

05

## Расчет эффективной диэлектрической проницаемости и электропроводности композитов, содержащих проводящие ориентированные нити

© А.Э. Постельга, С.В. Игонин

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского,  
410012 Саратов, Россия  
e-mail: sanyalace@list.ru, igoninsemen@ya.ru

Поступило в Редакцию 16 апреля 2025 г.

В окончательной редакции 31 мая 2025 г.

Принято к публикации 1 июля 2025 г.

Разработана модель, позволяющая производить расчет частотной зависимости коэффициента отражения СВЧ излучения от композитов с ориентированными нитями. Композит с ориентированными нитями заменялся многослойной моделью, каждый слой которой рассчитывался с использованием теории возмущений. Модель применена для расчета эффективной комплексной диэлектрической проницаемости такого рода композитов. Показана возможность использования представленной модели для расчета спектра коэффициента отражения от композитов с неоднородным заполнением. Также были исследованы критерии применимости использования более простой модели, в которой волокнистый композит заменяется пластинчатой структурой.

**Ключевые слова:** волокнистые композиты, диэлектрическая проницаемость, электропроводность, СВЧ, нити, волокна, эффективная среда, численные методы, теория возмущений.

DOI: 10.61011/JTF.2026.01.62039.62-25

### Введение

Современные композитные диэлектрические материалы [1] нашли широчайшее применение в ряде областей науки и техники благодаря таким преимуществам, как высокое отношение прочности к весу [2], способность поглощать микроволновое излучение [3], высокая теплопроводность [4], прочность на пробой [5] и т. д. Свойства такого рода композитов можно адаптировать в соответствии с конкретными требованиями путем изменения объемного соотношения и конфигурации компонентов. Механические и электрические характеристики материалов могут быть значительно улучшены при добавлении углеродных или металлических волокон [6,7]. В связи с этим становится актуальной задача контроля электрофизических параметров волокнистых композитов.

Существует множество моделей эффективной диэлектрической проницаемости, среди которых Максвелла–Гарнетта [8], Ландау–Лифшица–Лойенги или Лихтенекера [9,10]. В большинстве случаев приближенные модели рассчитаны для вычисления параметров однородных композитов с включениями сферической формы. Отклонение от сферичности учитывается введением поправочных коэффициентов, как, например, в модели Нильсена, которая использовалась авторами [11] для описания свойств наполненных полимеров. Приближенно, волокна можно принять за вытянутые эллипсоиды, тогда с учетом деполяризующего фактора метод эффективной среды ЕМТ (Effective Medium Theory) может быть применен для расчета волокнистых композитов [12]. В [13] предлагается простой полуаналитико-численный метод, основанный на конфигурационном методе усреднения,

методе момента и методе Монте-Карло, для получения эффективных свойств тонкой композитной пластины с включениями в виде равномерно распределенных волокон. Ориентация волокон была учтена в [14].

Рассмотренные теории эффективных сред позволяют рассчитать параметры однородных композитов. Измерения, произведенные СВЧ волноводными методами, позволяют учесть неоднородности. В случае многослойных композитов эффективную диэлектрическую проницаемость предлагается вычислять по общей объемной формуле, но с учетом распределения электрического поля в поперечном сечении волновода [15].

Экспериментальные исследования композитов на основе эпоксидной смолы, содержащих включения в виде тонких нитей из углеродных нанотрубок и магнитной жидкости, образованных при высушивании в магнитном поле, производились в [16]. Определение эффективных параметров композита осуществлялось по анализу спектров коэффициента отражения СВЧ излучения в диапазоне 9 – 10 GHz от периодической структуры с нарушением в виде исследуемого образца, помещенного в прямоугольный волновод. Такого рода структуры получили название СВЧ фотонные кристаллы [17], и нашли применение в том числе при определении параметров материалов [18]. Определение комплексной диэлектрической проницаемости включений производилось посредством моделирования структуры композита методом конечных элементов в программе HFSS. Следует отметить, что с уменьшением толщины нитей время расчета возрастает в разы, а при толщинах менее  $15\text{ }\mu\text{m}$  (что соответствует количеству нитей в образце несколько сотен) расчет крайне затруднителен.

В настоящей работе предлагается метод расчета эффективной диэлектрической проницаемости и эффективной электропроводности композитов, содержащих различные объемные доли нитевидных включений („нитей“) микронных толщин (менее  $200\text{ }\mu\text{m}$ ). Метод подразумевает расчет спектра коэффициента отражения СВЧ излучения от периодической структуры, помещенной в прямоугольный волновод, содержащей в центральном слое измеряемый образец с ориентированными нитевидными включениями. Учет распределения нитей вдоль направления распространения СВЧ волны будет произведен за счет разбиения участка волновода, содержащего исследуемый образец, на множество слоев равной толщины. Для учета нитей в поперечном сечении волновода будет использован метод теории возмущений, который успешно применялся для уточнения параметров магнитной жидкости за счет учета агломератов магнитных наночастиц в экспериментальной работе [19]. По полученному спектру в результате решения обратной двухпараметровой задачи будут определены действительная часть диэлектрической проницаемости и электропроводность композита.

Вывод соотношений, определяющих эффективную диэлектрическую проницаемость, основан на использовании решения задачи о поляризации выбранной модели „эффективного рассеивателя“, помещенного в однородное внешнее поле [8]. При этом теории эффективных сред не позволяют учесть распределение нитей в пространстве, влияние которого увеличивается при уменьшении количества нитей на единицу площади. Предлагаемый метод расчета электрофизических параметров позволяет учесть влияние распределения нитей в пространстве и применим для анализа структур с произвольным заданным пространственным распределением ориентированных нитей, а не только для однородных композитов. Разрабатываемый метод будет использован для определения параметров включений реальных композитов и объяснения спектров коэффициента отражения СВЧ излучения в случае неоднородного заполнения [16].

Предлагаемый метод расчета может найти применение при решении различного рода задач, связанных с анализом распространения СВЧ волны в анизотропном волноводе.

## 1. Проведение и моделирование эксперимента

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1, а. Падающая СВЧ волна с векторного анализатора 1 направлялась по коаксиалу 2 через коаксиально-волноводный переход 3 в волновод 4 с сечением  $23 \times 10\text{ mm}$ , в котором размещалась исследуемая структура 5. Прошедшая через структуру СВЧ мощность поглощалась согласованной нагрузкой 6, а отраженная волна через коаксиально-волноводный переход 3 по коаксиалу 2 возвращалась в векторный анализатор 1.

Измерения производились с использованием векторного анализатора цепей Agilent Tech. 5242A PNA-X Network Analyzer в диапазоне частот  $9 - 10\text{ GHz}$ .

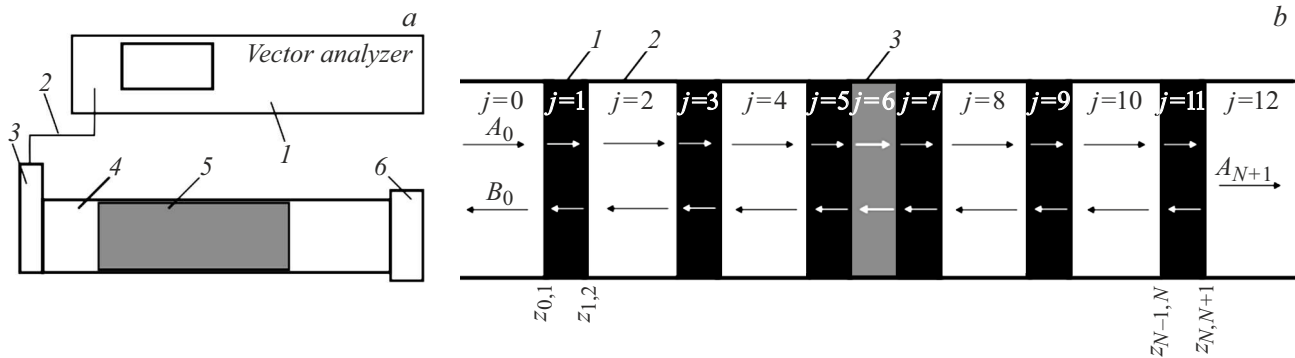
Исследовались частотные зависимости коэффициента отражения СВЧ волны типа  $TE_{10}$  от фотонного кристалла (рис. 1, б), представляющего собой чередующиеся слои поликора толщиной  $0.97\text{ mm}$  и фторопласта толщиной  $8.95\text{ mm}$  (всего 11 слоев). В шестом слое вместо фторопласта размещался исследуемый образец, который являлся нарушением периодичности фотонного кристалла. Исследуемые образцы имели форму параллелепипеда размером  $23.00 \times 10.00 \times 3.95\text{ mm}$  и представляли собой композитный материал эпоксидная смола — магнитная жидкость — углеродные нанотрубки (ЭС/МЖ/УНТ) с массовой долей УНТ  $0.053\%$  и отношением массы УНТ к массе МЖ, равным  $0.02$ . Затвердевание образцов происходило в течение суток при различных значениях и направлениях индукции магнитного поля. Параметры фотонного кристалла и нарушенного слоя подбирались так, чтобы минимум коэффициента отражения в запрещенной зоне фотонного кристалла попадал в  $X$ -диапазон, используемый в радиолокации, наземной и спутниковой радиосвязи, и был достаточно резким, чтобы позволить исследовать анизотропию свойств нитевидных включений при малой объемной доле. Следует отметить, что изменение толщины нарушенного слоя, при прочих равных параметрах структуры, приводит к смещению минимума коэффициента отражения и изменению добротности резонанса, вследствие чего может измениться и точность определения параметров.

Волна типа  $TE_{10}$  относится к поперечным электрическим волнам, для которых напряженность электрического поля имеет компоненту только перпендикулярную направлению распространения СВЧ волны. Компоненты электрического и магнитного полей  $E_m$  и  $H_m$  волны типа  $TE_{10}$ , в которой электрическая компонента параллельна узкой стенке волновода (оси  $Y$ ), задаются известными соотношениями

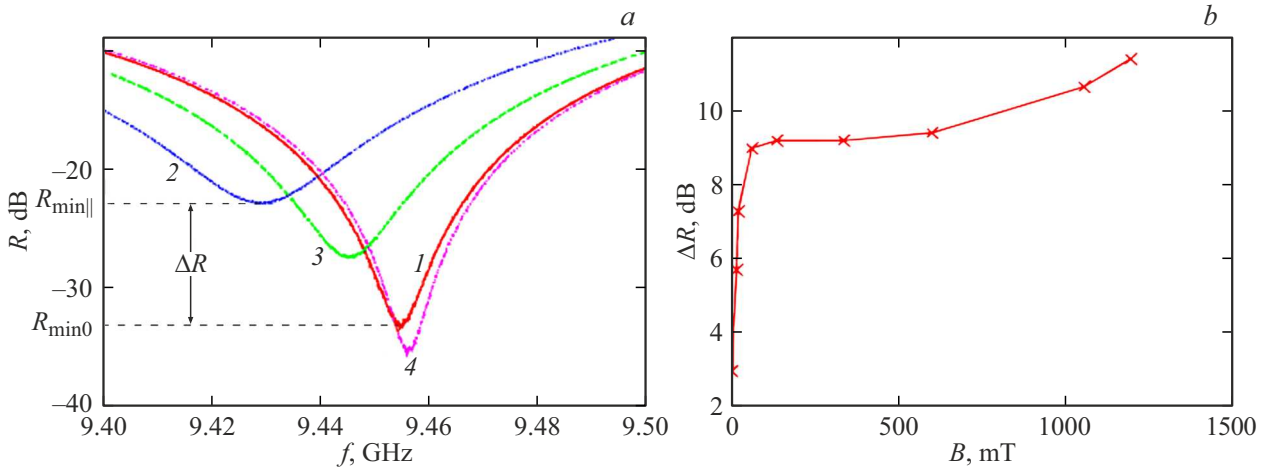
$$\begin{aligned} E_y(x, \omega) &= -\frac{\omega\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \\ H_x(x, \omega) &= -\frac{\sqrt{-1} \cdot \gamma_m(\omega) \cdot \pi}{\mu\mu_0 a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right), \\ H_z(x, \omega) &= -\frac{\sqrt{-1} \cdot \pi^2}{\mu\mu_0 a^2} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right), \\ E_x &= H_y = E_z = 0, \end{aligned}$$

где  $\gamma_m$  и  $\mu$  — постоянная распространения и магнитная проницаемость в рассматриваемом участке волновода,  $a$  — размер широкой стенки волновода,  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\omega$  — круговая частота СВЧ волны.

Нарушение периодичности структуры фотонного кристалла приводит к появлению на частотной зависимости характерного резкого минимума коэффициента отражения (рис. 2, а). Положение минимума по частоте и величине определяется параметрами исследуемого



**Рис. 1.** Схематичное изображение экспериментальной установки и исследуемой структуры. *a* — экспериментальная установка: 1 — векторный анализатор цепей, 2 — коаксиал, 3 — коаксиально-волноводный переход, 4 — прямоугольный волновод, 5 — исследуемая структура, 6 — согласованная нагрузка; *b* — исследуемая структура: 1 — слои поликора толщиной 0.97 мм, 2 — слои фторопласта толщиной 8.95 мм, 3 — исследуемый образец толщиной 3.95 мм,  $j$  — номер слоя,  $z_{j,j+1}$  — расстояние от поверхности структуры до границы между слоями с номером  $j$  и  $j+1$ ,  $A_j$  и  $B_j$  — амплитуды падающих и отраженных электромагнитных волн в слое с номером  $j$ .

