

03,10

## Роль межчастичных столкновений в транспортных свойствах двухкомпонентных двумерных электронных систем с параболическим спектром

© Е.Е. Колотаева<sup>1</sup>, М.В. Боев<sup>1,2,¶</sup>

<sup>1</sup> Новосибирский государственный технический университет,  
Новосибирск, Россия

<sup>2</sup> Институт физики полупроводников им. А.В. Ржанова СО РАН,  
Новосибирск, Россия

¶ boevm@isp.nsc.ru

Поступила в Редакцию 17 сентября 2025 г.  
В окончательной редакции 29 октября 2025 г.  
Принята к публикации 29 октября 2025 г.

Теоретически исследован вклад кулоновского межэлектронного взаимодействия в проводимость двумерной системы электронов с двумя различными эффективными массами. Показано, что в отличие от процессов рассеяния на примесях, в которых различие эффективных масс проявляется слабо, поправка к проводимости со стороны электрон-электронного рассеяния оказывается крайне чувствительной к параметрам наноструктуры. При значительном различии эффективных масс электронов низкотемпературная асимптотика вклада электрон-электронного взаимодействия в проводимость имеет вид  $\propto T^2 \ln T$ , при этом знак данного вклада определяется положением уровня Ферми и характеристиками беспорядка в системе.

**Ключевые слова:** электрон-электронное рассеяние, двумерная электронная система, проводимость.

DOI: 10.61011/FTT.2025.10.61964.256-25

### 1. Введение

В физике полупроводников и твердотельных наноструктур распространены системы, в которых проводимость обеспечивается несколькими типами носителей заряда. Включение дополнительных каналов рассеяния между частицами разного типа кардинально меняет характер экспериментального проявления внутренних взаимодействий в системе. Например, в структурах с параболическим электронным спектром кулоновское взаимодействие между электронами не дает вклада в проводимость по причине сохранения полного импульса электронного газа и, как следствие, его дрейфовой скорости. Однако в многозонных структурах инвариантность системы относительно преобразований Галилея оказывается нарушенной, вследствие чего роль электрон-электронного взаимодействия в отклике системы на внешние возмущения становится существенной. Различные аспекты транспортных явлений в системах, содержащих носители электрического заряда разных типов, изучаются в течение уже многих лет. В частности, ряд работ посвящен исследованию роли электронно-дырочного рассеяния в полуметаллах [1–6], а в работе [7] теоретически и экспериментально анализировалось рассеяние дырок спин-расщепленных подзон в гетероструктурах на основе GaAs. Различие эффективных масс электронов особенно ярко начинает проявлять себя под воздействием высокочастотного электромагнитного поля большой интенсивности. В условиях засветки циркулярно поляризованным полем электроны

с различными эффективными массами образуют связанные состояния [8]. Как следствие, в системе формируется экзотическая смесь газов, подчиняющихся статистике Бозе-Эйнштейна и Ферми-Дирака, с уникальными свойствами [9].

Галилеевская инвариантность оказывается нарушенной в любой системе, в которой связь кинетической энергии частиц с импульсом не является квадратичной, что часто характерно для квазичастиц в кристаллических структурах. Так, в работах [10,11] изучено влияние на проводимость специфической геометрии поверхностей Ферми, а недавно было исследовано взаимодействие частиц в системах с дираковским типом энергетического спектра электронов [12,13]. Кроме того, существует условие, при котором электрон-электронное взаимодействие дает вклад в проводимость даже в однокомпонентных электронных системах с параболическим спектром, а именно, зависимость времени релаксации электронов на дефектах кристаллической решетки и примесных центрах от импульса (или энергии) [14]. Как правило, при описании двухкомпонентных систем ограничиваются использованием постоянных времен релаксации электронов на примесном беспорядке, однако, предпринимаются и более точные подходы, включающие в рассмотрение экранированные кулоновские примеси [15]. Встает интересный вопрос, поиску ответа на который и посвящена данная работа: какими свойствами обладает система, удовлетворяющая двум условиям ненулевого вклада межэлектронного рассеяния в проводимость: наличие двух типов электронов с

параболическим энергетическим спектром и зависимое от энергии время их релаксации. При этом, чтобы получить максимально возможный эффект от сочетания этих условий, мы будем полагать экранировку потенциала кулоновских примесей и электрон-электронного взаимодействия полностью подавленной. Обсуждение следствий учета экранировки приведено в конце статьи.

## 2. Модель

Рассмотрим двумерный вырожденный газ электронов с разными эффективными массами и параболическим энергетическим спектром (рис. 1):

$$\varepsilon_{\mathbf{p}}^i = \frac{p^2}{2m_i} \quad (1)$$

где  $m_i$  — эффективная масса  $i$ -го электрона, а индекс  $i = (a, b)$  различает электроны с разными эффективными массами. Для определенности будем считать  $m_a < m_b$ . В природе такой тип энергетического спектра реализуется, например, в валентных зонах графана [16] и арсенида галлия [15].

