

16,04

## Фотонные моды диэлектрического резонатора Мёбиуса с одним и двумя твистами

© М.Э. Бочкарев<sup>1,2</sup>, Н.С. Солодовченко<sup>1,2</sup>, К.Б. Самусев<sup>1,2</sup>, М.Ф. Лимонов<sup>1,2,¶</sup>

<sup>1</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,

Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Университет ИТМО,

Санкт-Петербург, Россия

¶ E-mail: M.Limonov@mail.ioffe.ru

Поступила в Редакцию 21 октября 2025 г.

В окончательной редакции 21 октября 2025 г.

Принята к публикации 24 октября 2025 г.

Созданы и исследованы три типа диэлектрических резонаторов: плоский кольцевой резонатор и резонаторы Мёбиуса с одним и двумя твистами. Резонаторы имеют одинаковое прямоугольное поперечное сечение и длину по средней линии, а также одинаковую диэлектрическую проницаемость. Резонаторы сантиметровых размеров созданы на 3D-принтере, спектры экстинкции экспериментально исследовались в микроволновом диапазоне в безэховой камере. В спектре экстинкции резонатора Мёбиуса с одним твистом наблюдается смещение продольных фотонных мод на полпериода относительно спектров плоского кольца, что связано с появлением фазы Берри  $\pi$ . Оригинальным результатом работы является экспериментальная демонстрация отсутствия смещения в спектрах резонатора Мёбиуса с двумя твистами из-за дополнительного набега фазы Берри  $2\pi$ , не меняющего обычные резонансные условия для продольных мод плоского кольцевого резонатора.

**Ключевые слова:** лента Мёбиуса, кольцевой резонатор, фаза Берри, продольные фотонные моды.

DOI: 10.61011/FTT.2025.10.61984.284-25

### 1. Введение

Классическая лента Мёбиуса — это односторонняя поверхность, образованная соединением двух концов достаточно длинной прямоугольной полоски бумаги, скрученной на один или несколько полуоборотов, называемых „твистами“ [1,2]. В настоящей статье мы рассмотрим диэлектрические ленты Мёбиуса конечной толщины, скрученные на один или два твиста (т.е. на один полный оборот), и назовем такой объект резонатором Мёбиуса (РМ). РМ имеет только две грани (две неориентируемые ленты Мёбиуса), только два ребра, и не имеет вершин. В отличие от односторонней ленты Мёбиуса с односторонней топологией, РМ конечной толщины с любым числом оборотов топологически идентична обычному кольцевому резонатору (КР).

Значительный интерес исследователей к ленте Мёбиуса во многом обусловлен оптическими свойствами, связанными с так называемой фазой Берри, определяющей поляризационное состояние электромагнитной волны в световодах с нетривиальной формой. Во время распространения поляризация электромагнитной волны определяется двумя механизмами, во-первых, обычным динамическим фазовым сдвигом, связанным с прохождением оптического пути, и, во-вторых, дополнительным фазовым множителем, который независим от длины оптического пути, а имеет геометрическую природу. Этот дополнительный фазовый сдвиг, впервые описанный Панчаратнамом в 1956 г. [3] и обобщенный Берри

в 1984 г. [4,5], называют фазой Панчаратнама–Берри или просто фазой Берри. Оказалось, что эту экзотическую добавку к обычному фазовому набегу можно наблюдать экспериментально и изучать теоретически в оптике [6–8], акустике [9], различных твердотельных системах [10,11], в космологии [12].

Возвращаясь к основной теме нашей статьи, отметим, что в литературе была проанализирована взаимосвязь между геометрией и физическими свойствами нано- и микроскопических структур ленты Мёбиуса [1,13–17]. В частности, наблюдались специфические электронные состояния, определяющие ароматичность Мёбиуса [18] и свойства скрученных полупроводниковых лент [19], аномальные плазмонные моды, образующиеся в металлическихnanoструктурах Мёбиуса [20], и было экспериментально изучено поведение фазы Берри при изменении толщины ленты Мёбиуса от плоской прямоугольной до квадратной [8].