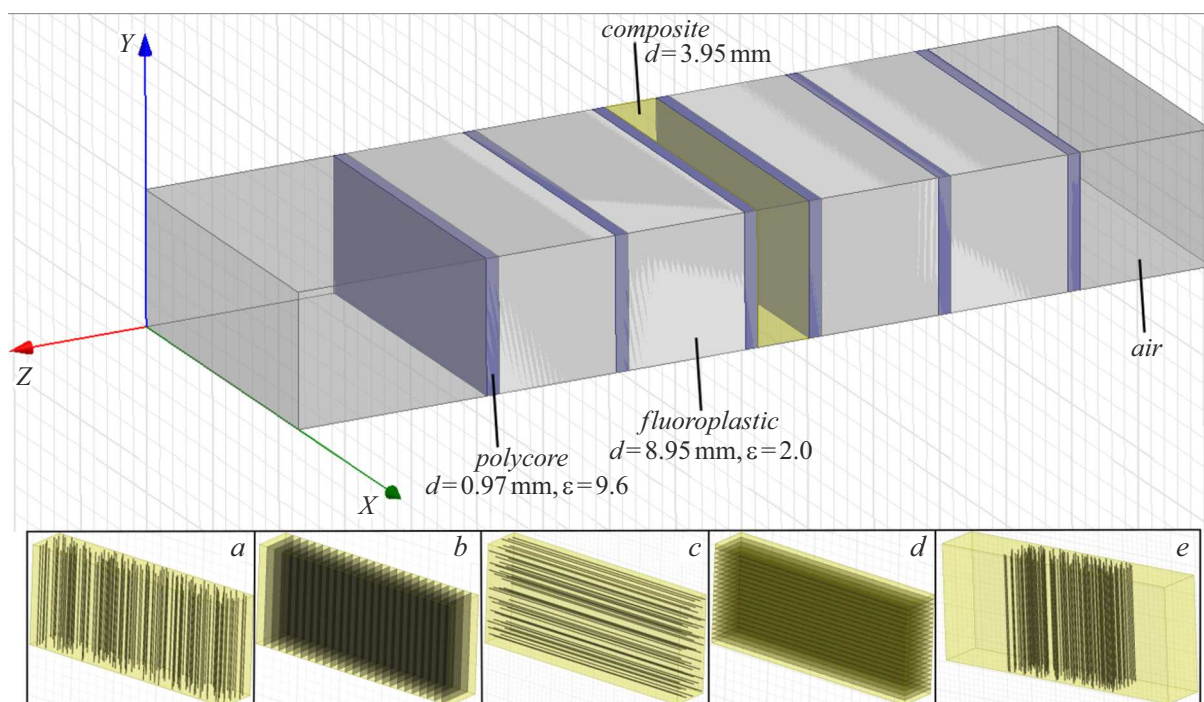


**Рис. 2.** Экспериментально измеренные зависимости: *a* — коэффициента отражения СВЧ волны от частоты, в качестве нарушения используются образцы, высушенные при магнитном поле с индукцией 130 мТ, ориентированном: 1 — без магнитного поля, 2 — параллельно, 3 — под углом  $45^\circ$ , 4 — перпендикулярно электрической компоненте СВЧ волны (широкой стенке волновода),  $\Delta R = R_{\min||} - R_0$  — разность минимумов коэффициента отражения при размещении в структуре образца, высушенного в магнитном поле, параллельном узкой стенке волновода, и без магнитного поля; *b* — разности минимумов коэффициента отражения  $\Delta R$  от величины индукции магнитного поля, при котором производилось изготовление образцов.

образца. Размещение в качестве нарушения периодичности образца, высушенного в магнитном поле с вектором индукции, направленном параллельно электрической компоненте СВЧ волны в волноводе, приводит к уменьшению коэффициента отражения и смещению минимума влево (рис. 2, *a*, кривая 2) относительно образца, высушенного без магнитного поля (рис. 2, *a*, кривая 1). Это свидетельствует об увеличении проводимости и диэлектрической проницаемости образца, которое обусловлено возникновением вытянутых структур из УНТ и магнитных частиц в направлении магнитного поля. При увеличении угла между магнитным полем и электрической компонентой СВЧ волны коэффициент отражения уменьшается (рис. 2, *a*, кривая 3), а при перпендикулярной ориентации становится даже меньше,

чем для образца, высушенного без магнитного поля (рис. 2, *a*, кривая 4).

Ориентация вытянутых структур параллельно узкой стенке волновода приводит к максимальному взаимодействию с ними электрической компоненты СВЧ волны. Резкое возрастание величины минимума коэффициента отражения с увеличением индукции магнитного поля (рис. 2, *b*) связано с образованием вытянутых нитей при малых магнитных полях, начиная с 5 мТ. Процесс структурообразования в композите выходит на насыщение при значении магнитной индукции 100 – 500 мТ, получаются образцы с одинаковыми параметрами. При сильных полях, более 600 мТ суспензия МЖ-УНТ стягивается ближе к центру образца, где электрическое поле СВЧ волны максимально, соответственно усиливается



**Рис. 3.** Исследуемая периодическая одиннадцатислойная структура с нарушенным центральным слоем, представляющим собой композит: *a, b* — с нитями и пластинами, ориентированными параллельно узкой стенке волновода (оси *Y*); *c, d* — с нитями и пластинами, ориентированными параллельно широкой стенке волновода (оси *X*); *e* — с неоднородным распределением — нити смещены ближе к центру.

взаимодействие электромагнитной волны со структурами из УНТ и увеличивается коэффициент отражения.

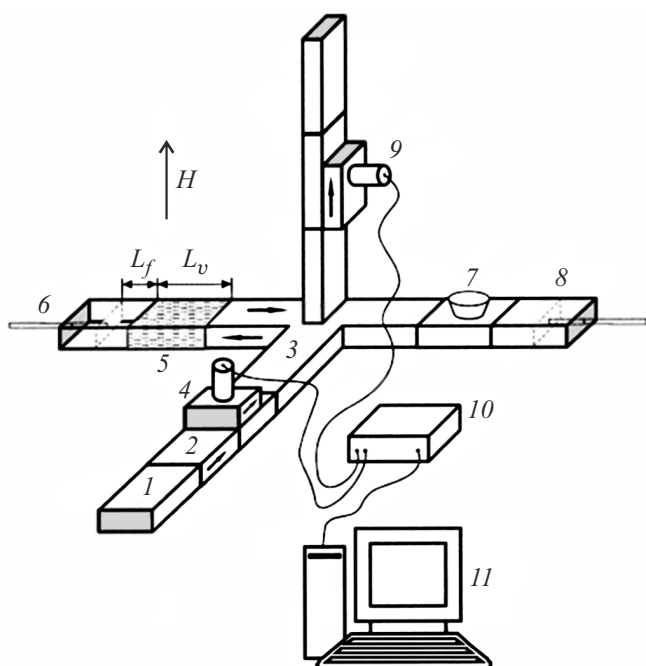
Моделирование эксперимента производилось в программе электродинамического 3D-моделирования Ansys HFSS (рис. 3). В качестве исследуемых образцов использовался композитный материал из эпоксидной смолы с включениями из проводящих нитей. Объемная доля включений в модели варьировалась от 0.1 % до 10 %. Координаты включений задавались случайным равномерным распределением, для чего был разработан скрипт на языке Visual Basic Script. Исследовалась зависимость минимума коэффициента отражения СВЧ волны типа  $TE_{10}$  от толщины, объемной доли, действительной части диэлектрической проницаемости и электропроводности включений. Расчет производился при параллельной и перпендикулярной ориентациях нитей относительно электрической компоненты волны типа  $TE_{10}$  (оси *Y*).

Использование фотонного кристалла обусловлено высокой степенью чувствительности таких структур к параметрам нарушенного слоя, что позволяет увеличить точность при обработке экспериментальных данных. Это особенно важно при исследовании композитов с малой объемной долей включений или с параметрами включений, слабо отличающимися от параметров материала матрицы.

## 2. Определение параметров МЖ

Прежде чем приступить к теоретическому описанию модели, рассмотрим экспериментальную работу по определению параметров МЖ, которая демонстрирует применимость многослойной модели для анализа структур, содержащих вытянутые ориентированные включения, с использованием теории возмущений и метода матриц передачи.

МЖ представляет собой однородную суспензию однодоменных наночастиц ферро- или ферритмагнетика в воде или органическом растворителе, стабилизированных поверхностно-активным веществом. Взаимодействие электромагнитного излучения в СВЧ диапазоне с МЖ описывается теорией динамического намагничивания однодоменной частицы во внутреннем поле анизотропии и внешнем намагничивающем поле. В МЖ с наноразмерными частицами при достижении порогового значения индукции магнитного поля 2.5 мТл из магнитных наночастиц образуются агломераты, размеры которых могут быть определены с использованием средств оптической микроскопии. Учет наличия агломератов должен приводить к более точному теоретическому описанию взаимодействия МЖ с электромагнитной волной СВЧ диапазона и соответственно к увеличению точности определения параметров.



**Рис. 4.** Схема экспериментальной установки по исследованию коэффициента отражения электромагнитного излучения в СВЧ диапазоне от слоя МЖ.

Для измерения коэффициента отражения электромагнитного излучения в СВЧ диапазоне применялся мостовой метод с использованием двойного волноводного тройника, в измерительное плечо которого помещался слой МЖ, полностью заполняющий поперечное сечение волновода. Принципиальная схема радиоинтерференционной установки, использовавшейся для измерений, изображена на рис. 4. Источником сигнала служил СВЧ генератор качающейся частоты 8 мм диапазона 1, включенный через клапан 2 в  $H$ -плечо двойного волноводного тройника 3. Мощность сигнала, поступающего в  $H$ -плечо тройника, контролировалась с помощью полупроводникового СВЧ диода 4, установленного в этом плече. В результате интерференции волн, отраженных от нагрузки в опорном плече и от слоя МЖ 5 в измерительном плече, помещенной между двумя тонкими, „прозрачными“ для электромагнитного излучения в СВЧ диапазоне диэлектрическими прокладками, препятствующими растеканию МЖ по волноводу, в  $E$ -плече двойного волноводного тройника формируется разностный СВЧ сигнал. Для регулировки фаз и значений амплитуды интерферирующих сигналов в опорном и измерительном плечах двойного волноводного тройника расположены подвижные короткозамыкающие поршни 6, 8 и аттенюатор 7. Сигнал, протектированный с помощью СВЧ диода 9, расположенного в  $E$ -плече волноводного тройника, поступал через аналого-цифровой преобразователь 10 в компьютер 11, где сравнивался с сигналом, поступающим с СВЧ диода 4.

Агломераты распределены как по поперечному сечению волновода, так и вдоль направления распростра-

нения электромагнитного излучения СВЧ диапазона. Для учета распределения агломератов по поперечному сечению использовалась теория возмущений. Объем МЖ представлялся в виде чередующихся слоев МЖ с агломератами  $L_1$  и без  $L_2$  (рис. 5, а). Для учета распределения агломератов вдоль оси  $Z$  использовался метод матриц передачи. Путем решения обратной задачи численными методами была рассчитана эффективная постоянная распространения электромагнитной волны с учетом распределения агломератов вдоль направления распространения электромагнитного излучения в СВЧ диапазоне. Найденная постоянная распространения использовалась при определении искомых значений параметров.

На рис. 5, б показаны частотные зависимости коэффициента отражения электромагнитного излучения СВЧ диапазона для схемы измерений, представленной на рис. 4. Кривая 1 рассчитана без учета агломератов, кривая 2 — с учетом агломератов, образующихся при величине внешнего магнитного поля 11.5 кОе, распределенных по объему МЖ. Из рисунка видно, что частотная зависимость, рассчитанная с учетом пространственного распределения агломератов, лучше совпадает с экспериментальными данными (показанными треугольниками), чем зависимость, рассчитанная без учета агломератов. Результаты расчетов параметров без учета и с учетом наличия агломератов сведены в табл. 1, где  $\Delta = \frac{|x_1 - x_0|}{x_0} 100\%$  — относительная разница между значениями искомого параметра, рассчитанного без учета ( $x_0$ ) и с учетом ( $x_1$ ) агломератов.

Таким образом, учет пространственного распределения агломератов магнитных частиц в МЖ с использованием метода теории возмущений позволяет добиться лучшего согласования экспериментальных данных и результатов расчетов, что открывает возможность повышения точности в определении параметров МЖ.

### 3. Теоретическое описание

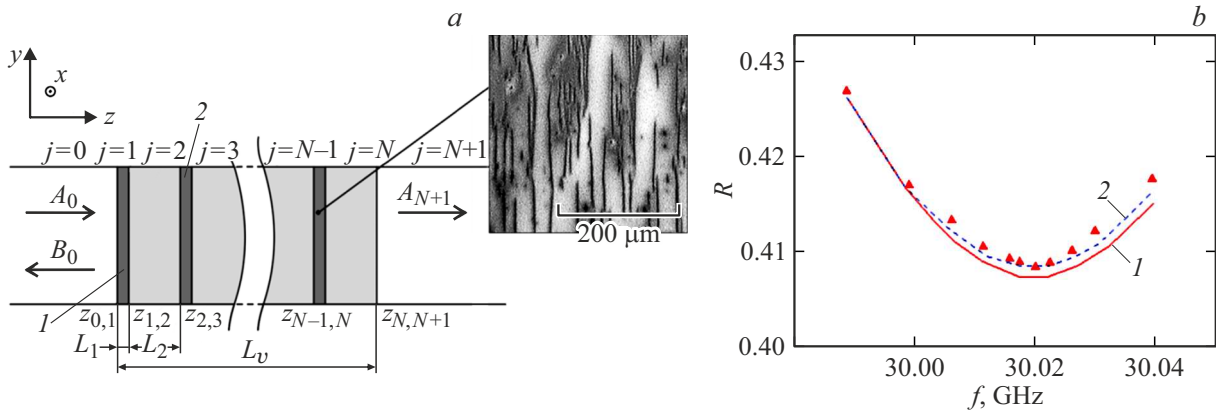
#### 3.1. Способ обозначений для записи многослойных структур

Одна из моделей, рассматриваемая в настоящей работе, в качестве нарушения многослойной периодической структуры будет включать другую многослойную структуру, в связи с чем возникает потребность записи таких структур в удобной форме, которая должна давать представление о параметрах и положении слоев фотонного кристалла и позволять легко записать матрицу передачи. Введем обозначение для слоя следующего вида:

$$\left\{ \begin{matrix} \alpha \\ z_i S_i \\ d \end{matrix} \right\},$$

где  $S$  (от англ. single) означает одиночный слой, в группирующем знаке снизу будем записывать толщину





**Рис. 5.** Модель МЖ с агломератами и результаты расчетов: *a* — структура из чередующихся слоев невозмущенной и возмущенной агломератами МЖ, используемая при расчете частотной зависимости коэффициента отражения с помощью метода матриц передач: 1 — участок волновода с МЖ с агломератами, 2 — участок волновода с магнитной жидкостью без агломератов; *b* — частотные зависимости коэффициента отражения от слоя МЖ при температуре 293 К, экспериментальные точки показаны треугольниками: 1 — частотная зависимость без учета агломератов, 2 — частотная зависимость с учетом агломератов, распределенных по объему МЖ.

слоя *d*, верхний индекс  $\alpha$  обозначает либо название материала, из которого состоит слой, либо интересующий параметр, например, постоянную распространения, нижний правый индекс *i* — номер слоя, а верхний левый индекс  $z_i$  — координату левой границы слоя. С использованием введенного обозначения фотонный кристалл, изображенный на рис. 3, можно представить следующей схемой:

$$\underbrace{\overbrace{X_{12}}^{air}}_{\infty} \underbrace{\overbrace{S_{11}}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{S_{10}}^f}_{d_2} \underbrace{\overbrace{S_9}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{S_8}^f}_{d_2} \underbrace{\overbrace{S_7}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{D_6}^{comp}}_{d_{comp}} \underbrace{\overbrace{S_5}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{S_4}^f}_{d_2} \underbrace{\overbrace{S_3}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{S_2}^f}_{d_2} \underbrace{\overbrace{S_1}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{X_0}^{air}}_{\infty} <, \quad (1)$$

где индексы *p* и *f* обозначают слои поликора и фторопласта, *comp* — исследуемого композита. Обозначим для наглядности нарушенный слой буквой *D* (от англ. dislocation). Знак „<“ справа от схемы указывает направление распространения волны (справа налево). Координата  $z_n$  левой границы *n*-го слоя вычисляется по формуле  $z_n = z_0 + \sum_{i=1}^n d_i$ , где  $d_i$  — толщина *i*-го слоя. Если обозначить символом *N* номер последнего слоя, то  $z_n = z_N - \sum_{i=N}^{n+1} d_i$ . Если в алгоритме вычислений координаты перебираются последовательно слева направо, то  $z_n = z_{n+1} - d_{n+1}$ , где  $z_{n+1}$  — координата левой границы соседнего от *n*-слоя слева,  $d_{n+1}$  — его толщина.