В данной работе нас интересует статическая проводимость  $\sigma$  двухкомпонентной системы, определяемая как коэффициент пропорциональности между плотностью электрического тока и напряженностью электрического поля в законе Ома:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{j} = \mathbf{j}_a + \mathbf{j}_b$  — плотность суммарного электрического тока,  $\mathbf{E}$  — напряженность тянувшего электрического поля. С микроскопической точки зрения, плотность электрического тока в двумерной системе по определению записывается в виде:

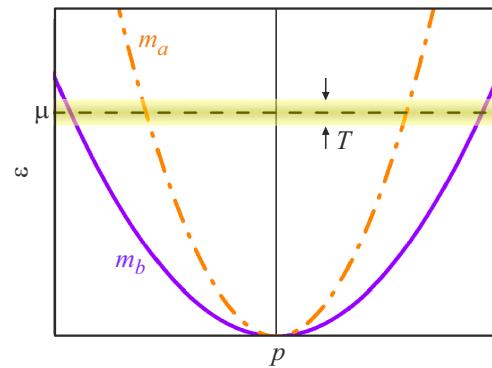
$$\mathbf{j} = 2e \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^2} \sum_i \mathbf{v}_{\mathbf{p}}^i n_{\mathbf{p}}^i, \quad (3)$$

где  $n_{\mathbf{p}}^i$  — неравновесная функция распределения электронов,  $\mathbf{v}_{\mathbf{p}}^i$  — скорость электронов,  $e$  — заряд электрона (здесь и далее по тексту статьи мы полагаем  $\hbar = k_B = 1$ ,  $\hbar$  и  $k_B$  — постоянные Планка и Больцмана соответственно). Из сравнения выражений (2) и (3) будет получено искомое выражение для проводимости.

Как видно из выражения (3), задача сводится к нахождению неравновесных функций распределения  $n_{\mathbf{p}}^i$  в каждой зоне. В рамках квазиклассического приближения данные функции удовлетворяют системе кинетических уравнений Больцмана:

$$e\mathbf{E} \frac{\partial n_{\mathbf{p}}^i}{\partial \mathbf{p}} = \sum_{j=(a,b)} (I_{ij}^{\delta} \{n_{\mathbf{p}}^i\} + I_{ij}^c \{n_{\mathbf{p}}^i\} + Q_{ij} \{n_{\mathbf{p}}^i\}), \quad (4)$$

где символами  $I_{ij}^{\delta}$  и  $I_{ij}^c$  обозначены интегралы столкновений электронов с короткодействующими дефектами и



**Рис. 1.** Энергетический спектр двумерной системы, содержащей электроны с различающимися массами  $m_a$  (штрих-пунктирная кривая) и  $m_b$  (сплошная кривая). Горизонтальной пунктирной линией обозначен уровень Ферми,  $\mu$ .

кулоновскими примесями, соответственно, а  $Q_{ij}$  характеризуют рассеяние электронов друг на друге. Матричная структура интегралов столкновений связана с необходимостью учета как внутризонного, так и межзонного рассеяния электронов. Поиск решения системы уравнений (4) будем проводить методом последовательных приближений. В рамках этого подхода предполагается, что неравновесные поправки слабо меняют фермьевское распределение электронов по состояниям в обеих зонах:

$$n_{\mathbf{p}}^i \approx n_F(\xi_{\mathbf{p}}) + f_{\mathbf{p}}^i + \delta f_{\mathbf{p}}^i, \quad (5)$$

$$\delta f_{\mathbf{p}}^i \ll f_{\mathbf{p}}^i \ll n_F(\xi_{\mathbf{p}}), \quad (6)$$

где  $n_F(\xi_{\mathbf{p}}) = (e^{\xi_{\mathbf{p}}/T} + 1)^{-1}$  — распределение Ферми-Дирака,  $\xi_{\mathbf{p}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \mu$  — энергия электрона, отсчитываемая от уровня Ферми  $\mu$ . В настоящей работе мы ограничимся диапазоном достаточно низких температур, в котором процессы рассеяния электронов на примесях и дефектах кристаллической решетки вносят основной вклад в удельное сопротивление системы. Соответственно, в выражении (5) слагаемое  $f_{\mathbf{p}}^i$  обусловлено примесным рассеянием электронов, а  $\delta f_{\mathbf{p}}^i \ll f_{\mathbf{p}}^i$  — электрон-электронным взаимодействием. Согласно предположению (6), между интегралами столкновений справедливы отношения  $I\{f\} \gg Q\{f\}$  и  $I\{\delta f\} \sim Q\{f\}$ , которые позволяют решать систему уравнений (4) в два этапа. На первом этапе из уравнений

$$\frac{e\mathbf{E}\mathbf{p}}{m_i} \frac{\partial n_F(\xi_{\mathbf{p}}^i)}{\partial \xi_{\mathbf{p}}^i} = \sum_{j=(a,b)} (I_{ij}^{\delta} \{f_{\mathbf{p}}\} + I_{ij}^c \{f_{\mathbf{p}}\}), \quad (7)$$

определяются функции  $f_{\mathbf{p}}^i$ . Затем уже известные неравновесные поправки  $f_{\mathbf{p}}^i$  подставляются в систему уравнений:

$$\sum_{j=(a,b)} (I_{ij}^{\delta} \{\delta f_{\mathbf{p}}\} + I_{ij}^c \{\delta f_{\mathbf{p}}\} + Q_{ij} \{f_{\mathbf{p}}\}) = 0, \quad (8)$$

решением которой выступают функции  $\delta f_{\mathbf{p}}^i$ .