В настоящей работе мы экспериментально и теоретически исследуем резонансные оптические свойства диэлектрических резонаторов Мёбиуса с одним и двумя твистами в сравнении со свойствами плоского диэлектрического кольца той же толщины, ширины и длины вдоль средней линии структур. Фотонные свойства плоских диэлектрических колец ранее нами были детально исследованы в ряде работ [21–25]. В частности, в спектрах рассеяния диэлектрических колец мы наблюдали исключительные точки [23] и резонансы Фано [21,25], обнаружили каскады связанных состояний



**Рис. 1.** Фотография трех экспериментальных образцов. Слева — плоский кольцевой резонатор, в середине — резонатор Мёбиуса с одним твистом, справа — резонатор Мёбиуса с двумя твистами. Для наглядности размеров приведена сантиметровая линейка.

в континууме [24]. Нетривиальное поведение фотонных резонансов наблюдалось при переходе с изменением топологии резонатора от замкнутого диэлектрического кольца к разомкнутому кольцу [26].

На основе детальной информации о фотонных свойствах плоских диэлектрических колец в настоящей работе мы интерпретировали наблюдаемые эффекты в спектрах рассеяния диэлектрических резонаторов Мёбиуса с одним и двумя твистами. Несколько нам известно из литературы, спектры рассеяния резонатора Мёбиуса с двумя твистами ранее не исследовались.

## 2. Методика расчетов, создания образцов и экспериментальных исследований

Целью настоящей работы является исследование трансформации фотонных мод в диэлектрическом резонаторе Мёбиуса при изменении количества твистов. Как известно, уравнения Максвелла обладают свойством масштабируемости для сред без дисперсии диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и магнитной восприимчивости  $\mu$ , поэтому наши результаты справедливы для любого спектрального диапазона, как оптического, так и микроволнового. Поэтому экстинкция и рассеяние электромагнитных волн частицей произвольной формы определяется только соотношением ее характерных размеров и длины волны падающего излучения, а также значениями  $\epsilon$  и  $\mu$  при данной длине волны. В качестве диэлектрической проницаемости использовалось параметры исследованных в работе образцов, типичные для оптического диапазона, а именно  $\epsilon = 8.23$  и материальные потери  $\text{tg } \delta = 1.1 \text{ e}^{-3}$  [27]. Результаты анализа представлены в зависимости от безразмерной приведенной частоты, нормированной на характерный размер структуры, определяемой как  $x = 2R_{\text{out}}/\lambda$ , где

$\lambda$  — длина падающей волны, а  $R_{\text{out}}$  — внешний радиус структуры.

Для изготовления образцов кольцевого резонатора и резонаторов Мёбиуса с одним и двумя твистами использовалась пластиковая нить „ZetaMix epsilon 10 filament“, представляющая собой ABS-матрицу с содержанием 80% диоксида титана. Печать осуществлялась в Университете ИТМО (С.-Петербург) на 3D-принтере FlyingBear Reborn 2, в основе работы которого лежит принцип послойного создания трехмерного объекта по заданной программе. Из-за хрупкости материала, обусловленной высоким содержанием диоксида титана, катушка с пластиком была подвешена на высоте одного метра над 3D-принтером. Режим печати: температура сопла около 280 °C, температура нагревательной платформы 110 °C. Согласно рекомендациям производителя пластиковой нити [27], для первого слоя скорость наложения материала составляла 2.5 mm/s и 15 mm/s для последующих. В результате были напечатаны три резонатора: кольцевой резонатор и два резонатора Мёбиуса с одним и двумя твистами, рис. 1, на печать которых потребовалось 6, 13 и 18 h соответственно. Увеличение времени печати объясняется необходимостью печати дополнительных поддерживающих структур при более сложной геометрии резонатора. Все резонаторы имеют постоянное поперечное сечение. Геометрия резонаторов моделировалась путем вращения прямоугольного сечения шириной  $W = 20 \text{ mm}$  и высотой  $h = 4 \text{ mm}$  вдоль окружности радиусом  $R_{\text{central}} = 40 \text{ mm}$ , что соответствует отношению внутреннего радиуса к внешнему  $R_{\text{in}}/R_{\text{out}} = 0.6$ . Размеры были выбраны таким образом, чтобы продольные моды резонаторов попадали в область частот от 4 до 8 GHz, что соответствует параметру  $2R_{\text{out}}/\lambda$  от 1.40 до 2.56.

