **113**, 064802 (2014).

[9] S.N. Galyamin, V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin. Phys. Rev. Accel. Beams, **22**, 083001 (2019).

[10] A.V. Tyukhtin, S.N. Galyamin, V.V. Vorobev. Phys. Rev. A, **99**, 023810 (2019).

[11] A.V. Tyukhtin, S.N. Galyamin, V.V. Vorobev, A.A. Grigoreva. Phys. Rev. A, **102**, 053514 (2020).

[12] A.V. Tyukhtin, S.N. Galyamin, V.V. Vorobev. J. Optical Society of America B, **38**, 711 (2021).

[13] Б.М. Болотовский. УФН, **75**, 295 (1961).

[14] Дж. Джелли. *Черенковское излучение и его применения* (ИЛ, М., 1960)

[15] В.Л. Гинзбург, И.М. Франк. ДАН СССР, **56** (7), 699 (1947).

[16] W. Rotman. IRE Trans. Antennas Propag, **10**, 82 (1962).

[17] J.B. Pendry, A.J. Holden, D.J. Robbins, W.J. Stewart. J. Phys.: Condens. Matter, **10**, 4785 (1998).

[18] A.V. Tyukhtin, E.G. Doil'nitsina. J. Phys. D: Appl. Phys., **44**, 265401 (2011).

[19] V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin. Phys. Rev. Lett., **108**, 184801 (2012).

[20] A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev. J. Opt. Soc. Am. B, **30**, 1524 (2013).

[21] T.A. Morgado, D.E. Fernandes, M.G. Silveirinha. Photonics, **2**, 702 (2015).

[22] A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev. Phys. Rev. E, **89**, 013202 (2014).

[23] В.Г. Веселаго. УФН, **92**, 517 (1967).

[24] T. Koschny, M. Kafesaki, E.N. Economou, C.M. Soukoulis. Phys. Rev. Lett., **93**, 107402 (2004).

[25] J. Lu, T.M. Grzegorczyk, Y. Zhang, J.P. Jr, B.-I. Wu, J.A. Kong, M. Chen. Opt. Express, **11**, 723 (2003).

[26] Ю.О. Аверков. Радиофизика и электроника (Харьков), **10**, 248 (2005).

[27] S.N. Galyamin, A.V. Tyukhtin, A. Kanareykin, P. Schoessow, Phys. Rev. Lett., 103, 194802 (2009).

[28] A.V. Tyukhtin, V.V. Vorobev, S.N. Galyamin. Phys. Rev. ST Accel. Beams, **17**, 122802 (2014).

[29] V.V. Vorobev, A.V. Tyukhtin, S.N. Galyamin. Rad. Phys. Chem., **133**, 91 (2017).

[30] М.И. Конторович, М.И. Астрахан, В.П. Акимов, Г.А. Фер-сман. *Электродинамика сетчатых структур* (Радио и связь, М., 1987)

[31] М.И. Конторович. Радиотехника и электроника, **17** (6), 1161 (1972).

[32] S.B. Glybovski, V.P. Akimov, A.E. Popugaev. IEEE Trans. Antennas Propag., **62**, 3348 (2014).

[33] A.V. Tyukhtin. J. Phys. Conf. Series, **357**, 012003 (2012).

[34] Е.И. Нефедов, А.Н. Сивов. *Электродинамика периодических структур* (Наука, М., 1977)

[35] E. Chojnacki, W. Gai, C. Ho, R. Konecny, S. Mtingwa, J. Norem, M. Rosing, P. Schoessow, J. Simpson. J. Appl. Phys., **69**, 6257 (1991).

[36] А.М. Альтмарк, А.Д. Канарейкин, И.Л. Шейнман. Письма в ЖТФ, **29** (20), 58 (2003).

[37] O. Luukkonen, M.G. Silveirinha, A.B. Yakovlev, C.R. Simovski, I.S. Nefedov, S.A. Tretyakov. IEEE Trans. Microwave Theory Techn., **57**, 2692 (2009).

[38] S. Bankov, K. Klionovski. Waves in Random and Complex Media, 1 (2022).

[39] D. Vabichevich, A. Belov, A. Sayanskiy. IEEE Antennas and Wireless Propagation Lett., **22**, 2808 (2023).

[40] В.П. Акимов, М.И. Астрахан, Г.И. Поликарпов. *Коэффициенты отражения электромагнитных волн от сложных сетчатых структур, параллельных границе раздела сред. Вопросы электромагнитной совместимости и расчета антенн и радиолиний.* (Военная академия связи, СПб., 1991), с. 101–110.

[41] В.П. Акимов. *Электродинамика сетчатых структур* (Докт. дисс., СПбГТУ, 1998)

[42] M. Tabata, I. Adachi, H. Kawai, M. Kubo, T. Sato. Phys. Proc., **37**, 642 (2012).

[43] Б.Г. Коренев. *Введение в теорию бесселевых функций* (Наука, М., 1971)

[44] Дж.А. Стрэттон. *Теория электромагнетизма* (Гос. изд-во технико-теорет. лит-ры, М., 1948)