## 2.1. Примесный вклад в проводимость

В уравнениях (7) интегралы столкновений электронов с примесями имеют стандартный вид:

$$I_{ij}^{\delta,c}\{f_{\mathbf{p}}\} = \frac{N_{\delta,c}}{2\pi} \int d\mathbf{q} |V_{\mathbf{q}}^{\delta,c}|^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{p}}^i - \epsilon_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^j)(f_{\mathbf{q}+\mathbf{p}}^j - f_{\mathbf{p}}^i), \quad (9)$$

где  $N_{\delta}$  и  $N_c$  — концентрации короткодействующих дефектов и кулоновских примесей,  $V_{\mathbf{q}}^{\delta} = V^{\delta} = \text{const}$  и  $V_{\mathbf{q}}^c = 2\pi e^2/\epsilon q$  — фурье-образы соответствующих потенциалов,  $\epsilon$  — диэлектрическая проницаемость окружающей среды.

Будем искать решение системы уравнений (7) в виде:

$$f_{\mathbf{p}}^i = -\frac{e\mathbf{E}\mathbf{p}}{m_i} \frac{\partial n_F(\xi_{\mathbf{p}}^i)}{\partial \xi_{\mathbf{p}}^i} \phi^i(p), \quad (10)$$

где неизвестные функции  $\phi^i(p)$  полагаются не зависящими от ориентации вектора импульса  $\mathbf{p}$ . Подставляя (10) в (9) и производя в (9) интегрирование по импульсу  $\mathbf{q}$ , получаем

$$\sum_j I_{ij}^{\delta}\{f_{\mathbf{p}}\} = \frac{e\mathbf{E}\mathbf{p}}{m_i} \frac{\partial n_F}{\partial \xi_{\mathbf{p}}^i} \frac{\phi^i(p)}{\tau}, \quad (11)$$

$$I_{ii}^c\{f_{\mathbf{p}}\} = \frac{e\mathbf{E}\mathbf{p}}{m_i} \frac{\partial n_F}{\partial \xi_{\mathbf{p}}^i} \frac{\phi^i(p)}{\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a}}, \quad (12)$$

$$I_{ab}^c\{f_{\mathbf{p}}\} = \frac{e\mathbf{E}\mathbf{p}}{m_a} \frac{\partial n_F}{\partial \xi_{\mathbf{p}}^a} \frac{2\tilde{m}}{\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a}} \left[ \frac{\phi^a(p)}{m_a} - \frac{\phi^b(\sqrt{m_b/m_a}p)}{m_b} \right], \quad (13)$$

$$I_{ba}^c\{f_{\mathbf{p}}\} = \frac{e\mathbf{E}\mathbf{p}}{m_b} \frac{\partial n_F}{\partial \xi_{\mathbf{p}}^b} \frac{2\tilde{m}}{m_b \tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a}} \left[ \phi^b(p) - \phi^a(\sqrt{m_a/m_b}p) \right], \quad (14)$$

где  $1/\tilde{m} = 1/m_a - 1/m_b$ ,  $1/\tau = N_{\delta}V_{\delta}^2(m_a + m_b)$  — время релаксации электронов на короткодействующих дефектах,  $1/\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a} = (\pi e^2/\epsilon)^2 N_c / \epsilon_{\mathbf{p}}^a$  — время релаксации электронов на кулоновских примесях. Используя далее в уравнениях (7) явные выражения для примесных интегралов столкновений (11)–(14), приходим к алгебраической системе уравнений на функции  $\phi$ :

$$\hat{M} \begin{pmatrix} \phi^a(p) \\ \phi^b(p') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a}} \frac{3m_b - m_a}{m_b - m_a} & -\frac{1}{\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a}} \frac{2m_a}{m_b - m_a} \\ -\frac{1}{\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a}} \frac{2m_a}{m_b - m_a} & \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a}} \frac{m_b + m_a}{m_b - m_a} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где  $p' = \sqrt{m_b/m_a}p$ . В условиях низкой температуры,  $T \ll \mu$ , электронный газ является вырожденным, что позволяет, пренебрегая членами  $\sim T/\mu \ll 1$ , считать время релаксации на кулоновских примесях функцией

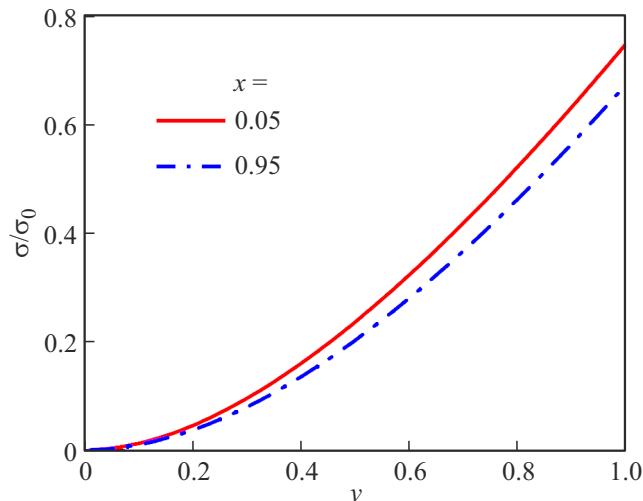


Рис. 2. Зависимость примесного вклада в проводимость двухкомпонентной системы (18) от энергии Ферми,  $y = \mu/\mu_0$ , при двух различных отношениях эффективных масс электронов,  $x = m_a/m_b$ .