Выбранный диапазон частот позволил провести измерения сечения экстинкции с использованием оптической теоремы в безэховой камере Университета

ИТМО [21,22] методом микрометровой микроскопии. Измерения проводились с помощью двухпортового векторного анализатора цепей российского производства (Planar S5085), к которому были подключены две рупорные антенны (TRIM 0.75–18 GHz), формирующие квази-плоскую волну, установленные на расстоянии трех метров друг от друга. Диапазон частот от 1 до 8.5 GHz сканировался с использованием 16001 частотной точки. Измерения параметра  $S_{21}$  матрицы рассеяния проводились дважды: сначала в свободном пространстве  $S_{21}^b$ , а затем с размещенным между антеннами образцом  $S_{21}^s$ . Согласно оптической теореме, мнимая часть амплитуды прямого рассеяния пропорциональна эффективной площади рассеяния. Таким образом, сечение экстинкции вычислялось по формуле

$$\sigma_{\text{ext}}(\omega) = \frac{4\pi}{k} \text{Im} \left( \frac{S_{21}^s}{S_{21}^b} \right) L, \quad (1)$$

где  $L$  — расстояние от образца до приемной антенны, которое составляло 1.5 м, а  $k$  — волновой вектор падающей волны. Полученные значения сечений экстинкции как в расчетах, так и в эксперименте были нормированы на геометрическую тень резонатора, определяемую как  $S = 2R_{\text{out}}/h$ .

Для расчетов была использована программа COMSOL Multiphysics, которая позволяет с помощью оптического модуля находить собственные значения (резонансные частоты) и собственные функции (распределения электромагнитного поля), а также рассчитать сечение экстинкции [24,25]. В трехмерных плоских кольцевых резонаторах собственные функции могут быть условно охарактеризованы азимутальным ( $m$ ) и двумя поперечными индексами мод вдоль ширины ( $r$ ) и высоты ( $z$ ) поперечного сечения, образующими упорядоченную тройку ( $m, r, z$ ). Для расчета собственных значений и собственных функций в COMSOL использовался режим „Собственная частота“, при этом резонатор был окружен идеально согласованным слоем, а падающая волна отсутствовала. Для расчета сечения экстинкции использовался режим „Частотная область“, в котором плоская волна (геометрия возбуждения показана тройкой векторов  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  на рис. 2) меняется на каждой частоте.

### 3. Результаты и обсуждение

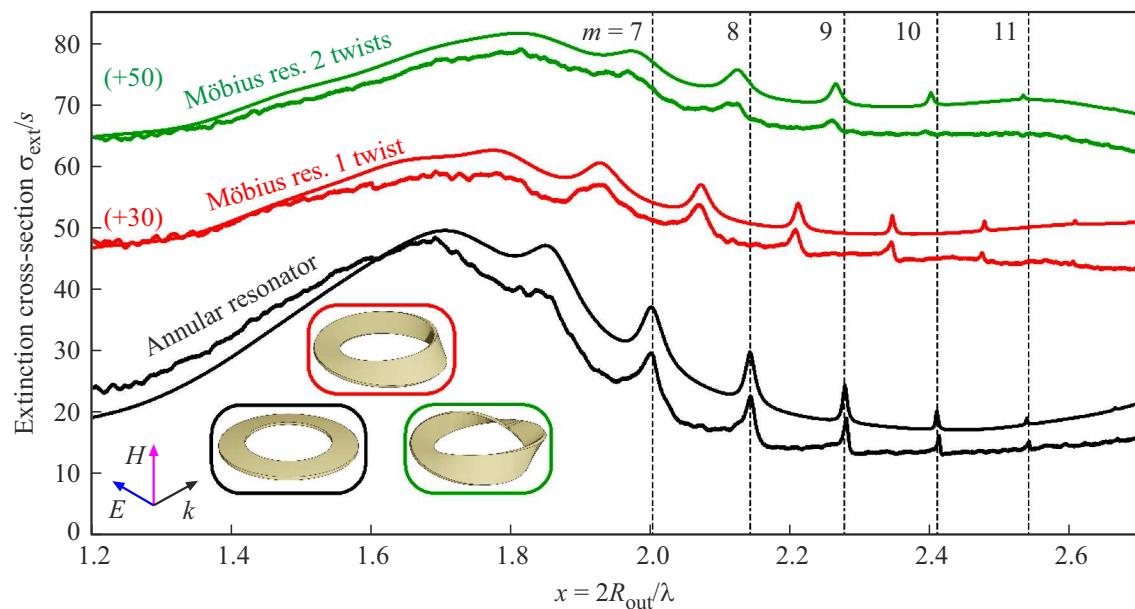
Низкочастотный фотонный спектр плоского диэлектрического кольца с прямоугольным поперечным сечением существенно отличается от хорошо известного спектра мод шепчущей галереи [28], относящейся к диэлектрическим резонаторам в форме диска. Моды шепчущей галереи возникают внутри диска за счет полных внутренних отражений от боковой стенки при выполнении фазового условия после обхода всего резонатора, тогда как в кольцевом резонаторе из-за наличия внутренней стенки полное внутреннее отраже-