Участки, в которых параметры и толщины слоев периодически повторяются, будем записывать в виде периодической группы:

$$\underbrace{\overbrace{z_i \Pi_i^4}^{\alpha|\beta}}_{a|b} = \underbrace{\overbrace{z_i S_4}^{\alpha}}_a \underbrace{\overbrace{z_{i-a} S_3}^{\beta}}_b \underbrace{\overbrace{z_{i-a-b} S_2}^{\alpha}}_a \underbrace{\overbrace{z_{i-2a-b} S_1}^{\beta}}_b. \quad (2)$$

**Таблица 1.** Параметры МЖ, рассчитанные без и с учетом агломератов

Параметр	$x_0$	$x_1$	$\Delta$ , %
<i>d</i> , nm	8	8.28	3.5
$\varphi$	0.144	0.135	6.3
$\varepsilon$	3.58	3.19	10.9
tg $\delta$	0.045	0.052	15.5

Правый верхний индекс 4 означает общее количество чередующихся слоев толщиной *a* и *b* с параметрами  $\alpha$  и  $\beta$ . Нижний индекс *i* равен номеру слоя в рамках объемлющей структуры, в которую помещается периодическая группа, а верхний левый индекс  $z_i$  — координату левой границы периодической группы в рамках объемлющей структуры.

Обозначим через  $\underbrace{\overbrace{z_i U_i^n}_{d_u}}_{d_u}$  неперидическую группу из *n*-слоев с разными толщинами  $d_j$  и параметрами  $\alpha_j$ , крайние слои справа и слева в этой структуре имеют параметры  $\alpha_1$  и  $\alpha_n$  соответственно. Общая толщина группы  $d_u$  обозначена в нижнем группирующем знаке.

Тогда схема фотонного кристалла (1) с использованием обозначений периодических групп (2) примет компактный вид

$$\underbrace{\overbrace{X_2}^{air}}_{\infty} \underbrace{\overbrace{z_1 U_1^{11}}^{\alpha_i}}_{d_{pc}} \underbrace{\overbrace{X_0}^{air}}_{\infty} = \underbrace{\overbrace{X_6}^{air}}_{\infty} \underbrace{\overbrace{z_5 \Pi_5^4}^{p|f}}_{d_1|d_2} \underbrace{\overbrace{z_4 S_4}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{z_3 D_3}^{comp}}_{d_{comp}} \underbrace{\overbrace{z_2 S_2}^p}_{d_1} \underbrace{\overbrace{z_1 \Pi_1^4}^{f|p}}_{d_2|d_1} \underbrace{\overbrace{X_0}^{air}}_{\infty} <, \quad (3)$$

где  $d_{pc}$  — толщина фотонного кристалла.

### 3.2. Расчет коэффициента отражения от периодической структуры

Распространение волны в волноводе через периодическую структуру описывается методом матриц передачи [17]. Можно записать следующее выражение для компонент матрицы передачи:

$$\mathbf{T}^{(j)} = \mathbf{T}^{(j)}(z_j, \gamma_{j+1}, \gamma_j) = \begin{pmatrix} \frac{\gamma_{j+1} + \gamma_j}{2\gamma_{j+1}} e^{(\gamma_{j+1} - \gamma_j)z_j} & \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2\gamma_{j+1}} e^{(\gamma_{j+1} + \gamma_j)z_j} \\ \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{2\gamma_{j+1}} e^{-(\gamma_{j+1} + \gamma_j)z_j} & \frac{\gamma_{j+1} + \gamma_j}{2\gamma_{j+1}} e^{-(\gamma_{j+1} - \gamma_j)z_j} \end{pmatrix},$$

которая связывает коэффициенты  $A_j$ ,  $B_j$ , и  $A_{j+1}$ ,  $B_{j+1}$ , определяющие амплитуды падающих и отраженных волн по обе стороны от координаты  $z_j$  (левой границы слоя под номером  $j$ ), соотношением

$$\begin{pmatrix} A_{j+1} \\ B_{j+1} \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{(j)} \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\gamma_0^2 = \frac{\pi^2}{a_{wg}^2} - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0, \quad \gamma_j^2 = \frac{\pi^2}{a_{wg}^2} - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_j \mu_j, \quad (5)$$

где  $\gamma_0$  и  $\gamma_j$  — постоянные распространения электромагнитной волны (вдоль оси  $Z$ ) в вакууме и в слое с номером  $j$ ;  $a_{wg}$  — размер широкой стенки волновода;  $\omega$  — частота электромагнитного излучения;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  — электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon_j$  и  $\mu_j$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости слоя с номером  $j$ ;  $A_j$ ,  $B_j$  — коэффициенты, определяющие амплитуды падающей и отраженной волны от слоя с номером  $j$ ;  $z_j$  — расстояние от поверхности структуры, отсчитываемое вдоль направления распространения электромагнитной волны.

Коэффициенты  $A_{N+1}$  и  $B_0$ , определяющие амплитуды волны, прошедшей через многослойную структуру, и волны, отраженной от нее, связаны с коэффициентом  $A_0$ , определяющим амплитуду падающей волны, следующим соотношением:

$$\begin{pmatrix} A_{N+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{T}_N \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix},$$

где  $\mathbf{T}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_N[1, 1] & \mathbf{T}_N[1, 2] \\ \mathbf{T}_N[2, 1] & \mathbf{T}_N[2, 2] \end{pmatrix} = \Pi_{j=N}^0 \mathbf{T}^{(j)}$  — матрица передачи периодической структуры, состоящей из  $N$ -слоев.

Записывая коэффициент отражения  $R = B_0/A_0$  через элементы матрицы передачи  $\mathbf{T}_N$  в соответствии с соотношением (4), получим

$$R = -\frac{\mathbf{T}_N[2, 1]}{\mathbf{T}_N[2, 2]}. \quad (6)$$

### 3.3. Пример составления матрицы передачи с использованием введенных обозначений

Произведем составление матрицы передачи  $\mathbf{T}_N$  для фотонного кристалла (рис. 3) с нарушенным слоем в

виде исследуемого композита:

$$\begin{matrix} \underbrace{\text{air}}_{\infty} & \underbrace{p}_{d_1} & \underbrace{f}_{d_2} & \underbrace{p}_{d_1} & \underbrace{f}_{d_2} & \underbrace{p}_{d_1} & \underbrace{comp}_{d_{comp}} & \underbrace{p}_{d_1} & \underbrace{f}_{d_2} & \underbrace{p}_{d_1} \\ X & z_{11} S_{11} & z_{10} S_{10} & z_9 S_9 & z_8 S_8 & z_7 S_7 & z_6 D_6 & z_5 S_5 & z_4 S_4 & z_3 S_3 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \underbrace{f}_{d_2} & \underbrace{p}_{d_1} & \underbrace{\text{air}}_{\infty} \\ z_2 S_2 & z_1 S_1 & z_0 X \end{matrix} < .$$

Запишем для каждой границы матрицу передачи между левым и правым слоем. Например, для левой границы

слоя с номером 6 —  $\begin{matrix} p \\ z_7 S_7 \\ d_1 \end{matrix} \bigg| \begin{matrix} comp \\ z_6 D_6 \\ d_{comp} \end{matrix}$  — матрица передачи

запишется, как  $\mathbf{T}^{(6)}(z_7 - d_1, \gamma_p, \gamma_{comp})$ , где координата  $z_6 = z_7 - d_1$  рассчитана как координата левой границы седьмого слоя за вычетом толщины седьмого слоя. Перемножая матрицы передачи через все границы периодической структуры, начиная с самой левой, получим матрицу передачи через всю периодическую структуру, состоящую из 11 слоев:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{11} &= \mathbf{T}^{(11)}(z_{11}, \gamma_{air}, \gamma_p) \cdot \mathbf{T}^{(10)}(z_{11} - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \\ &\times \mathbf{T}^{(9)}(z_{10} - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \cdot \mathbf{T}^{(8)}(z_9 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \\ &\times \mathbf{T}^{(7)}(z_8 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \cdot \mathbf{T}^{(6)}(z_7 - d_1, \gamma_p, \gamma_{comp}) \\ &\times \mathbf{T}^{(5)}(z_6 - d_{comp}, \gamma_{comp}, \gamma_p) \cdot \mathbf{T}^{(4)}(z_5 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \\ &\times \mathbf{T}^{(3)}(z_4 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \cdot \mathbf{T}^{(2)}(z_3 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \\ &\times \mathbf{T}^{(1)}(z_2 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \cdot \mathbf{T}^{(0)}(z_1 - d_1, \gamma_p, \gamma_{air}) \\ &= \mathbf{T}^{(11)}(z_{11}, \gamma_{air}, \gamma_p) \cdot \Pi_{i=10}^0 \mathbf{T}^{(i)}(z_{i+1} - d_{i+1}, \gamma_{i+1}, \gamma_i), \end{aligned} \quad (7)$$

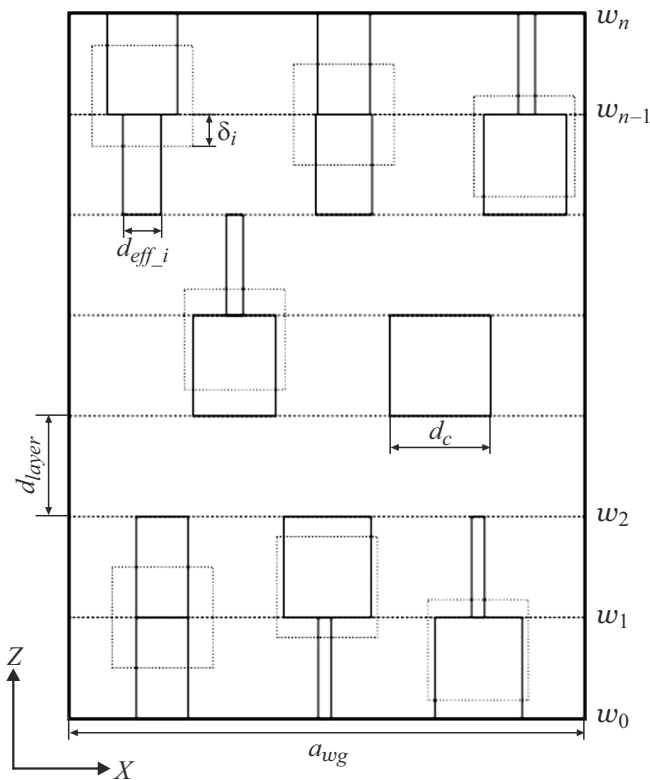
где  $z_{11} = z_0 + 6 \cdot d_1 + 4 \cdot d_2 + d_{comp}$ .

Подставляя (7) в (6), можно определить коэффициент отражения для заданной частоты СВЧ волны (частота входит в итоговую формулу через выражения (5)). Перебрав с определенным шагом частоты в необходимом диапазоне, можно построить спектр коэффициента отражения от СВЧ фотонной структуры.

## 4. Модель „возмущенных слоев“ (MPL)

Смещение минимума на спектре коэффициента отражения от фотонного кристалла определяется комплексной диэлектрической проницаемостью нарушенного слоя, которая зависит от электрофизических параметров включений, их геометрических размеров и распределению по объему образца.

Рассмотрим образец композитного материала размером  $23.00 \times 10.00 \times 3.95 \text{ mm}$ , в котором нити равной толщины  $d_c$  ориентированы в несущей матрице параллельно узкой стенке волновода вдоль оси  $Y$  (рис. 3, а),



**Рис. 6.** Распределение нитей в плоскости XZ (продольное сечение волновода): квадраты, обозначенные пунктиром — нити в реальном композите; горизонтальные пунктирные линии — границы слоев многослойной модели; прямоугольники, обозначенные сплошными линиями — нити, полученные заданием эффективной ширины, используемые в модели.

т. е. параллельно электрической составляющей СВЧ волны типа  $TE_{10}$ . Координаты нитей в плоскости XZ заданы по случайному равномерному распределению.

Разработаем модель, позволяющую заменить такого рода композиты многослойной структурой. Параметры каждого слоя будут определяться с использованием аппарата теории возмущений. Для краткости описываемый ниже метод расчета будем называть многослойной моделью „возмущенных слоев“ MPL (Many Perturbation Layers). Следует отметить, что применение разрабатываемой модели затруднительно в случае перпендикулярной ориентации нитей электрической составляющей СВЧ волны (рис. 3, c), что будет более подробно разобрано ниже (в конце разд. 4.2).

#### 4.1. Учет распределения включений вдоль оси Z

Для учета распределения нитей вдоль направления распространения СВЧ волны (оси Z) разобьем композит на равные слои шириной  $d_c$ . Всего получится  $n = \text{ceil}\left(\frac{d_{comp}}{d_c}\right)$ , где  $\text{ceil}$  — функция округления в большую сторону. Подавляющее большинство нитей

(рис. 6 — квадраты, обозначенные пунктиром) окажется на границе (рис. 6 — пунктирные линии) одного из слоев. Заменяем часть объема нити, попадающего в слой, на включение в виде параллелепипеда с тем же объемом (рис. 6 — прямоугольники, обозначенные сплошными линиями). Размеры параллелепипеда вдоль осей Y и Z совпадают с соответствующими размерами слоя (высотой узкой стенки волновода  $b_{wg}$  и толщиной  $d_c$ ). Параллелепипед необходимого объема получается заданием ширины  $d_{eff}$  вдоль оси X, которая вычисляется по формуле:

$$d_{eff_i} = \frac{\delta_i \cdot d_c}{d_{layer}},$$

где  $\delta_i$  — ширина части нити  $d_c$ , попадающей в исследуемый слой с шириной  $d_{layer}$ . Если  $d_c = d_{layer}$ , то  $d_{eff_i} = \delta_i$ .

Каждый слой можно рассматривать как материал матрицы с неоднородностями в поперечном сечении волновода в виде протяженных пластин различной толщины. Некоторые слои содержат одну пластину, некоторые — несколько, а некоторые представляют собой однородные слои из материала матрицы без включений. Электромагнитная волна типа  $TE_{10}$  при выбранной на рис. 3 и 6 системе координат имеет составляющую напряженности электрического поля только вдоль оси Y. При этом вдоль оси X (широкой стенки волновода) укладывается полдлины волны. Напряженность электрического поля максимальна в середине поперечного сечения волновода и убывает ближе к узким стенкам, вследствие чего характер распределения нитей вдоль оси X может влиять на частотные характеристики композита. Распределения нитей вдоль оси X в многослойной модели и реальном композите совпадают, что позволяет учесть неоднородность заполнения вдоль оси X. С уменьшением толщины нитей случайное распределение вдоль оси Z в многослойной модели композита близко к реальному композиту. Таким образом, можно ожидать, что многослойная модель будет достаточно точно описывать взаимодействие поля с реальным материалом. Следует обратить внимание, что отношение  $\frac{d_{comp}}{d_c}$ , определяющее количество слоев, в общем случае не является целым числом, следовательно, толщина последнего слоя  $d_{last} \leq d_c$ . Таким образом, многослойная модель композита может быть представлена в следующем виде:

$$\underbrace{S}_{d_{comp}} = \underbrace{w_n S_n}_{d_{last}} \underbrace{w_{n-1} U_1^{n-1}}_{d_c}. \quad (8)$$

Постоянные распространения  $\gamma_i^{\text{MPL}}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) рассчитываются для каждого слоя в требуемом диапазоне частот.