энергии Ферми,  $\tau_{\epsilon_{\mathbf{p}}^a} \approx \tau_{\mu}$ . Введем для краткости безразмерные величины:  $\tilde{\phi} = \phi/\tau$ ,  $x = m_a/m_b$  и  $y = \tau_{\mu}/\tau$ . Тогда решение системы уравнений (15) принимает вид:

$$\tilde{\phi}^{a,b}(x, y) = \frac{y(1-x)[(y \mp 1)(1-x) + 2(1+x)]}{[(y+1)(1-x)+2][(y-1)(1-x)+2]-4x^2}, \quad (17)$$

где знаки „-“ и „+“ в числителе относятся к зонам  $a$  и  $b$ , соответственно. Собирая вместе выражения (3), (10) и (17), запишем ответ для примесного вклада в проводимость двухкомпонентной системы:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{\mu}{\mu_0} \left[ \tilde{\phi}^a \left( \frac{m_a}{m_b}, \frac{\mu}{\mu_0} \right) + \tilde{\phi}^b \left( \frac{m_a}{m_b}, \frac{\mu}{\mu_0} \right) \right], \quad (18)$$

где  $\sigma_0 = e^2 \tau \mu_0 / \pi$ , а  $\mu_0$  — это значение энергии Ферми, при котором времена рассеяния электронов на двух типах примесных центров,  $\tau$  и  $\tau_{\mu}$ , совпадают, то есть  $\mu = y\mu_0$ .

В выражении (18) нас прежде всего интересует зависимость проводимости от энергии Ферми, так как именно этот параметр можно контролировать изменять в эксперименте (рис. 2). Из анализа выражения (18) в предельных случаях следует, что с точки зрения отклика на электрическое поле, двухкомпонентный двумерный электронный газ практически не отличается от систем с двумерным газом электронов одной массы. Действительно, проводимости как одно-, так и двухкомпонентного электронных газов (18) ведут себя похожим образом в зависимости от положения уровня Ферми: в области  $\mu \ll \mu_0$  основную роль играют кулоновские примеси и  $\sigma \propto \mu^2$ ; в обратном предельном случае,  $\mu \gg \mu_0$ , доминирует короткодействующий беспорядок и  $\sigma \propto \mu$ . Как видно из рис. 2, отношение эффективных масс электронов в двух зонах оказывает слабое влияние на величину

примесного вклада в проводимость системы. При фиксированном значении  $m_a + m_b$  максимальное различие достигается при доминировании процессов рассеяния на кулоновских центрах,  $1/\tau_\mu \gg 1/\tau$ , и не превышает одной трети:  $\sigma(m_a \ll m_b)/\sigma(m_a = m_b) < 4/3$ . В обратном предельном случае,  $1/\tau_\mu \ll 1/\tau$ , различие эффективных масс электронов вовсе не сказывается на величине проводимости:  $\sigma(m_a \ll m_b) = \sigma(m_a = m_b)$ . Подчеркнем, однако, что, опуская индекс зоны у матричных элементов  $V_{\mathbf{q}}^{\delta,c}$ , мы сводим все различия между двумя типами электронов лишь к огибающим волновым функциям, описывающим свободное движение в плоскости. В общем случае, конечно, прочие компоненты волновых функций электронов не обязаны совпадать, а учет этих дополнительных различий привел бы к разным скоростям релаксации двух типов электронов даже на короткодействующем беспорядке. Так, например, в статье [17] изучена система, включающая две отстоящие друг от друга параболические подзоны для электронов с одинаковой эффективной массой. В данной работе было показано, что электрон-электронное рассеяние косвенно проявляется себя путем перераспределения электронов между зонами, но лишь в том случае, когда темпы релаксации электронов в каждой подзоне различны. В настоящей же работе нас в первую очередь интересует роль различия эффективных масс электронов, а введение дополнительных времен релаксации на примесях значительно усложнило бы изучение свойств релаксации электронов, обусловленной процессами их столкновений друг с другом.

## 2.2. Вклад межэлектронного рассеяния в проводимость

Приступим к вычислению вклада электрон-электронного взаимодействия в проводимость двухкомпонентной системы. Используя выражения для примесных интегралов столкновений (11)–(14) и краткие обозначения  $x = m_a/m_b$  и  $y = \tau_\mu/\tau$ , запишем формальное решение системы уравнений (8):

$$\begin{pmatrix} \delta f_{\mathbf{p}}^a \\ \delta f_{\mathbf{p}'}^b \end{pmatrix} = \tau y (1-x) \check{M}^{-1} \sum_j \begin{pmatrix} Q_{aj}\{f_{\mathbf{p}}\} \\ Q_{bj}\{f_{\mathbf{p}'}\} \end{pmatrix} \quad (19)$$

$$\check{M} = \begin{pmatrix} y(1-x) + 3 - x & -2x^{1/2} \\ -2x^{3/2} & y(1-x) + 1 + x \end{pmatrix} \quad (20)$$

В правой части выражения (19) интеграл межэлектронных столкновений, линеаризованный по неравновесной добавке к функции распределения электронов, имеет