ние происходит на обеих поверхностях [29,30]. Таким образом, низкочастотный фотонный спектр диэлектрического кольца с прямоугольным поперечным сечением состоит из ряда галерей, каждая из которых начинается с широкого резонанса Фабри–Перо между противоположными стенками: между парой боковых стенок возникают радиальные резонансы Фабри–Перо (индекс  $r$ ), между верхней и нижней стенкой возникают аксиальные резонансы Фабри–Перо (индекс  $z$ ) [21,22]. Каждая галерея продолжается эквидистантной последовательностью продольных резонансов (азимутальный индекс  $m$ ) с экспоненциально возрастающей добротностью.

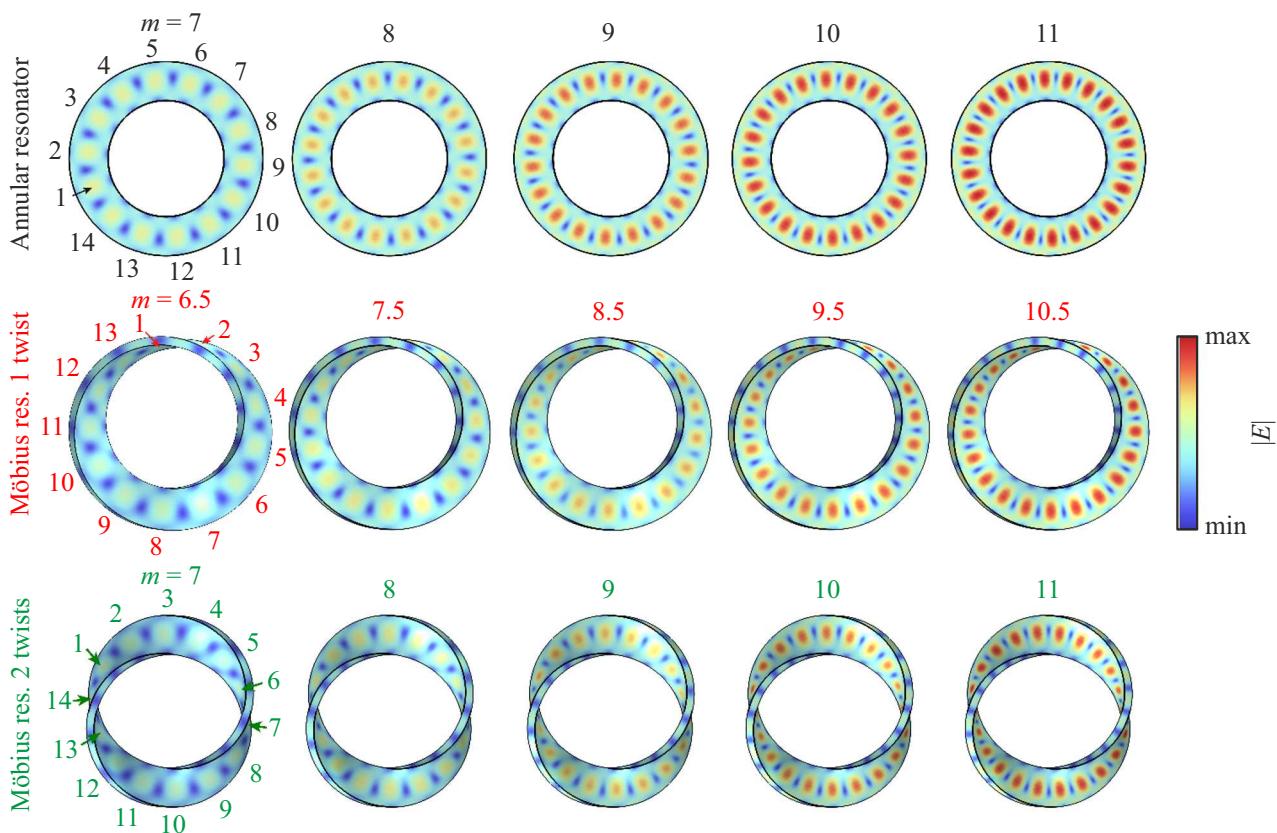
В настоящей работе мы изучаем три диэлектрических резонатора (плоское кольцо и два Мёбиуса), все с прямоугольным сечением, у которого ширина больше высоты ( $20 \times 4 \text{ mm}^2$ ), в этом случае первая фотонная галерея начинается с резонанса Фабри–Перо вдоль ширины с индексами ( $r = 1, z = 0$ ), рис. 2 [21]. Как видно из рисунка, добротность азимутальных резонансов соответствующей галереи экспоненциально растет при  $m > 6$ , тогда как более младшие моды образуют широкий низкочастотный горб в спектре экстинкции [21]. Для мод с азимутальным индексом  $m > 11$  радиационная добротность мод превышает материальную, из-за чего интенсивность резонансов уменьшается, и соответствующие линии становятся неразличимы ни в эксперименте, ни в численных расчетах.