#### 4.2. Учет распределения включений вдоль оси X

В случае использования стандартного волновода с волной  $TE_{10}$  возможна двоякая ориентация границ раздела между средами — слоями: когда границы раздела параллельны силовым линиям электрического поля



и когда они им перпендикулярны. В первом случае (рис. 3, *a, b, e*) для представления поля в слоях используются волны  $TE_{m0}$  и, в частности,  $TE_{10}$ . При реализации всех граничных условий для электрической и магнитной компонент электромагнитной волны получается система совместных уравнений, дающая связь между волновыми числами, т.е. дисперсионное уравнение, из которого может быть определена постоянная распространения вдоль оси  $Z$ . В данном случае придется производить вычисление определителей высокого порядка.

Определение постоянной распространения  $\gamma_i^{\text{MPL}}$  СВЧ волны в каждом слое модели может быть произведено и с использованием метода теории возмущений, пока толщина нитей удовлетворяет условиям  $d_c \ll (2a_{wg}/\pi)$  и  $d_c|\varepsilon_c - 1| \ll (\pi/a_{wg})(2/\omega^2\varepsilon_0\mu_0)$  [20]. Этими условиями определяется частотный диапазон электромагнитных волн, в котором применимо использование разрабатываемой модели.

Задача сводится к расчету постоянной распространения в волноводе, имеющем неоднородность в поперечном сечении в виде пластин, ориентированных параллельно узкой стенке волновода (оси  $Y$ ), и протяженных в направлении (оси  $Z$ ) распространения СВЧ волны (рис. 7).

Формула объемного возмущения волновода выводится [21] непосредственно из уравнений Максвелла и имеет следующий вид:

$$\Delta\gamma = \gamma_n - \gamma_0 = \omega \frac{\int_{S_n} (\Delta\varepsilon \cdot E_n \cdot \overline{E_0} + \Delta\mu \cdot H_n \cdot \overline{H_0}) ds}{\int_{S_0} ([\overline{E_0} \times H_n] + [E_n \times \overline{H_0}]) ds}, \quad (9)$$

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_n - \varepsilon_0, \quad \Delta\mu = \mu_n - \mu_0,$$

где  $S_0$  — площадь поперечного сечения волновода;  $S_n$  — площадь, занятая возмущающей средой;  $E_0, H_0$  — электрическое и магнитное поле невозмущенного волновода;  $E_n, H_n$  — электрическое и магнитное поле в волноводе с возмущением;  $\varepsilon_0, \mu_0$  — диэлектрическая и магнитная проницаемость невозмущенного волновода;  $\varepsilon_n, \mu_n$  — диэлектрическая и магнитная проницаемость материала, выступающего в качестве возмущения;  $\gamma_0$  —

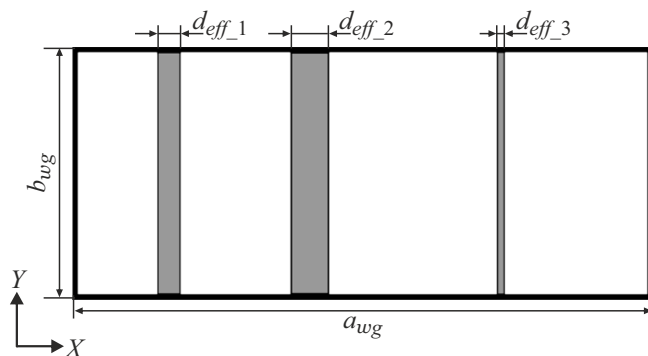


Рис. 7. Поперечное сечение волновода, содержащее один из слоев композита.

постоянная распространения в невозмущенном волноводе;  $\gamma_n$  — постоянная распространения в волноводе с возмущением, верхняя черта — операция комплексного сопряжения.

В числителе интегрирование проводится по сечению включения  $S_n$ , так как вне  $S_n$  везде  $\Delta\varepsilon = 0$  и  $\Delta\mu = 0$ . Выражение (9) является точным соотношением и справедливо для любого возмущения, если известны поля  $E_0, H_0, E_n, H_n$ .

Практическому использованию формулы (9) должна предшествовать задача определения полей  $E_n, H_n$ . В случае, когда включения, рассматриваемые в качестве возмущения среды, слабо изменяют поле в волноводе [20], можно считать, что

$$E_n = E_0, \quad H_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_0} H_0. \quad (10)$$

В рамках рассматриваемой задачи

$$\gamma_0 = \gamma_m, \quad \gamma_n = \gamma_i^{\text{MPL}},$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_m, \quad \varepsilon_n = \varepsilon_c,$$

$$\mu_0 = \mu_n = 1,$$

где  $\varepsilon_m$  и  $\varepsilon_c$  — комплексная диэлектрическая проницаемость матрицы и нитей,  $\gamma_m$  — постоянная распространения в чистой матрице без нитей,  $\gamma_i^{\text{MPL}}$  — искомая постоянная распространения в слое с возмущением.

Решение обратной задачи по определению комплексной постоянной распространения  $\gamma_i^{\text{MPL}} = \gamma_i' + i\gamma_i''$  в одном из слоев многослойной модели композита для частоты  $\gamma$  сводится к решению следующего уравнения:

$$\begin{aligned} & (\gamma_i' + i\gamma_i'') - \gamma_m - \omega \\ & \times \frac{\sum_{k=1}^N \{ \Delta\varepsilon \cdot E_m(x_k) \cdot \overline{E_m(x_k)} \cdot d_{\text{eff}_k} \cdot b_{wg} \}}{\sum_{j=1}^M \left\{ \left[ \overline{E_m(x_j)} \times \left( \frac{\gamma_i' + i\gamma_i''}{\gamma_m} \right) \cdot H_m(x_j) \right] + \left[ E_m(x_j) \times \overline{H_m(x_j)} \right] \right\} \cdot ds} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $N$  — количество включений,  $x_k$  — координата включения с номером  $k$ ,  $d_{\text{eff}_k}$  — эффективная ширина включения с номером  $k$ ,  $b_{wg}$  — ширина узкой стенки волновода (высота включения). Суммирование в знаменателе производится по всей площади волновода с малым шагом  $ds$ .

Численными методами с использованием ЭВМ для каждого слоя и частоты подбираются такие значения  $(\gamma_i', \gamma_i'')$ , при которых функция (11) принимает минимальное значение.

В случае, когда границы раздела перпендикулярны электрической компоненте СВЧ волны в волноводе (рис. 3, *c, d*), представление поля в виде  $TE_{m0}$  волн приводит к несовместным уравнениям, что говорит о неполном представлении поля распространяющейся

волны. Это можно пояснить физически. Постоянная распространения волны должна зависеть от свойств всех сред, составляющих внутреннюю полость волновода, поэтому между ними должен совершаться обмен энергиями, чего не может быть, если вектор электрического поля СВЧ волны перпендикулярен границам раздела, так как вектор Умова–Пойтинга оказывается равным нулю. При распространении волны возникает продольная составляющая электрического поля, которая отсутствует у любой волны из класса  $TE$  [22]. Поэтому метод теории возмущений и модель MPL неприменимы для расчета нитей, ориентированных перпендикулярно электрической компоненте СВЧ волны. Для описания поля, имеющего продольные составляющие, необходимо использовать линейную комбинацию  $TE$ - и  $TM$ -волн.

#### 4.3. Запись матрицы передачи для модели „возмущенных слоев“ MPL

Схема композита (8) встраивается в фотонный кристалл (3) в качестве центрального слоя. Итоговая схема фотонного кристалла с нарушением в виде композита, представленного многослойной моделью из  $n$ -слоев, принимает вид

$$\underbrace{\left( \underbrace{\gamma_{air}}_{\infty} \underbrace{\gamma_p | \gamma_f}_{z_5 \Pi_5^4} \underbrace{\gamma_p}_{z_4 S_4} \right)_{d_1 | d_2} \left( \underbrace{\gamma_n^{MPL}}_{w_n = z_3 S_n} \underbrace{\gamma_i^{MPL}}_{w_{n-1} U_1^{n-1}} \right)_{d_{last} | d_c} \right)_{d_{comp}}}_{d_1} \underbrace{\left( \underbrace{\gamma_p}_{z_3 - d_{comp} S_2} \underbrace{\gamma_f | \gamma_p}_{z_1 \Pi_1^4} \underbrace{\gamma_{air}}_{z_0 = 0 X_0} \right)_{d_2 | d_1}}_{\infty} < . \quad (12)$$

Расписав подробно периодические группы  $\Pi$ , получим

$$\underbrace{\left( \underbrace{\gamma_{air}}_{\infty} \underbrace{\gamma_p}_{z_{11} S_{11}} \underbrace{\gamma_f}_{z_{10} S_{10}} \underbrace{\gamma_p}_{z_9 S_9} \underbrace{\gamma_f}_{z_8 S_8} \underbrace{\gamma_p}_{z_7 S_7} \right)_{d_1 | d_2} \left( \underbrace{\gamma_n^{MPL}}_{w_n = z_6 S_n} \underbrace{\gamma_i^{MPL}}_{w_{n-1} U_1^{n-1}} \right)_{d_{last} | d_c} \left( \underbrace{\gamma_p}_{z_5 S_5} \underbrace{\gamma_f}_{z_4 S_4} \underbrace{\gamma_p}_{z_3 S_3} \underbrace{\gamma_f}_{z_2 S_2} \right)_{d_1 | d_2} \right)_{d_{comp}}}_{d_1} \underbrace{\left( \underbrace{\gamma_p}_{z_1 S_1} \underbrace{\gamma_{air}}_{z_0 = 0 X_0} \right)_{d_1 | \infty}}_{\infty} < . \quad (13)$$

Свойство ассоциативности матричного произведения позволяет отдельно вычислить матрицу передачи  $T_{MPL}$  через многослойную модель композита и включить ее в

произведение, рассчитывающее матрицу передачи  $T_{total}$  через весь фотонный кристалл:

$$T_{total} = T_{left} \cdot T_{lb} \cdot T_{MPL} \cdot T_{rb} \cdot T_{right}. \quad (14)$$

Матрицы  $T_{lb}$  и  $T_{rb}$  являются матрицами передачи через левую и правую границы композита, представленного многослойной моделью MPL (8) с левой  $T_{left}$  и правой  $T_{right}$  частями фотонного кристалла. Следует учесть, что координаты слоев во всех матрицах отсчитываются в одной системе координат, общей для всего фотонного кристалла.

Матрица передачи через центральный слой схемы (13), представляющий нарушение в виде многослойной модели композита MPL, имеет вид

$$T_{MPL} = T(w_{n-1}, \gamma_n^{MPL}, \gamma_{n-1}^{MPL}) \times T(w_{n-1} - d_c, \gamma_{n-1}^{MPL}, \gamma_{n-2}^{MPL}) \dots \times T(w_2 - d_c, \gamma_2^{MPL}, \gamma_1^{MPL}), \quad (15)$$

где  $\gamma_i^{MPL}$  — постоянные распространения в каждом слое многослойной модели, найденные с использованием теории возмущений из уравнения (11),  $w_{n-1} = z_6 - d_{last}$ .

Подстановка матрицы  $T_{MPL}$  (15) в выражение (14) приводит к следующему виду итоговой матрицы передачи через фотонный кристалл с нарушением в виде многослойной структуры:

$$T_{total} = T^{(11)}(z_{11}, \gamma_{air}, \gamma_p) \cdot T^{(10)}(z_{11} - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \times T^{(9)}(z_{10} - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \cdot T^{(8)}(z_9 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \times T^{(7)}(z_8 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \cdot T^{(6)}(z_7 - d_1, \gamma_p, \gamma_n^{MPL}) \times T_{MPL} \cdot T^{(5)}(z_6 - d_{comp}, \gamma_1^{MPL}, \gamma_p) \times T^{(4)}(z_5 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \cdot T^{(3)}(z_4 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \times T^{(2)}(z_3 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \cdot T^{(1)}(z_2 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \times T^{(0)}(z_1 - d_1, \gamma_p, \gamma_{air}), \quad (16)$$

где

$$T_{left} = T^{(11)}(z_{11}, \gamma_{air}, \gamma_p) \cdot T^{(10)}(z_{11} - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \times T^{(9)}(z_{10} - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \cdot T^{(8)}(z_9 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \times T^{(7)}(z_8 - d_2, \gamma_f, \gamma_p), \\ T_{right} = T^{(4)}(z_5 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \cdot T^{(3)}(z_4 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \times T^{(2)}(z_3 - d_1, \gamma_p, \gamma_f) \cdot T^{(1)}(z_2 - d_2, \gamma_f, \gamma_p) \times T^{(0)}(z_1 - d_1, \gamma_p, \gamma_{air}), \\ T_{lb} = T^{(6)}(z_7 - d_1, \gamma_p, \gamma_n^{MPL}), \\ T_{rb} = T^{(5)}(z_6 - d_{comp}, \gamma_1^{MPL}, \gamma_p).$$

Посредством подстановки (16) в (6) рассчитывается спектр коэффициента отражения  $R_{MPL}(\omega)$  от фотонного кристалла с нарушением в виде композита, представленного множеством „возмущенных слоев“ MPL.

## 5. Пластиначая модель композита (EPM)

Более простая модель представляет собой замену нитей пластинами равной толщины, расположенными вдоль широкой стенки волновода на равных расстояниях и протяженными вдоль направления распространения СВЧ волны (рис. 8). Назовем такую модель равноудаленных слоев EPM (Equidistant Plates Model).

Толщина пластин  $d_{pl}$  и расстояние между ними  $L_{pl}$  вычисляются по формулам

$$d_{pl} = (v_c \times a_{wg}) / N_{pl},$$

$$L_{pl} = a_{wg} / (N_{pl} + 1),$$

где  $v_c$  — объемная доля включений в композите,  $a_{wg}$  — размер стенки волновода, относительно которой пластины расположены перпендикулярно,  $N_{pl}$  — количество пластин.

Для расчета спектра коэффициента отражения в модели EPM может использоваться фотонный кристалл:

$$\underbrace{\gamma_{air}}_{X_6} \underbrace{\gamma_p | \gamma_f}_{z_5 \Pi_5^4} \underbrace{\gamma_p}_{z_4 S_4} \underbrace{\gamma_{EPM}}_{z_3 D_3} \underbrace{\gamma_p}_{z_2 S_2} \underbrace{\gamma_f | \gamma_p}_{z_1 \Pi_1^4} \underbrace{\gamma_{air}}_{X_0} <, \quad (17)$$

в котором в качестве нарушения  $D$  выступает участок волновода, заполненный материалом матрицы композита с множеством пластин. Постоянная распространения центрального слоя  $\gamma_{EPM}$  определяется с использованием теории возмущений из уравнения (11). Спектр коэффициента отражения  $R_{EPM}(\gamma)$  рассчитывается по формуле (6) с использованием матрицы передачи (7), в которой постоянная распространения  $\gamma_{comp}$  заменена на  $\gamma_{EPM}$ .