вид:

$$\begin{aligned} Q_{ij}\{f_{\mathbf{p}}\} = & -\frac{2}{(2\pi)^3 T} \int d\mathbf{k} d\mathbf{q} |V_{\mathbf{k}}^c|^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \delta(\epsilon_{\mathbf{p}}^i - \epsilon_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^i - \omega) \\ & \times \delta(\epsilon_{\mathbf{q}}^j - \epsilon_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^j + \omega) n_F(\xi_{\mathbf{p}}^i) [1 - n_F(\xi_{\mathbf{p}-\mathbf{k}}^i)] n_F(\xi_{\mathbf{q}}^j) \\ & \times [1 - n_F(\xi_{\mathbf{q}+\mathbf{k}}^j)] e \mathbf{E} \left\{ \frac{\mathbf{p}}{m_i} \phi_i(p) + \frac{\mathbf{q}}{m_j} \phi_j(q) \right. \\ & \left. - \frac{\mathbf{p} - \mathbf{k}}{m_i} \phi_i(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) - \frac{\mathbf{q} + \mathbf{k}}{m_j} \phi_j(|\mathbf{q} + \mathbf{k}|) \right\}. \end{aligned} \quad (21)$$

В качестве матричного элемента взаимодействия электронов друг с другом используется фурье-образ потенциальной энергии кулоновского отталкивания электронов,  $V_{\mathbf{k}}^c = 2\pi e^2/\epsilon k$ . Воспользовавшись фильтрующим свойством дельта-функций, произведем интегрирование по угловым переменным  $\phi_{\mathbf{k}}$  и  $\phi_{\mathbf{q}}$ :

$$\begin{aligned} Q_{aa}\{f_{\mathbf{p}}\} = & -\frac{eEp \cos \varphi}{\pi^3 T m_a} \int_0^\infty k dk q dq |V_k^c|^2 \\ & \times \int_{-\infty}^\infty d\omega n_F(\xi_{\mathbf{p}}^a) [1 - n_F(\xi_{\mathbf{p}}^a - \omega)] n_F(\xi_{\mathbf{q}}^a) [1 - n_F(\xi_{\mathbf{q}}^a + \omega)] \\ & \times \left\{ \phi_a(\epsilon_{\mathbf{p}}^a) - \phi_a(\epsilon_{\mathbf{p}}^a - \omega) + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^{a,2} - \omega^2}{4\epsilon_{\mathbf{p}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^a} [\phi_a(\epsilon_{\mathbf{q}}^a) - \phi_a(\epsilon_{\mathbf{q}}^a + \omega)] \right. \\ & \left. + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^a + \omega}{2\epsilon_{\mathbf{p}}^a} [\phi_a(\epsilon_{\mathbf{p}}^a - \omega) - \phi_a(\epsilon_{\mathbf{q}}^a + \omega)] \right\} \\ & \times \frac{\Theta[4\epsilon_{\mathbf{p}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^a - (\epsilon_{\mathbf{k}}^a + \omega)^2] \Theta[4\epsilon_{\mathbf{q}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^a - (\epsilon_{\mathbf{k}}^a - \omega)^2]}{\sqrt{4\epsilon_{\mathbf{p}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^a - (\epsilon_{\mathbf{k}}^a + \omega)^2} \sqrt{4\epsilon_{\mathbf{q}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^a - (\epsilon_{\mathbf{k}}^a - \omega)^2}}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} Q_{ab}\{f_{\mathbf{p}}\} = & -\frac{eEp \cos \varphi}{\pi^3 T} \int_0^\infty k dk q dq |V_k^c|^2 \\ & \times \int_{-\infty}^\infty d\omega n_F(\xi_{\mathbf{p}}^a) [1 - n_F(\xi_{\mathbf{p}}^a - \omega)] n_F(\xi_{\mathbf{q}}^b) [1 - n_F(\xi_{\mathbf{q}}^b + \omega)] \\ & \times \left\{ \frac{\phi_a(\epsilon_{\mathbf{p}}^a) - \phi_a(\epsilon_{\mathbf{p}}^a - \omega)}{m_a} + \frac{(\epsilon_{\mathbf{k}}^a + \omega)(\epsilon_{\mathbf{k}}^b - \omega)}{4m_b \epsilon_{\mathbf{p}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^b} \right. \\ & \times [\phi_b(\epsilon_{\mathbf{q}}^b) - \phi_b(\epsilon_{\mathbf{q}}^b + \omega)] \\ & \left. + \frac{\epsilon_{\mathbf{k}}^a + \omega}{2\epsilon_{\mathbf{p}}^a} \left[ \frac{\phi_a(\epsilon_{\mathbf{p}}^a - \omega)}{m_a} - \frac{\phi_b(\epsilon_{\mathbf{q}}^b + \omega)}{m_b} \right] \right\} \\ & \times \frac{\Theta[4\epsilon_{\mathbf{p}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^a - (\epsilon_{\mathbf{k}}^a + \omega)^2] \Theta[4\epsilon_{\mathbf{q}}^b \epsilon_{\mathbf{k}}^b - (\epsilon_{\mathbf{k}}^b - \omega)^2]}{\sqrt{4\epsilon_{\mathbf{p}}^a \epsilon_{\mathbf{k}}^a - (\epsilon_{\mathbf{k}}^a + \omega)^2} \sqrt{4\epsilon_{\mathbf{q}}^b \epsilon_{\mathbf{k}}^b - (\epsilon_{\mathbf{k}}^b - \omega)^2}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где угол  $\varphi$  задает направление вектора  $\mathbf{p}$ , вектор напряженности электрического поля полагается направленным по оси  $x$ ,  $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ . Выражения для интегралов столкновений  $Q_{ba}$  и  $Q_{bb}$  имеют вид аналогичный формулам (22) и (23).