Азимутальные индексы  $m$  присвоены резонансам на основании расчета фотонных мод (собственных векторов), рис. 3.

Наибольший интерес представляет относительное спектральное положение азимутальных мод в спектрах резонатора Мёбиуса с одним и двумя твистами по отношению к модам плоского кольца. Как видно из рис. 2, все азимутальные моды Мёбиуса с одним твистом смешены ровно на полпериода относительно эквидистантной последовательности азимутальных мод плоского кольца. Этот эффект экспериментально наблюдался ранее и обусловлен фазой Берри [3–5], величина которой меняется от 0 до  $\pi$  в зависимости от соотношения ширины и высоты в поперечном сечении резонатора Мёбиуса с одним твистом [8]. Качественно объяснение сводится к следующему: в тонком (ширина  $\gg$  высоты) резонаторе при распространении линейно поляризованной волны вектор  $\mathbf{E}$  ориентирован строго вдоль длинной стенки и при скручивании резонатора вращается в пространстве вместе с самим резонатором. В случае одного твиста, т. е. поворота на  $180^\circ$ , после прохождения всего пути в конце вектор  $\mathbf{E}$  также развернут на  $180^\circ$  по отношению к начальной ориентации, что соответствует дополнительной геометрической фазе  $\pi$ . Это значит, что мода, которая является резонансной в плоском кольце с длиной волны  $L_{\text{ring}} = m\lambda_{\text{Ring}}$  и определяется только динамическим фазовым набегом по кольцу  $2\pi m$ , не будет резонансной в резонаторе Мёбиуса из-за дополнительной геометрической фазы Берри  $\pi$ . Соответственно, резонансные моды в тонком резонаторе



**Рис. 2.** Экспериментальные спектры рассеяния света (спектры с незначительным шумом) и расчетные спектры рассеяния (плавные кривые) для плоского кольцевого резонатора (черные), резонатора Мёбиуса с одним твистом (красные) и двумя твистами (зеленые) в области первой фотонной галереи ( $r = 1, z = 0$ ). Фотографии образцов помещены в рамки, совпадающие по цвету со спектрами рассеяния. Спектры смещены по вертикали на указанные величины. В верху рисунка приведена индексация продольных азимутальных мод плоского кольца (1, 0,  $m$ ). Безразмерная частота  $x = 2R_{\text{out}}/\lambda$ .



**Рис. 3.** Распределения модуля электрического поля собственных мод для плоского кольцевого резонатора (верхний ряд), резонатора Мёбиуса с одним твистом (средний ряд) и двумя твистами (нижний ряд) в области первой фотонной галереи.

Мёбиуса будут определяться суммарным динамическим и геометрическим фазовым условием  $kL + \pi = 2\pi m$  ( $k$  — волновое число), а все резонансные частоты будут сдвинуты на половину по отношению к плоскому кольцу  $L = \lambda(m - 1/2)$  [8].