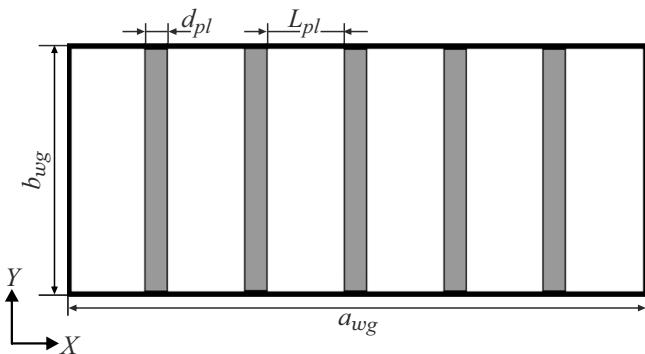


Рис. 8. Модель из пяти пластин, расположенных на равных расстояниях — „пластинчатая модель“ EPM.

## 6. Расчет эффективной диэлектрической проницаемости

Традиционный подход к моделированию свойств композитов заключается в использовании теории эффективной среды ЕМТ (Effective Medium Theory). Формула для расчета эффективной диэлектрической проницаемости с включениями в виде эллипсов с длинами осей  $2a$  и  $2b$  дается выражением Максвелла–Гарнетта [23]:

$$\epsilon_{eff} = \epsilon_m + \frac{v_c \cdot (\epsilon_c - \epsilon_m) \cdot \epsilon_m / [\epsilon_m + (\epsilon_c - \epsilon_m) \cdot N]}{1 - v_c \cdot (\epsilon_c - \epsilon_m) \cdot N / [\epsilon_m + (\epsilon_c - \epsilon_m) \cdot N]}, \quad (18)$$

где  $\epsilon_m$  — диэлектрическая проницаемость матрицы,  $\epsilon_c$  — диэлектрическая проницаемость включений в форме эллипсов,  $v_c$  — объемная доля включений,  $N$  — деполаризующий фактор.

Нити будем приближенно считать вытянутыми эллипсами ( $a \gg b$ ), тогда

$$N \approx \frac{b^2}{a^2} \ln \frac{a}{b} = \frac{d_c^2}{b_{wg}^2} \ln \frac{b_{wg}}{d_c},$$

где  $d_c$  — ширина нити,  $b_{wg}$  — длина нити (ширина узкой стенки волновода).

В настоящей работе предлагается определять эффективную комплексную диэлектрическую проницаемость композита с включениями в виде нитей по спектрам  $R_{MPL}(\omega)$  и  $R_{EPM}(\omega)$ . Заменяем многослойную MPL или пластиначатую EPM-структуру одним слоем с эффективной постоянной распространения  $\gamma_{eff}$  и толщиной  $d_{comp}$ :

$$\underbrace{\gamma_{air}}_{X_6} \underbrace{\gamma_p | \gamma_f}_{z_5 \Pi_5^4} \underbrace{\gamma_p}_{z_4 S_4} \underbrace{\gamma_{eff}}_{z_3 D_3} \underbrace{\gamma_p}_{z_2 S_2} \underbrace{\gamma_f | \gamma_p}_{z_1 \Pi_1^4} \underbrace{\gamma_{air}}_{X_0}, \quad (19)$$

где  $\gamma_{eff}(\omega, \epsilon', \sigma) = \sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} - \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_{eff}(\epsilon', \sigma) \mu_{eff}}$ ,  $\epsilon_{eff}(\omega, \epsilon', \sigma) = \epsilon' - i \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega}$ ,  $\mu_{eff}$  — эффективная магнитная проницаемость композита ( $\mu_{eff} = 1$ ),  $\epsilon'$  — действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости композита,  $\sigma$  — эффективная электропроводность композита.

Матрица передачи для схемы (19) имеет вид, аналогичный (7). По формуле (6) рассчитывается спектр коэффициента отражения  $R_{eff}(\omega, \epsilon', \sigma)$  от фотонного кристалла с нарушением в виде слоя с эффективной постоянной распространения  $\gamma_{eff}(\epsilon', \sigma)$ , представляющим собой исследуемый композит. Численными методами подбирается такая пара параметров  $(\epsilon', \sigma)$ , при которой минимум коэффициента отражения, рассчитанный для фотонного кристалла (12) (для модели MPL) или (17) (для модели EPM) совпадает с минимумом коэффициен-

Таблица 2. Перечень исследуемых моделей

Название	Описание	Методика расчета
FEM	Finite Elements Method. Равномерное распределение по объему нитей, ориентированных вдоль электрической компоненты СВЧ волны (параллельно узкой стенке волновода).	Метод конечных элементов с использованием программы HFSS
MPL	Many Perturbation Layers. Многослойная модель, включениями являются нити с эффективной шириной вдоль оси $X$ .	Теория возмущений, в программном пакете Mathcad.
ЕРМ	Equidistant Plates Model. „Пластиначая модель“, тонкие протяженные пластины.	
ЕМТ	Effective Medium Theory. Теория эффективной диэлектрической проницаемости Максвелла–Гарнетта. Нити заменяются вытянутыми эллипсами [23].	Расчет по формуле (18)

та отражения от фотонного кристалла (19):

$$S_{\text{eff}}(\varepsilon', \sigma) = \frac{(R_{\text{eff}}(\omega, \varepsilon', \sigma)_{\min} - R_X(\omega)_{\min})^2}{|R_X(\omega)_{\min}|} + \frac{(f_{\text{eff}}(\omega, \varepsilon', \sigma)_{\min} - f_X(\omega)_{\min})^2}{f_X(\omega)_{\min}},$$

$$S_{\text{eff}}(\varepsilon', \sigma) = 0, \quad (20)$$

где  $R_{\text{eff}}(\omega, \varepsilon', \sigma)_{\min}$  и  $f_{\text{eff}}(\omega, \varepsilon', \sigma)_{\min}$  — частота и величина минимума на спектре коэффициента отражения, рассчитанного по формуле (6) от фотонного кристалла (19);  $R_X(\omega)_{\min}$  и  $f_X(\omega)_{\min}$  — величина и частота минимума, рассчитанного по модели  $X$ . Вместо  $X$  следует подставить используемую модель (MPL или ЕРМ).

## 7. Результаты моделирования и обсуждение

В настоящей работе производился расчет параметров композита с использованием четырех моделей (табл. 2). Точный аналитический расчет рассматриваемых структур затруднителен, в то время как электродинамическое моделирование с использованием специальных программ дает хорошую сходимость с экспериментальными данными [24,25]. Поэтому параметры, рассчитанные методом конечных элементов FEM с использованием программы HFSS, примем за эталонные значения.

Исследуемые композиты представляли собой матрицу из эпоксидной смолы ( $\varepsilon_m = 3.2 - 0.05i$ ), содержащую проводящие включения в виде протяженных нитей со следующими параметрами:  $\varepsilon_c$  — действительная часть диэлектрической проницаемости,  $\sigma_c$  — электропроводность,  $v_c$  — объемная доля от общего объема композита, занимаемая включениями,  $K_c$  — количество включений,  $N_c = K_c / (d_{\text{comp}} \cdot a_{wg})$  — количество включений на единицу площади композита, [pcs/mm<sup>2</sup>].

Будем исследовать отклонение параметров, рассчитанных с использованием моделей MPL, ЕРМ, ЕМТ от параметров, определенных при моделировании методом конечных элементов FEM. Мерой отклонения будем считать относительную величину

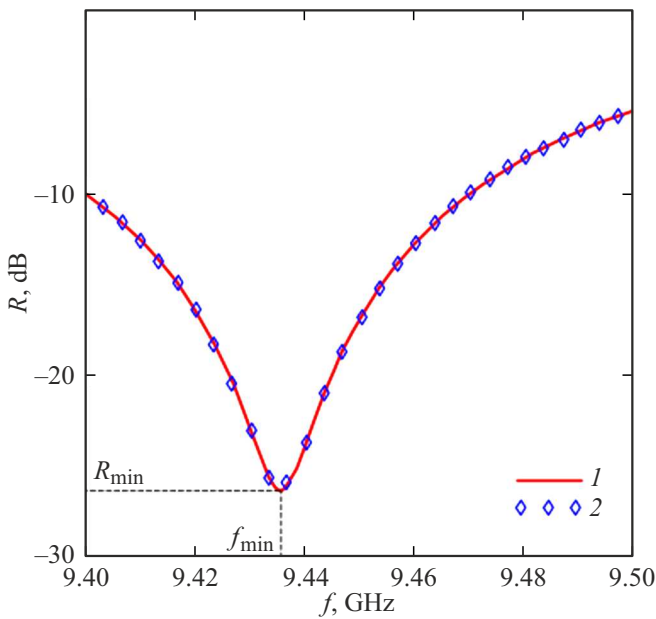
$$\delta X^k = \sqrt{\frac{(X^k - X^{\text{FEM}})^2}{X^{\text{FEM}}}} \cdot 100\%, \quad (21)$$

где  $X$  — рассматриваемый параметр,  $k = \text{MPL, ЕРМ, ЕМТ}$  — модель, для которой рассчитывается отклонение параметра  $X$ . Параметром  $X$  в (21) могут являться частота  $f_{\min}$  или величина  $R_{\min}$  минимума коэффициента отражения, диэлектрическая проницаемость  $\varepsilon_{\text{comp}}$  или электропроводность  $\sigma_{\text{comp}}$  композита.

### 7.1. Применимость модели „возмущенных слоев“ MPL для расчета спектра коэффициента отражения

Спектры коэффициента отражения СВЧ излучения от фотонного кристалла с нарушением в виде композита (рис. 3, а), рассчитанные с использованием моделей FEM и MPL при малых объемных долях, совпадают (рис. 9).

Частотная зависимость коэффициента отражения, рассчитанная с использованием модели „возмущенных слоев“ MPL, с увеличением количества нитей  $N_c$  коррелирует с результатами расчета по модели FEM (рис. 10). Поскольку два разных метода расчета приводят к одному результату, можно сделать вывод об обоснованности использования результатов моделирования в HFSS в качестве эталонных. Ширина нитей при малом их количестве и большой объемной доле возрастает, вследствие чего точность приближения (10), используемого в теории возмущения, снижается, и увеличивается расхождение результатов, полученных с использованием модели „возмущенных слоев“ MPL, с результатами, полученными методом конечных элементов FEM.



**Рис. 9.** Спектр коэффициента отражения от фотонной структуры, рассчитанный с использованием: 1 — метода FEM, 2 — модели MPL. В качестве нарушения используется композит со следующими параметрами:  $N_c = 1.6 \text{ pcs/mm}^2$ ,  $\nu_c = 0.5\%$ ,  $\epsilon_c = 50$ ,  $\sigma_c = 5 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ .

Частота  $f_{\min}$  (рис. 10, *a*) и величина  $R_{\min}$  (рис. 10, *b*) минимума коэффициента отражения претерпевают колебания, обусловленные случайным распределением нитей. Эти колебания не могут быть описаны моделями эффективных сред, поэтому предлагается повысить точность расчета электрофизических параметров структур, содержащих ориентированные нити, с использованием разрабатываемой модели.

При количестве нитей более  $1.5 \text{ pcs/mm}^2$  отклонение частоты минимума коэффициента отражения не превышает  $0.05\%$  (рис. 11, *a*), а отклонение величины минимума не превышает  $1\%$  (рис. 11, *b*).

Рассмотрим влияние параметров включений  $\epsilon_c$  и  $\sigma_c$  на точность расчетов с использованием модели MPL при различных объемных долях включений  $\nu_c$ . Выберем в качестве исследуемых композитов образцы с количеством нитей  $N_c = 1.6 \text{ pcs/mm}^2$ , при котором погрешность, обусловленная размерами нитей, незначительна.

Зависимость отклонения частоты  $\delta f_{\min}^{\text{MPL}}$  и величины минимума  $\delta R_{\min}^{\text{MPL}}$  коэффициента отражения от действительной части диэлектрической проницаемости и электропроводности включений представлены на рис. 12.

Модель „возмущенных слоев“ MPL при объемных долях включений  $\nu_c < 2.5\%$  является хорошим приближением для расчета коэффициента отражения от композитов, при параметрах включений  $\epsilon_c < 100$ ,  $\sigma_c < 100$ . Погрешность определения минимума коэффициента отражения составляет  $\delta f_{\min}^{\text{MPL}} < 0.2\%$ ,  $\delta R_{\min}^{\text{MPL}} < 1.0\%$ .

Увеличение объемной доли нитей  $\nu_c$  приводит к увеличению погрешности. Однако при малых значениях

диэлектрической проницаемости и проводимости нитей ( $\epsilon_c < 40$ ,  $\sigma_c < 10$ ) расчеты, произведенные с использованием модели „возмущенных слоев“ MPL, приводят к погрешности определения минимума коэффициента отражения, не превышающей  $1\%$  даже при больших объемных долях включений  $\nu_c = 10\%$ .

С увеличением электропроводности включений  $\sigma_c$  добротность структуры снижается, и резонанс на частотной зависимости становится менее выраженным. Соответственно ожидается снижение точности определения параметров по экспериментальным спектрам при больших значениях электропроводности  $\sigma_c$ . Применимость модели MPL можно оценить по рис. 13, на котором для каждой объемной доли включений представлена их электропроводность  $\sigma_{c50}$ , при которой добротность резонанса снижается в 50 раз относительно чистой матрицы без включений (величина минимума коэффициента отражения увеличивается с  $-40$  до  $-4 \text{ dB}$ ). Погрешность определения комплексной диэлектрической проницаемости композита при этом не будет превышать  $1\%$ .