Точное аналитическое вычисление оставшихся интегралов не представляется возможным, поэтому необходимо сделать ряд упрощений в подынтегральных выражениях. Прежде всего отметим, что экспоненциальное поведение фермиевых функций распределения обеспечивает сходимость интеграла по переменной интегрирования  $\omega$  на верхнем и нижнем пределах. При этом основная часть этого интеграла набирается в интервале значений порядка температуры,  $\omega \sim T \ll \mu$ . Это позволяет нам выполнить разложение функций, заключенных в фигурные скобки, по малому отношению  $\omega/\mu \ll 1$ . Чтобы избежать превышения точности и учесть все вклады одного порядка величины, разложение функций  $\phi$  необходимо произвести до третьего члена:

$$\phi(\mu \pm \omega) \approx \phi(\mu) \pm \omega\phi'(\mu) + \frac{\omega^2}{2}\phi''(\mu), \quad (24)$$

где мы полагаем начальные энергии электронов в подзонах равными энергии Ферми,  $\varepsilon_p^a, \varepsilon_q^b \approx \mu$ . Радикалы в знаменателях выражений (22) и (23) также следует упростить. Принимая во внимание, что нули знаменателя, как функции  $\varepsilon_k^a$ , в обоих интегралах разделены промежутком порядка  $4\mu$ , получаем для межподзонного рассеяния электронов (23):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(4\mu\varepsilon_k^a - (\varepsilon_k^a + \omega)^2)(4\mu\varepsilon_k^b - (\varepsilon_k^b - \omega)^2)}} \\ & \approx \frac{1}{4\mu\sqrt{x}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{x[4\mu - \varepsilon_k^a][4\mu/x - \varepsilon_k^a]}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_k^a - \omega^2/(4\mu)][\varepsilon_k^a - \omega^2/(4\mu x)]}} \right\}. \end{aligned} \quad (25)$$

Для внутриподзонного интеграла столкновений  $Q_{aa}$  подобные действия дают

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{(4\mu\varepsilon_k^a - (\varepsilon_k^a + \omega)^2)(4\mu\varepsilon_k^a - (\varepsilon_k^a - \omega)^2)}} \\ & \approx \frac{1}{4\mu} \left\{ \frac{1}{\sqrt{[4\mu a_- - \varepsilon_k^a][4\mu a_+ - \varepsilon_k^a]}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{[\varepsilon_k^a - \omega^2 a_+/(4\mu)][\varepsilon_k^a - \omega^2 a_-/(4\mu)]}} \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $a_{\pm} = 1 \pm \omega/(2\mu)$ .

Принятых допущений достаточно для аналитического взятия интегралов по переменным  $k$  и  $q$ . Результат интегрирования, однако, сводится к довольно громоздким выражениям, поэтому представим ответ в следующем

виде:

$$Q_{ij}(\mathbf{p}) = \frac{eEp \cos \varphi}{2\pi^3 T} \frac{K_{ij}}{N_c \mu} \times \int_{-\infty}^{\infty} d\omega n_F(\xi_p^i)[1 - n_F(\xi_p^i - \omega)]\omega e^{\omega/T} n_B(\omega), \quad (27)$$

где  $n_B(\omega) = (e^{\omega/T} - 1)^{-1}$  — распределение Бозе-Эйнштейна, а функции  $K_{ij}$  приведены в приложении (П1), (П2), (П3). Отметим, что в выражении (27) мы для краткости опустили вклады с четными степенями  $\omega$  перед экспонентой, так как при последующем вычислении проводимости системы данные вклады окажутся нечетными функциями энергии  $\omega$  и, таким образом, занулятся при интегрировании.

После подстановки неравновесных добавок (19) и интегралов межэлектронных столкновений (27) в определение плотности тока (3) и последующего интегрирования по импульсу  $\mathbf{p}$  приходим к выражению для поправки к проводимости системы, обусловленной электронно-электронным взаимодействием:

$$\delta\sigma = \frac{\sigma_0 \pi e^4}{3\epsilon^2 N_\delta V_\delta^2} \left( \frac{T}{\mu_0} \right)^2 \frac{m_a}{m_a + m_b} F \left( \frac{m_a}{m_b}, \frac{\mu}{\mu_0}, \frac{T}{\mu_0} \right), \quad (28)$$

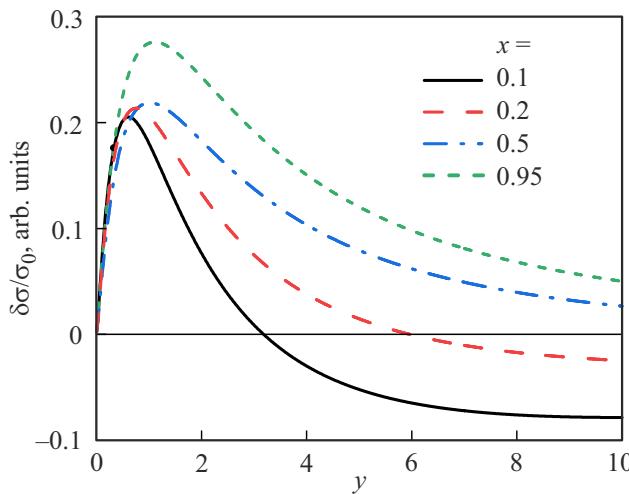
где безразмерная функция  $F$  приведена в явном виде в Приложении (см. выражение (П4)). Несмотря на то, что в принятых приближениях интегрирование удалось провести до конца, итоговые выражения, (28) и (П4), весьма сложны для восприятия, и мы приведем качественное описание полученных результатов.