Оригинальным экспериментальным результатом настоящей работы является демонстрация спектра рассеяния резонатора Мёбиуса с двумя твистами (зеленые спектры на рис. 2). Следуя описанному алгоритму, мы заключаем, что фотонная мода, имеющая в плоском кольце азимутальный индекс  $m$ , в процессе полного обхода резонатора Мёбиуса с двумя твистами дважды меняет направление вектора  $\mathbf{E}$  на  $180^\circ$ , то есть приходит к началу пути в фазе. Этот эффект соответствует геометрической фазе Берри  $2\pi$ . Поэтому на рис. 2 моды Мёбиуса с двумя твистами (зеленые спектры) по частотам близки к модам плоского кольца (черные спектры). Одной из причин незначительного сдвига между модами плоского кольца и Мёбиуса с двумя твистами связана с малой диэлектрической проницаемостью, которая в свою очередь влияет на добротность резонансов. На рис. 2 видно, что при возрастании азимутального индекса  $m$  и соответственно ростом добротности моды [21], частотный сдвиг уменьшается.

Отметим, что форма линии продольных мод в расчетных спектрах близка к контуру Лоренца, хотя в общем случае экстинкции рассеяния отражает интерференцию Фано между падающей и рассеянной волной [31,32]. Как отмечалось ранее [33], в ряде случаев резонансные линии могут практически совпадать по форме контура с контуром Лоренца, соответствующим случаю резонанса Фано с параметром асимметрии  $q \rightarrow \infty$ .

## 4. Заключение

Резонатор Мёбиуса предоставляет широкие возможности для манипуляции поведением различных частиц, таких как электроны, поляритоны и фотоны [8]. При распространении электромагнитной волны в плоском ( $R_{\text{out}} - R_{\text{in}} \gg h$ ) диэлектрическом резонаторе Мёбиуса появляется дополнительная геометрическая фаза Берри, которая суммируется с обычной динамической фазой, зависящей только от длины резонатора. В результате, при нечетном числе твистов, начиная с единицы, появление фазы Берри  $N\pi$ , где  $N$  — нечетное целое число, приводит к сдвигу резонансных условий для замкнутого обхода на пол длины волны. При этом следует подчеркнуть, что с увеличением  $N$  не происходит эффекта „накопления“, т. е. для любого нечетного  $N$  длина волны уменьшается только наполовину. В то же время для любого резонатора Мёбиуса с четным числом твистов  $2N$  фаза Берри, равная  $2N\pi$ , не приводит к изменению резонансного фазового условия и резонансная длина продольной волны остается неизменной.

Интересно провести аналогию с фотонными эффектами, которые наблюдаются при другом переходе между

двумя структурами с разной топологией, а именно, между диэлектрическим плоским кольцом и плоским расщепленным кольцом [26]. При таком переходе каждая пара дважды вырожденных азимутальных мод кольца (распространение по часовой и против часовой стрелки) расщепляется на „обыкновенные“ и „топологические“ моды. У „обыкновенных“ мод азимутальный индекс  $m$  не меняется, а у топологических мод изменяется, но в отличие от случая с резонатором Мёбиуса не уменьшается, а увеличивается на половину ( $m + 1/2$ ).