## 7.2. Определение электрофизических параметров однородных композитов с использованием пластинчатой модели ЕРМ

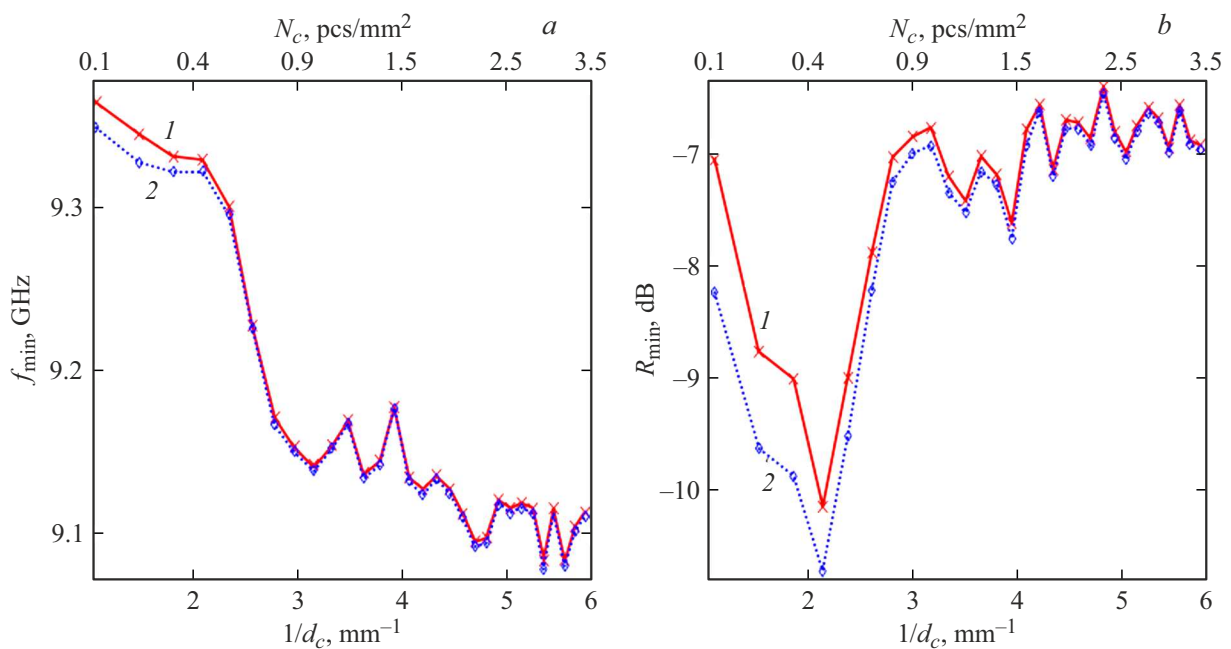
Расчет по модели MPL требует сведений о точном распределении включений в пространстве, получить которое бывает затруднительно, а в модели ЕРМ необходимо знание только количества пластин.

Исследуем возможность использования пластинчатой модели ЕРМ для определения параметров композитов, содержащих нити, равномерно распределенные в пространстве. Рассмотрим композит, представляющий собой матрицу из эпоксидной смолы со следующими параметрами нитей:  $\nu_c = 0.5\%$ ,  $\epsilon_c = 50$ ,  $\sigma_c = 5 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ . Решение обратной задачи по определению электрофизических параметров композита осуществляется на основе данных о частоте и величине минимума коэффициента отражения от фотонной структуры. Зависимость этих величин от количества нитей изображена на рис. 13.

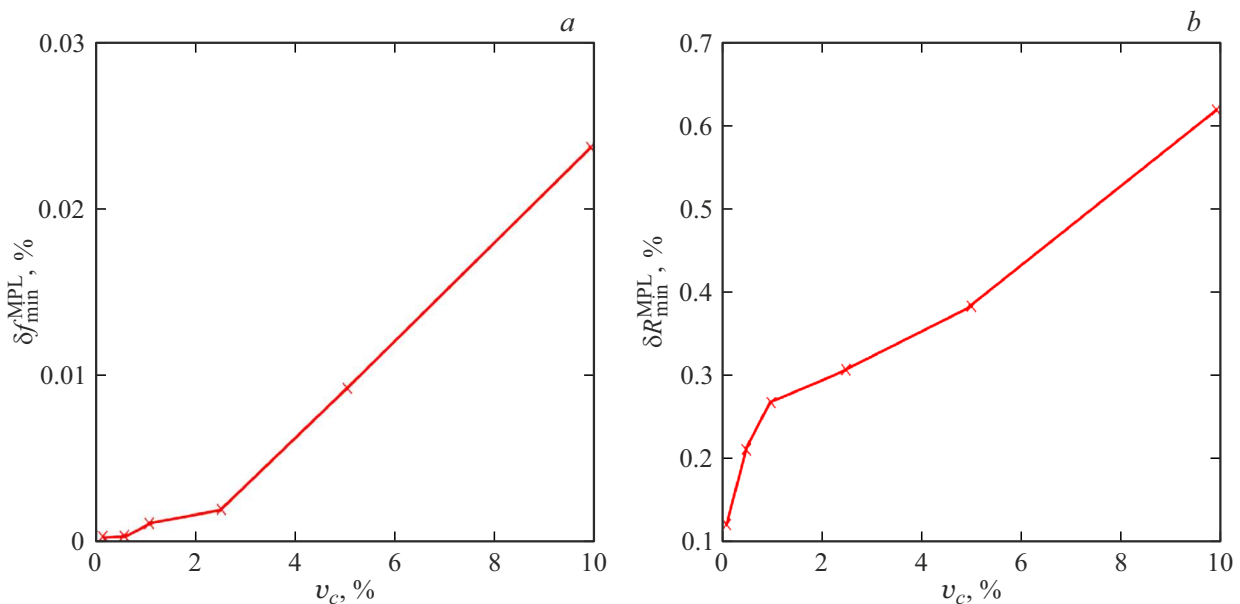
Стохастические колебания, частоты  $f_{\min}$  (рис. 14, *a*, кривая 1) и величины  $R_{\min}$  (рис. 14, *b*, кривая 1) минимума коэффициента отражения, полученные в результате моделирования в программе HFSS, стремятся к значению, рассчитанному по пластинчатой модели ЕРМ при количестве нитей более двух сотен ( $N_c > 2 \text{ pcs/mm}^2$ ). Зависимости частоты и величины минимума коэффициента отражения, рассчитанные по пластинчатой модели ЕРМ (рис. 14, кривые 2), выходят на насыщение при количестве пластин, превышающем несколько десятков.

Действительная часть эффективной диэлектрической проницаемости композита и его эффективная электропроводность определялись в результате решения обратной задачи (20). Зависимость величины рассчитанных параметров от количества нитей представлены на рис. 15, *a, b*. Погрешность определения параметров (21)





**Рис. 10.** Зависимость от обратной толщины нитей (сверху указано соответствующее количество нитей) частоты  $f_{\min}$  (a) и величины  $R_{\min}$  (b) минимума коэффициента отражения, расчет производился с использованием: 1 — метода конечных элементов FEM, 2 — модели „возмущенных слоев“ MPL. Объемная доля нитей в композите  $v_c = 10\%$ .



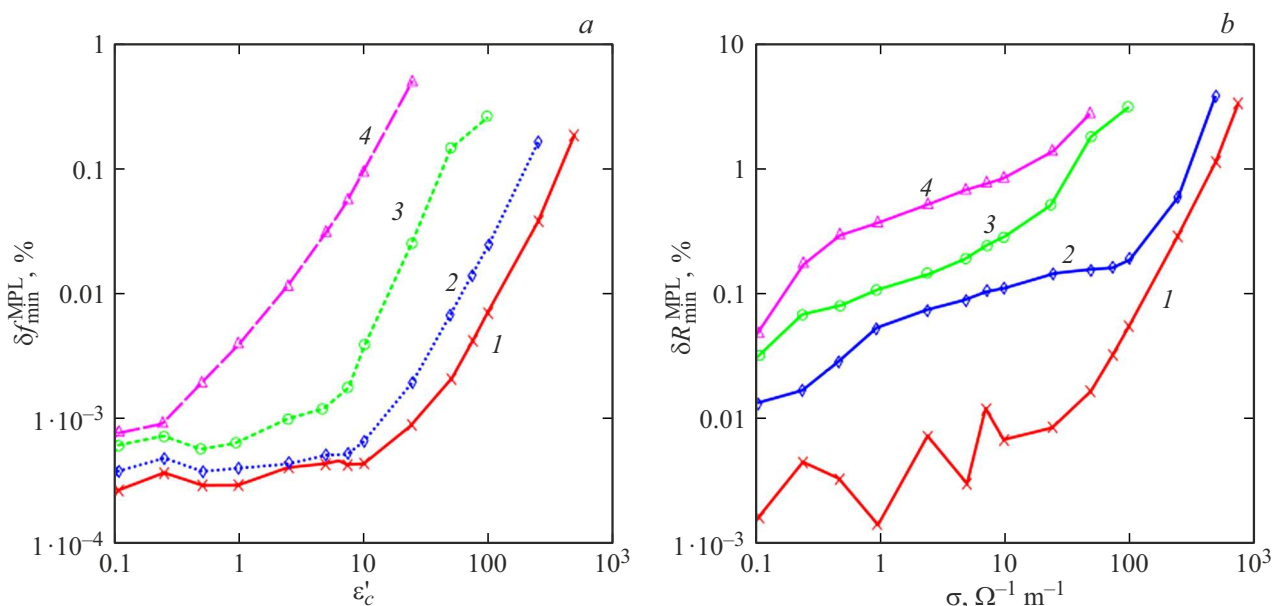
**Рис. 11.** Отклонение частоты  $\delta f_{\min}^{\text{MPL}}$  (a) и величины  $\delta R_{\min}^{\text{MPL}}$  (b) минимума коэффициента отражения от объемной доли включений при количестве нитей  $N_c = 1.6 \text{ pcs/mm}^2$ .

композита, найденных по спектру, рассчитанному с использованием пластинчатой модели ЕРМ, представлена на рис. 15, c, d.

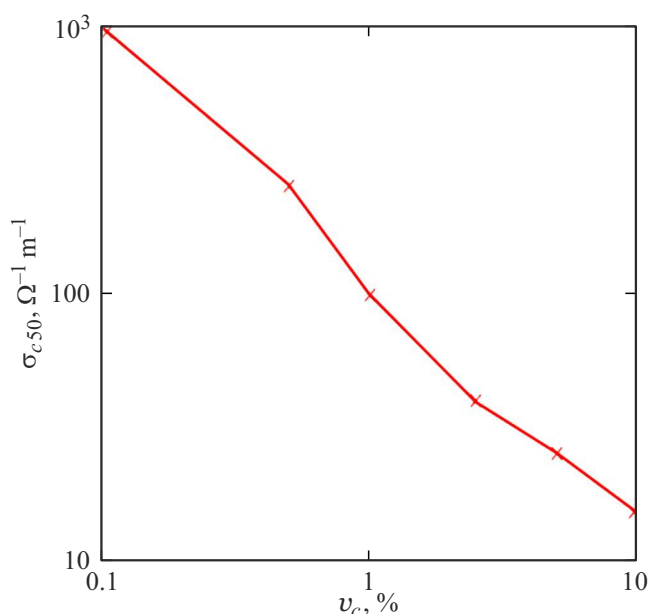
Таким образом, погрешность определения электрофизических параметров однородного композита зависит от случайного распределения нитей, которое трудно определить экспериментально. „Пластинчатая модель“ позволяет рассчитывать действительную часть диэлек-

трической проницаемости с погрешностью, обусловленной несовершенством модели, не более 1%, а электропроводность — не более 10% (при объемной доле включений  $v_c = 1\%$  и их количестве  $N_c > 1.0 \text{ pcs/mm}^2$ ).

Модель ЕРМ позволила определить параметры ориентированных вдоль оси  $Y$  нитевидных включений реального композита, высушенного в присутствии магнитного поля с индукцией 130 мТ. Эффективная комплексная



**Рис. 12.** Зависимость отклонения частоты минимума  $\delta f_{\min}^{\text{MPL}}$  от диэлектрической проницаемости включений  $\epsilon_c$  (a) и величины минимума  $\delta R_{\min}^{\text{MPL}}$  от проводимости включений  $\sigma_c$  (b) при количестве нитей  $N_c = 1.6 \text{ pcs/mm}^2$  и объемных долях включений  $v_c$ : 1 — 0.5 %, 2 — 1.0 %, 3 — 5.0 %, 4 — 10.0 %.



**Рис. 13.** Зависимость электропроводности нитей, при которой добротность резонанса снижается в 50 раз относительно чистой матрицы, от объемной доли включений.

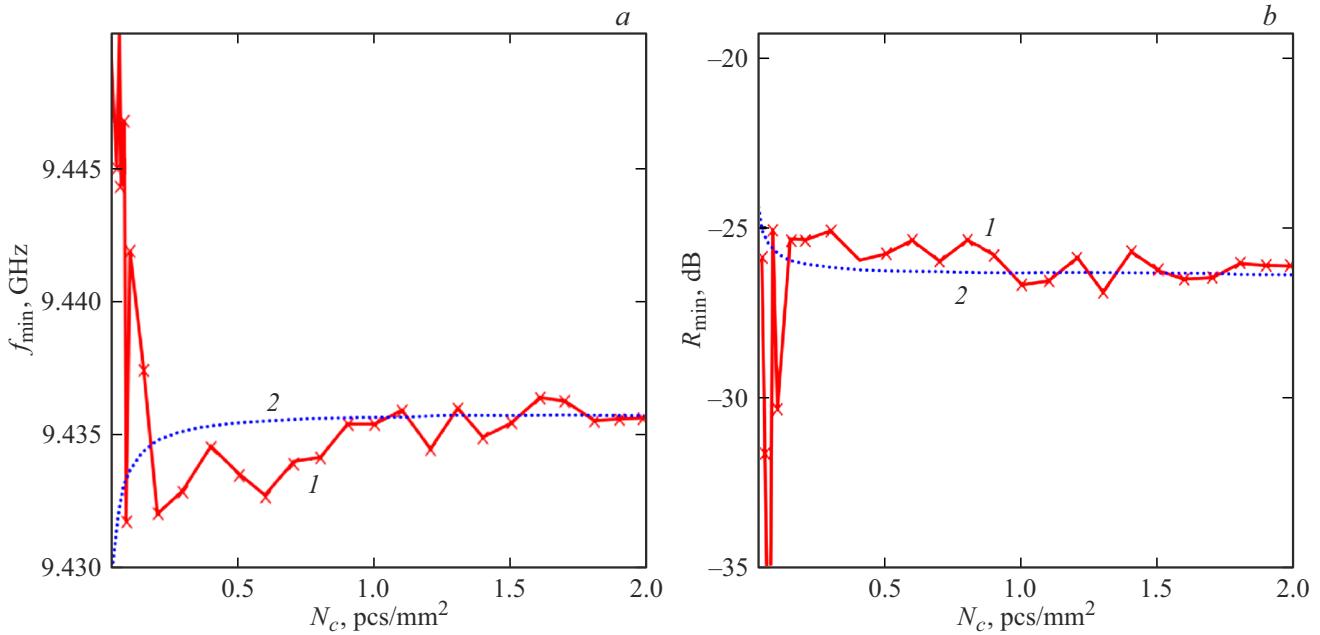
диэлектрическая проницаемость композита  $\epsilon_{\text{comp}\parallel}$  рассчитывалась с использованием экспериментально измеренного спектра коэффициента отражения (рис. 2, a, кривая 2). Найденное значение использовалось при решении обратной задачи (рис. 16) по определению, с использованием пластинчатой модели ЕРМ (рис. 3, b), комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{c\parallel}^{\text{EPM}}$  включений из

**Таблица 3.** Значения электрофизических параметров композитов и нитевидных включений, определенные по экспериментальным данным

$\epsilon$	$\epsilon'$	$\epsilon''$	$\sigma, \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$	Рисунок
$\epsilon_{\text{comp}}$	3.23	0.03	0.01	Рис. 2, a, кривая 1
$\epsilon_{\text{comp}\parallel}$	3.51	0.09	0.05	Рис. 2, a, кривая 2
$\epsilon_{c\parallel}^{\text{FEM}}$	55.20	11.48	6.04	Рис. 3, a
$\epsilon_{c\parallel}^{\text{EPM}}$	53.0	12.11	6.4	Рис. 3, b

УНТ (табл. 3). Погрешность определения параметров относительно значений  $\epsilon_{c\parallel}^{\text{FEM}}$ , рассчитанных по модели FEM (рис. 3, a), составила  $\delta \epsilon_{c\parallel}^{\text{EPM}} = 4\%$  и  $\delta \sigma_c^{\text{EPM}} = 6\%$ .