### 3. Обсуждение результатов и заключение

Итак, в отличие от примесного вклада в проводимость, поправка к проводимости со стороны электронно-электронного взаимодействия оказалась крайне чувствительной к отношению эффективных масс электронов в двух зонах (рис. 3). Помимо немонотонной зависимости от химического потенциала, данный вклад демонстрирует возможность принимать как положительные, так и отрицательные значения. Чтобы сформулировать физическую интерпретацию такого поведения проводимости (28), вернемся к определению интеграла столкновений (21). В данном выражении слагаемые в фигурной скобке имеют размерность длины, в частности,  $l_p^i = \mathbf{p}_i \phi_i / m_i$  — длина свободного пробега  $i$ -го электрона с импульсом  $\mathbf{p}$ , а всю скобку целиком

$$\begin{aligned} \Delta l_p^i &= \mathbf{v}_p^i \phi_i(p) + \mathbf{v}_q^j \phi_j(q) - \mathbf{v}_{p-k}^i \phi_i(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) \\ &\quad - \mathbf{v}_{q+k}^j \phi_j(|\mathbf{q} + \mathbf{k}|) \end{aligned} \quad (29)$$

можно интерпретировать, как вектор изменения длины свободного пробега за счет электрон-электронных



**Рис. 3.** Зависимость вклада межэлектронных столкновений в проводимость двухкомпонентной системы (28) от энергии Ферми,  $y = \mu/\mu_0$ , при температуре  $T/\mu_0 = 1/100$  и различных значениях отношения эффективных масс электронов  $x = m_a/m_b$ .

столкновений. Вектор  $\Delta\mathbf{l}_p^i$  может быть направлен как по, так и против вектора импульса  $\mathbf{p}$ , и именно эта взаимная ориентация векторов  $\mathbf{p}$  и  $\Delta\mathbf{l}_p^i$  определяет знак соответствующей неравновесной поправки к функции распределения.

Рассмотрим предельные случаи. Пусть в системе доминируют кулоновские примеси ( $\mu \ll \mu_0$ ) и имеется один тип электронов, тогда  $\phi(\mu) = \tau_\mu \propto \mu$  и в фигурной скобке выражения (22) каждая разность функций  $\phi$  даст множитель  $\propto \omega$ . Как показывает дальнейший анализ, при вычислении проводимости из всех слагаемых в фигурной скобке мы должны оставить только четные по переменной  $\omega$ . Этому условию удовлетворяет лишь последнее слагаемое, которое, однако, меняет общий знак интеграла столкновений (22) с  $(-)$  на  $(+)$ , и соответствующая неравновесная добавка к функции распределения  $\delta f_p$  увеличивает проводимость системы. В рассмотренном случае положительную поправку к проводимости нужно понимать как следствие общего увеличения скорости движения электронов при неупругих столкновениях друг с другом. Это происходит в силу того, что релаксация электронов на кулоновских примесях в состояниях с большей кинетической энергией протекает дольше. При наличии в системе двух типов электронов данные рассуждения не теряют силу, так как в отсутствие короткодействующих дефектов зависимость функций  $\phi_i(\mu) \propto \tau_\mu \propto \mu$  от энергии остается линейной.

В обратной предельной ситуации, при наличии в системе только короткодействующего беспорядка ( $\mu \gg \mu_0$ ), время релаксации электронов не зависит от их энергии,  $\phi_i(\mu) \propto \tau = \text{const}$ , и интеграл внутризонных электрон-электронных столкновений (22) тождественно

обращается в ноль. На языке классической физики, рассеяние электронов друг на друге, будучи проявлением внутренних сил, не изменяет полного импульса электронного газа, что для систем с параболической энергетической дисперсией электронов означает сохранение дрейфовой скорости. Таким образом проводимость оказывается не подверженной влиянию межэлектронного взаимодействия. Данные рассуждения, однако, не применимы для межзонного рассеяния электронов. Как видно из (29), пара электронов из разных зон после обмена импульсом  $\mathbf{k}$  получают различное приращение скорости, и, следовательно,  $\Delta\mathbf{l}_p^i \propto \mathbf{v}_k^i - \mathbf{v}_k^j \neq 0$  даже при  $\phi_i = \phi_j = \text{const}$ . Расчет показал, что данный тип релаксации оказывает тормозящее воздействие на смесь двух электронных газов и соответствующая поправка к проводимости является отрицательной. Необходимым условием для реализации межзонного механизма релаксации выступает различие эффективных масс электронов, поэтому в отсутствие кулоновских примесей ( $y \gg 1$ ) и в пределе  $m_a \rightarrow m_b$  данный вклад исчезает, что подтверждается соответствующим предельным выражением для функции (B1):