## Финансирование работы

Авторы благодарят поддержку гранта РНФ № 23-12-00114.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] S. Tanda, T. Tsuneta, Y. Okajima, K. Inagaki, K. Yamaya, N. Hatakenaka. *Nature* **417**, 6887, 397 (2002).
- [2] E.L. Starostin, G.H.M. Van der Heijden. *Nature Mater.* **6**, 8, 563 (2007).
- [3] S. Pancharatnam. *Proc. Indian Acad. Sci.* **44**, 5, 247 (1956).
- [4] M.V. Berry. *Proceed. R. Soc. Lond. A* **392**, 1802, 45 (1984).
- [5] M.V. Berry. *Nature* **326**, 6110, 277 (1987).
- [6] H.P. Breuer, K. Dietz, M. Holthaus. *Phys. Rev. A* **47**, 1, 725 (1993).
- [7] Y.Q. Cai, G. Papini, W.R. Wood, S.R. Valluri. *Quantum Optics* **1**, 1, 49 (1989).
- [8] J. Wang, S. Valligatla, Y. Yin, L. Schwarz, M. Medina-Sánchez, S. Baunack, C.H. Lee, R. Thomale, S. Li, V.M. Fomin, L. Ma, O.G. Schmidt. *Nature Photon.* **17**, 1, 120 (2022).
- [9] M. Xiao, G. Ma, Z. Yang, P. Sheng, Z.Q. Zhang, C.T. Chan. *Nature Phys.* **11**, 3, 240 (2015).
- [10] J. Wang, S.-C. Zhang. *Nature Mater.* **16**, 11, 1062 (2017).
- [11] Y. Zhang, Y.-W. Tan, H.L. Stormer, P. Kim. *Nature* **438**, 7065, 201 (2005).
- [12] D.P. Datta. *Phys. Rev. D* **48**, 12, 5746 (1993).
- [13] S. Tanda, T. Tsuneta, T. Toshima, T. Matsuura, M. Tsubota. *J. Physique IV* **131**, 289 (2005).
- [14] J. Gravesen, M. Willatzen. *Phys. Rev. A* **72**, 3, 032108 (2005).
- [15] Z. Li, L.R. Ram-Mohan. *Phys. Rev. B* **85**, 19, 195438 (2012).
- [16] N. Nishiguchi, M.N. Wybourne. *J. Phys. Commun.* **2**, 8, 085002 (2018).
- [17] S.O. Demokritov, A.A. Serga, V.E. Demidov, B. Hillebrands, M.P. Kostylev, B.A. Kalinikos. *Nature* **426**, 6963, 159 (2003).
- [18] H.S. Rzepa. *Chem. Rev.* **105**, 10, 3697 (2005).
- [19] V.M. Fomin, S. Kiravittaya, O.G. Schmidt. *Phys. Rev. B* **86**, 19, 195421 (2012).
- [20] Y. Yin, S. Li, V. Engemaier, E.S.G. Naz, S. Giudicatti, L. Ma, O.G. Schmidt. *Laser Photon. Rev.* **11**, 2, 1600219 (2017).
- [21] N. Solodovchenko, M. Sidorenko, T. Seidov, I. Popov, E. Nenasheva, K. Samusev, M. Limonov. *Mater. Today* **60**, 69 (2022).
- [22] A.P. Chetverikova, M.F. Limonov, M.S. Sidorenko, K.B. Samusev, N.S. Solodovchenko. *PNFA* **57**, 101185 (2023).

- [23] N. Solodovchenko, K. Samusev, M. Limonov. Phys. Rev. B **109**, 7, 075131 (2024).
- [24] N. Solodovchenko, M. Bochkarev, K. Samusev, M. Limonov. Nanophoton. **14**, 18, 3043 (2025).
- [25] M. Bochkarev, N. Solodovchenko, G. Chekmarev, A. Ermina, K. Samusev, M. Limonov. Phys. Rev. B **112**, 8, L081102 (2025).
- [26] M. Bochkarev, N. Solodovchenko, K. Samusev, M. Limonov. Mater. Today **80**, 179 (2024).
- [27] <https://zetamix.fr/produit/filament-epsilon/>. Access: Oct. 26, 2025.
- [28] G.C. Righini, Y. Dumeige, P. Feron, M. Ferrari, G. Nunzi Conti, D. Ristic, S. Soria. La Rivista del Nuovo Cimento **34**, 7, 435 (2011).
- [29] M.L.M. Balistreri, D.J.W. Klunder, F.C. Blom, A. Driessens, J.P. Korterik, L. Kuipers, N.F. van Hulst. J. Optical Soc. Am. B **18**, 4, 465 (2001).
- [30] D.A. Baranov, K.B. Samusev, I.I. Shishkin, A.K. Samusev, P.A. Belov, A.A. Bogdanov. Optics Lett. **41**, 4, 749 (2016).
- [31] M.F. Limonov, M.V. Rybin, A.N. Poddubny, Y.S. Kivshar. Nature Photon. **11**, 9, 543 (2017).
- [32] M.F. Limonov. Adv. Opt. Photon. **13**, 3, 703 (2021).
- [33] M.I. Tribelsky, A.E. Miroshnichenko. Phys. Rev. A **93**, 5, 053837 (2016).

Редактор Е.В. Толстякова