„Пластинчатая модель“ неприменима в случае перпендикулярной ориентации пластин (рис. 3, d) относительно электрической компоненты СВЧ волны (рис. 17). Как известно [26], в волноводе, возбужденном на любой из типов волн, можно найти плоскости, во всех точках нормальные к электрическим силовым линиям и касательные к магнитным силовым линиям. Поле данной волны не будет возмущено, если в волноводе расположить тонкие идеально проводящие поверхности, совпадающие с этими плоскостями. В результате прямоугольный волновод, возбужденный на волне типа  $TE_{10}$ , может быть разделен на сколь угодно большое число волноводов с неизменным размером  $a_{wg}$  и с уменьшенным размером  $b_{wg}$ . Судя по тому, что на значение частоты и величины минимума (рис. 17, кривая 2) наличие пластин оказыва-



**Рис. 14.** Зависимость частоты (а) и величины (б) минимума коэффициента отражения от фотонной структуры с нарушенным слоем в виде образца исследуемого композита ( $v_c = 0.5\%$ ,  $\varepsilon_c = 50$ ,  $\sigma_c = 5 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ) от количества включений  $N_c$ , расчеты производились с использованием: 1 — метода конечных элементов FEM, 2 — теории возмущений для пластинчатой модели EPM.

ет незначительное влияние, можно говорить о том, что электромагнитное поле в случае пластинчатой модели взаимодействует с перпендикулярно-ориентированными пластинам слабо, в результате минимум коэффициента отражения слабо отличается от чистой матрицы без включений.

### 7.3. Сравнение значений параметров, рассчитанных с использованием различных моделей

Модель эффективной среды EMT применяется для расчета комплексной диэлектрической проницаемости однородных сред. Как было показано ранее, на зависимости минимума коэффициента отражения от количества включений наблюдаются стохастические колебания, которые с увеличением количества включений стремятся к некоторому среднему значению. Увеличение количества нитей приводит к значительному увеличению времени расчета методом конечных элементов FEM при количестве нитей  $N_c > 5.0 \text{ pcs/mm}^2$  и их толщине  $d_c < 15 \mu\text{m}$ . Метод конечных элементов FEM при малых объемных долях либо малых значениях диэлектрической проницаемости и проводимости включений может быть заменен расчетом с использованием модели „возмущенных слоев“ MPL.

Оценку погрешности определения параметров однородного композита с использованием модели „возмущенных слоев“ MPL будем производить по формуле средней относительной ошибки MRPE (Mean Relation

Percentage Error):

$$\delta X_{avg}^{MPL}(v_c) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\frac{\left( X_{MPL}(N_i, v_c) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_{MPL}(N_i, v_c)}{n} \right)^2}{X_{MPL}(N_i, v_c)}}, \quad (22)$$

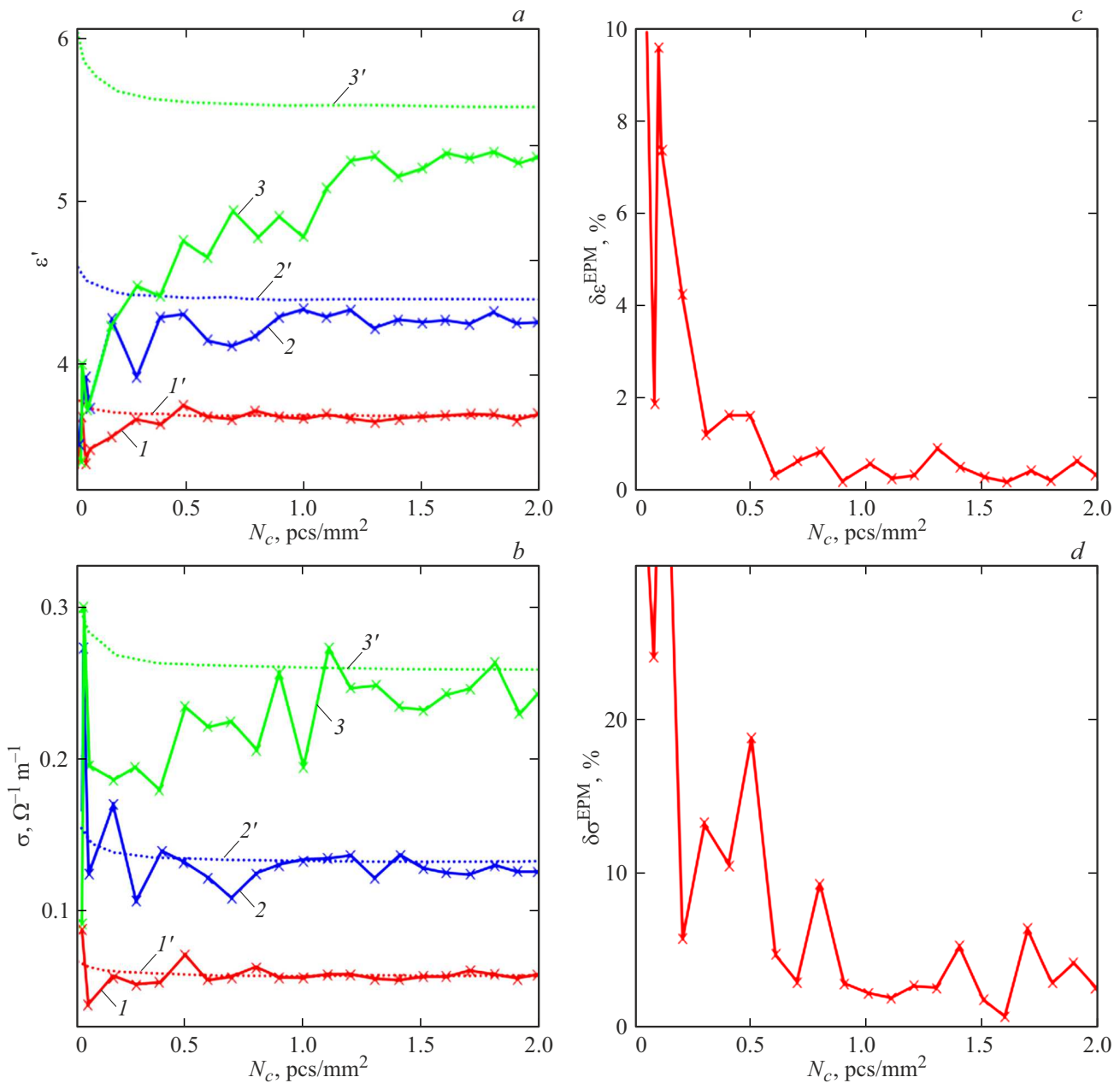
где  $X_{MPL}$  — параметр ( $\varepsilon'$  или  $\sigma$ ), погрешность которого вычисляется, рассчитанный с использованием модели MPL при объемной доле нитей  $v_c$  и их количестве  $N_i$ ,  $n$  — количество композитов, по которым происходит усреднение.

Для оценки погрешности определения параметров с использованием пластинчатой модели EPM или методом эффективной среды EMT будем использовать ошибку параметра, относительно среднего значения, найденного методом MPL, так как модель MPL хорошо соотносится с методом FEM:

$$\delta X_{avg}^{EPM/EMT}(v_c) = \frac{X_{EPM/EMT}(N_i, v_c) - \frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_{MPL}(N_i, v_c)}{n}}{\frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_{MPL}(N_i, v_c)}{n}}. \quad (23)$$

Зависимость  $\delta\varepsilon_{avg}$  и  $\delta\sigma_{avg}$  от объемной доли включений показана на рис. 18 и в табл. 4. При расчете ошибок по формулам (22) и (23) количество нитей в композитах  $N_i$  изменялось от 1000 до 1500 с шагом 50, т.е.  $n = 10$ .

Незначительное уменьшение средней относительной ошибки (рис. 18, кривая 1) с ростом объемной доли нитей обусловлено уменьшением стохастических колебаний частоты и величины минимума коэффициента

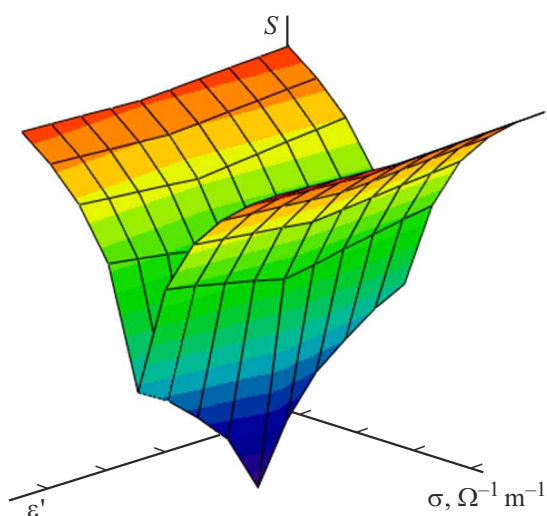


**Рис. 15.** Зависимость от количества включений действительной части эффективной диэлектрической проницаемости  $\epsilon'$  (a) и электропроводности  $\sigma$  (b) композита, рассчитанных с использованием модели FEM (кривые 1–3) и модели EPM (кривые 1'–3') при объемных долях включений  $v_c$ : 1 — 1%, 2 — 2.5%, 3 — 5%; отклонение значений эффективной диэлектрической проницаемости (c) и электропроводности (d) композита, рассчитанных по модели EPM, от модели FEM при объемной доле включений  $v_c = 1\%$ .

отражения, что связано с более равномерным распределением нитей при больших объемных долях.

Модель эффективной среды ЕМТ и „пластинчатая модель“ ЕРМ при малых объемных долях  $v_c < 1\%$  описывают действительную часть диэлектрической проницаемости композита с высокой точностью, но приводят к завышенным значениям при определении электропроводности. Такой странный вид (рис. 18, b, кривые 2, 3) зависимости погрешности может быть объяснен стоха-

стическими колебаниями (рис. 10), рассчитанное значение погрешности будет зависеть от выбора диапазона количества нитей, который использовался при вычислении в (23) слагаемого  $\frac{\sum_{i=0}^{n-1} X_{\text{MPL}}(N_i, v_c)}{n}$ . При малых объемных долях выбранный диапазон (от 1000 до 1500 нитей) приводит к заниженным значениям электропроводности относительно значения, рассчитанного методом ЕМТ, а при больших — к завышенным. Это может указывать на существование зависимости значений параметров



**Рис. 16.** Минимум функции невязки при решении обратной задачи по определению параметров включений; частотная зависимость коэффициента отражения от композита рассчитывалась с использованием пластинчатой модели EPM.

композита от количества нитей на единицу площади при фиксированной объемной доле, что требует отдельного изучения.

Таким образом, с увеличением объемной доли включений увеличивается расхождение значений диэлектрической проницаемости и электропроводности композитов, определенных с использованием модели MPL, от

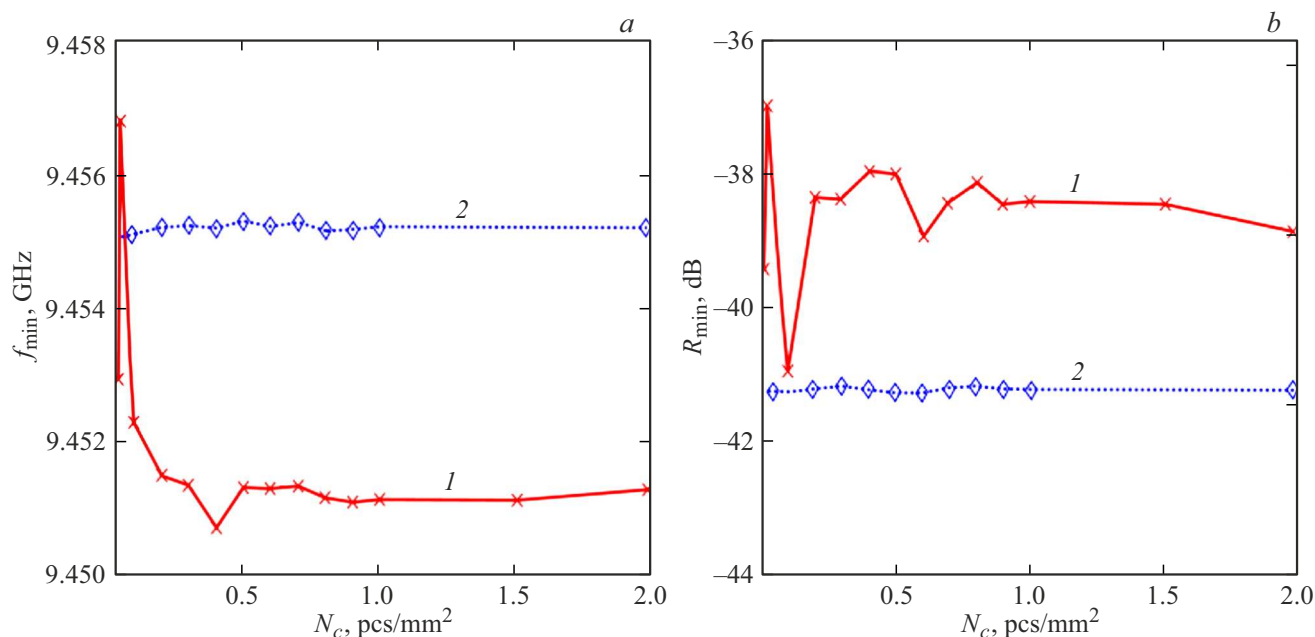
**Таблица 4.** Погрешность определения электрофизических параметров с использованием различных моделей (параметры нитей  $\varepsilon_c = 50$ ,  $\sigma = 5 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ )

$\nu_c$	Погрешность, %					
	$\delta \varepsilon_{avg}^{MPL}$	$\delta \varepsilon_{avg}^{EPM}$	$\delta \varepsilon_{avg}^{EMT}$	$\delta \sigma_{avg}^{MPL}$	$\delta \sigma_{avg}^{EPM}$	$\delta \sigma_{avg}^{EMT}$
0.5 %	0.09	+0.27	+0.3	0.01	+2.60	+3.76
2.5 %	0.09	-1.15	-0.93	0.63	-2.41	-0.91
5 %	0.55	-2.51	-2.02	1.32	-3.30	-1.57
10 %	0.51	-5.87	-4.67	1.05	-4.78	-2.71

значений, рассчитанных с использованием пластинчатой модели EPM и модели эффективной среды EMT.

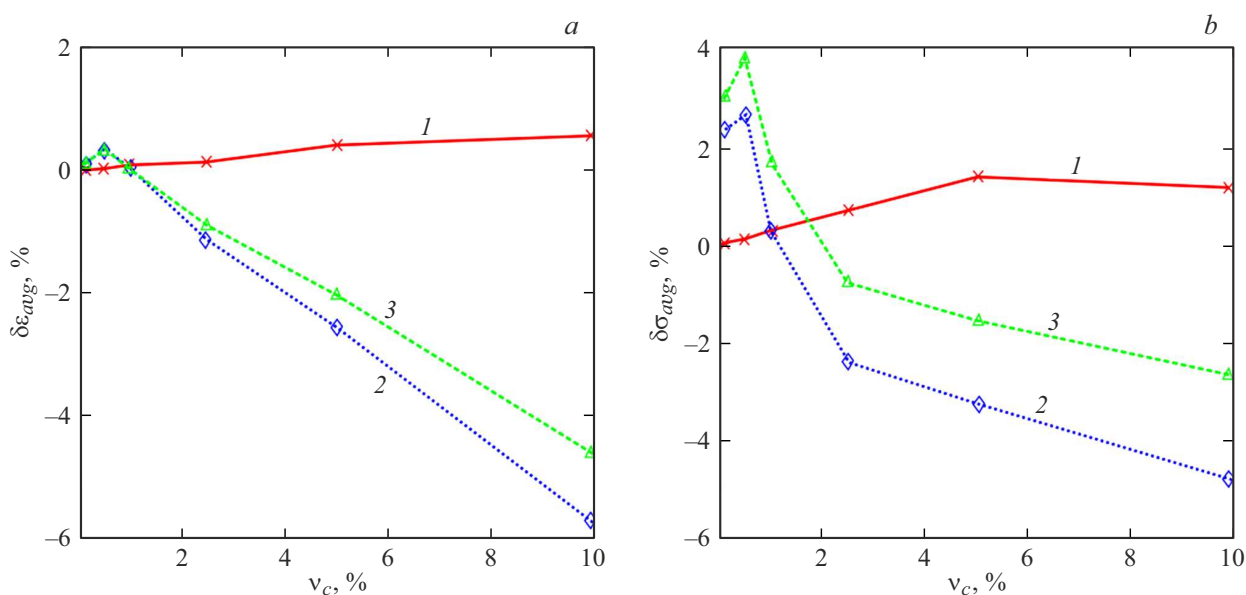
#### 7.4. Расчет коэффициента отражения от неоднородного композита

Модель MPL в отличие от модели эффективной среды применима для расчета коэффициента отражения от неоднородных композитов (рис. 3, *e*). В качестве примера был рассмотрен композит, в котором включения смещены от узких стенок волновода к середине широкой стенки (рис. 19, *a*). На рис. 19 использованы следующие обозначения:  $V_0$  — общий объем композита,  $V_A$  — центральная область волновода, в котором происходит распределение нитей,  $R_A$  — минимум коэффициента отражения при неоднородном заполнении (нити распре-

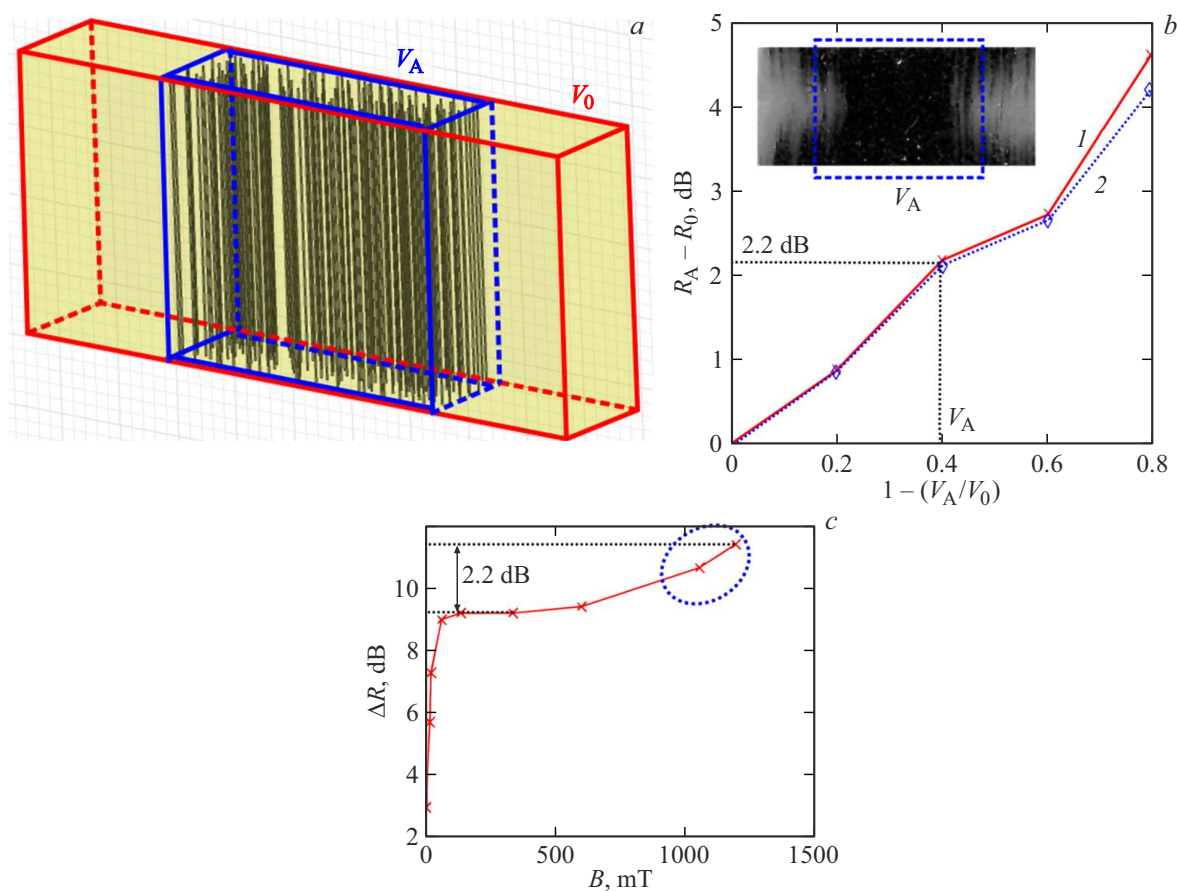


**Рис. 17.** Зависимость частоты  $f_{\min}$  (*a*) и величины  $R_{\min}$  (*b*) минимума коэффициента отражения от количества нитей (кривая 1) и пластин (кривая 2), ориентированных перпендикулярно электрической компоненте СВЧ волны (параллельно широкой стенке волновода). Расчет производился методом конечных элементов FEM.





**Рис. 18.** Зависимость погрешности определения действительной части диэлектрической проницаемости (а) и электропроводности (б) композита с включениями, распределенными однородно, от объемной доли включений с параметрами  $\varepsilon_c = 50$ ,  $\sigma_c = 5 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ : 1 — средняя относительная ошибка при расчетах с использованием модели MPL, 2 — относительное отклонение значений параметров, рассчитанных с использованием модели MPL, от модели EPM, 3 — от модели EMT.



**Рис. 19.** Неоднородное заполнение волновода (а), разность минимумов коэффициента отражения между неоднородным и однородным заполнением от приведенного объема (б) (на вставке размещена фотография образца) и экспериментальная зависимость разности минимумов коэффициента отражения  $\Delta R$  от образцов, высушенных в присутствии и отсутствии магнитного поля, от величины индукции магнитного поля (с). Расчет спектра производился: 1 — в HFSS, 2 — с использованием модели „возмущенных слоев“ MPL.

ляются в объеме  $V_A$ ),  $R_0$  — при однородном заполнении ( $V_A = V_0$ ).

Чем нити ближе к середине, тем минимум коэффициент отражения выше (рис. 19, б), что обусловлено распределением электрического поля в волноводе, которое в середине широкой стенки принимает максимальное значение. Тем самым модель MPL объясняет увеличение минимума коэффициента отражения (рис. 2, б) СВЧ волны от композитов ЭС-МЖ-УНТ, наблюдаемое в эксперименте и связанное со стягиванием суспензии, состоящей из МЖ и УНТ, ближе к центру образца в процессе высушивания композита при приложении неоднородного магнитного поля.

## Заключение

Таким образом, была предложена модель, позволяющая свести участок волновода, заполненного диэлектриком с ориентированными включениями, к многослойной структуре — „модель возмущенных“ слоев MPL. Коэффициент отражения от данной структуры может быть рассчитан с использованием метода матриц передачи, постоянная распространения каждого слоя при этом вычисляется с использованием теории возмущений. Спектры, полученные с использованием модели MPL, согласуются с результатами моделирования методом конечных элементов, произведенным в программе HFSS. Погрешность определения минимума коэффициента отражения не превосходит 1 % при малых объемных долях или малых величинах комплексной диэлектрической проницаемости включений. Модель MPL подходит для расчета структур с большим количеством нитей микронных размеров, где другие методы моделирования требуют, как минимум, на порядок больших временных затрат при толщине нитей менее  $15 \mu\text{m}$ .

Расчет электрофизических параметров композита производился по положению минимума коэффициента отражения от СВЧ фотонной структуры с нарушением в виде исследуемого образца в ходе решения обратной задачи. Погрешность определения параметров композита при этом не превосходит 1 %. Фотонную структуру целесообразно использовать при малых объемных долях или малых значениях электропроводности включений, так как при больших значениях добротность резонанса снижается. Например, при  $\sigma_c = 25 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$  и  $\nu_c = 10\%$  погрешность определения электропроводности составляет 2.4 %, а при  $\sigma_c = 50 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$  — уже 8.3 %.

Численный расчет, произведенный с использованием модели возмущенных слоев MPL, при больших объемных долях включений ( $\nu_c > 5\%$ ) приводит к погрешности определения комплексной диэлектрической проницаемости в пять раз меньшей, чем при использовании метода эффективной среды (ЕМТ) Максвелла–Гарнетта в приближении вытянутых эллипсоидов.

Также была рассмотрена применимость модели возмущенных слоев MPL для расчета спектра коэффициента

отражения от композитов с неоднородным распределением ориентированных нитей. Результаты хорошо согласуются с данными, полученными при моделировании в HFSS.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] H. Shanmugasundram, E. Jayamani, K. Soon. *Renewable Sustainable Energy Rev.*, **157** (3), 112075 (2022). DOI: 10.1016/j.rser.2022.112075
- [2] L. Zhao, C. Wei, Z. Li, W. Wei, L. Jia, X. Huang, W. Ning, Z. Wang, J. Ren. *Mater. Design*, **210** (16), 110124 (2021). DOI: 10.1016/j.matdes.2021.110124
- [3] L. Cui, X. Han, F. Wang, H. Zhao, Y. Du. *J. Mater. Sci.*, **56**, 10782 (2021). DOI: 10.1007/s10853-021-05941-y
- [4] R. Li, X. Yang, J. Li, Y. Shen, L. Zhang, R. Lu, C. Wang, X. Zheng, H. Chen, T. Zhang. *Mater. Today Phys.*, **22**, 100594 (2022). DOI: 10.1016/j.mtphys.2021.100594
- [5] L. Li, J. Cheng, Y. Cheng, T. Han, Y. Liu, Y. Zhou, Z. Han, G. Zhao, Y. Zhao, C. Xiong, L. Dong, Q. Wang. *J. Mater. Chem.*, **9**, 23028 (2021). DOI: 10.1039/D1TA05408B
- [6] V.E. Ogbonna, A.P.I. Popoola, O.M. Popoola. *Polymer Bull.*, **80**, 3449 (2023). DOI: 10.1007/s00289-022-04249-4
- [7] Е.А. Воробьева, А.П. Евсеев, В.Л. Петров, А.А. Шемухин, Н.Г. Чеченин. ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия, **1**, 23 (2021).
- [8] Л.А. Апресян, Д.В. Власов, Д.А. Задорин, В.И. Красовский. *ЖТФ*, **87** (1), 10 (2017). [L.A. Apresyan, D.V. Vlasov, D.A. Zadorin, V.I. Krasovskii. *Tech. Phys.*, **62** (1), 6 (2017). DOI: 10.1134/S1063784217010029]
- [9] H. Looyenga. *Physica*, **31**, 401 (1965). DOI: 10.1016/0031-8914(65)90045-5
- [10] S.O. Nelson. *Transactions ASAE*, **35** (2), 625 (1992). DOI: 10.13031/2013.28642
- [11] Г.С. Кац, Д.В. Милевски. *Наполнители для полимерных композиционных материалов* (Химия, М., 1981)
- [12] A.N. Lagarkov, S.M. Matytsin, K.N. Rozanov, A.K. Sarychev. *J. Appl. Phys.*, **84** (7), 3806 (1998). DOI: 10.1063/1.368559
- [13] X. Xu, A. Qing, Y.B. Gan, Y.P. Feng. *J. Electromagn. Waves Appl.*, **18** (5), 649 (2004). DOI: 10.1163/156939304774114682
- [14] D.W. Seo, H.J. Kim, K.U. Bae, N.H. Myung. *J. Electromagnetic Waves Applications*, **24** (17–18), 2419 (2010). DOI: 10.1163/156939310793675835
- [15] M.J. Akhtar, H.B. Baskey, P. Ghising, N.M. Krishna. *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, **22** (3), 1702 (2015). DOI: 10.1109/TDEI.2014.004808
- [16] А.Э. Постельга, С.В. Игонин. *Дефектоскопия*, **2**, 53 (2025).
- [17] Д.А. Усанов, М.К. Мерданов, А.В. Скрипаль, Д.В. Пономарев. *Известия Сар. ун-та. Новая серия. Серия: Физика*, **15** (1), 57 (2015). DOI: 10.18500/1817-3020-2015-15-1-57-73
- [18] Д.А. Усанов, С.А. Никитов, А.В. Скрипаль, Д.В. Пономарев, Е.В. Латышева. *Известия вузов. Электроника*, **21** (2), 187 (2016). [D.A. Usanov, S.A. Nikitov, A.V. Skripal, D.V. Ponomarev, E.V. Latysheva. *Semiconductors*, **50**, 1759 (2016). DOI: 10.1134/S1063782616130091]

- [19] Т.С. Бочкова, С.В. Игонин, Д.А. Усанов, А.Э. Постельга. Дефектоскопия, **8**, 41 (2018). [T.S. Bochkova, S.V. Igonin, D.A. Usanov, A.É. Postelga. Russ. J. Nondestruct. Test., **54**, 576 (2018). DOI: 10.1134/S106183091808003X]
- [20] К.С. Чэмплин, Д.Б. Армстронг. ТИРИ, **50** (2), 272 (1962).
- [21] В.В. Никольский. Радиотехника и электроника, **2** (2), 157 (1957).
- [22] Ю.В. Егоров. *Частично заполненные прямоугольные волноводы* (Советское радио, М., 1967)
- [23] A.H. Sihvola, J.A. Kong. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, **26** (4), 420 (1988). DOI: 10.1109/36.3045
- [24] A. Katsounaros, K.Z. Rajab, Y. Hao, M. Mann, W.I. Milne. Appl. Phys. Lett., **98**, 203105 (2011). DOI: 10.1063/1.359226
- [25] M. Mishra, S. Puthucheri, D. Singh. IEEE Transactions on Magnetism, **53** (8), 2800710 (2017). DOI: 10.1109/TMAG.2017.2698401
- [26] И.В. Лебедев. *Техника и приборы СВЧ* (Высшая школа, М., 1970)