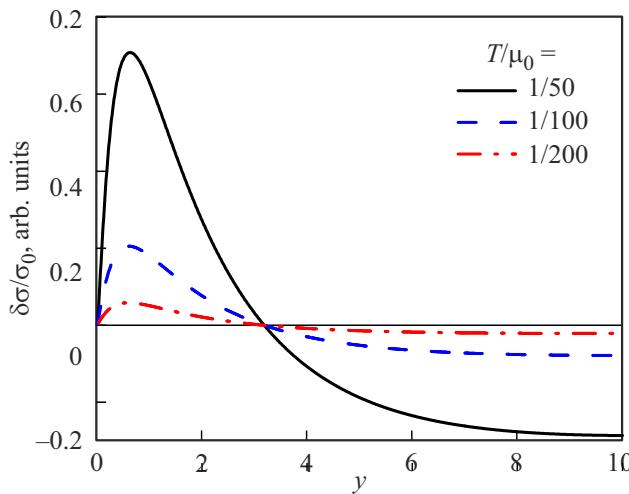
$$F \propto \ln(1-x) \frac{(1-x)^2}{x^{3/2}} \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0, \quad (30)$$

где, напоминаем,  $x = m_a/m_b$ .

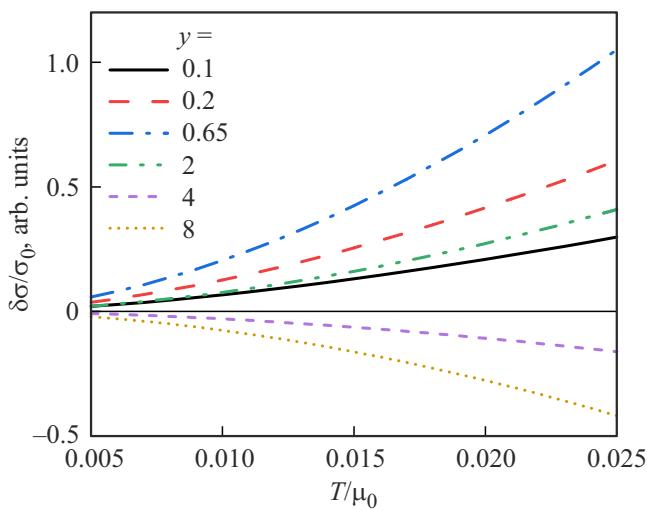
Описанные выше случаи качественно объясняют ход кривых на рис. 3. Если разность эффективных масс электронов невелика (рис. 3, зеленая кривая, короткие штрихи), то отрицательная поправка к проводимости от межзонного рассеяния подавлена и электрон-электронное взаимодействие в целом увеличивает проводимость. При этом с ростом  $y$ , то есть с переходом к доминированию короткодействующего беспорядка, поправка плавно стремится к нулю. Отметим, что стремление  $\delta\sigma$  к нулю в пределе  $y = \tau_\mu/\tau \rightarrow 0$  объясняется отсутствием носителей заряда при  $\mu = 0$ . Стоит, однако, иметь в виду, что область применимости развитой теории ограничивает допустимые значения  $y$  снизу:  $y \gg T/\mu_0$ .

Большое различие в эффективных массах электронов усиливает роль межзонного рассеяния электронов. Так как в рассматриваемых условиях внутри- и межзональные столкновения электронов работают противоположно, существует такое значение энергии Ферми  $\mu_c$ , при котором оба механизма полностью компенсируют друг друга. Например, как следует из рис. 3 (черная сплошная кривая), при десятикратном отличии масс электронов,  $m_a/m_b = 1/10$ , компенсация происходит при приблизительно трехкратном расхождении во временах релаксации на короткодействующем беспорядке и кулоновских примесях,  $\tau_\mu \approx 3\tau$ .

Перейдем далее к описанию температурной зависимости эффекта. Наибольший интерес представляют системы с существенным различием эффективных масс электронов, поэтому в качестве примера примем  $m_a/m_b = 1/10$  (рис. 4). Как видно на графике, изменение температуры оказывается лишь на



**Рис. 4.** Зависимость вклада межэлектронных столкновений в проводимость двухкомпонентной системы (28) от энергии Ферми,  $y = \mu/\mu_0$ , при отношении эффективных масс электронов  $x = m_a/m_b = 1/10$  и различных температурах.



**Рис. 5.** Зависимость вклада межэлектронных столкновений в проводимость двухкомпонентной системы (28) от температуры при отношении эффективных масс электронов  $x = m_a/m_b = 1/10$  и различных положениях уровня Ферми,  $y = \mu/\mu_0$ .

вертикальном масштабе кривых, при этом характерная точка зануления вклада межэлектронных столкновений  $y_c$  остается неподвижной на оси  $y$ . Это связано с тем, что, в пределе  $x \ll 1$  в уравнении  $F(x, y_c, T/\mu_0) = C_1(x, y_c) + C_2(x, y_c) \ln T = 0$ , определяющим величину  $y_c$ , доминирует слагаемое с логарифмом температуры. Таким образом, асимптотика поправки к проводимости  $\delta\sigma \propto T^2 \ln T$  и все кривые на рис. 4 пересекают ось абсцисс приблизительно в одной точке  $y_c$ .

Экспериментальное обнаружение вклада электрон-электронного взаимодействия в проводимость можно

осуществить путем измерения температурной зависимости эффекта. Рис. 5 демонстрирует, что при различных положениях уровня Ферми, нагрев системы может как повышать, так и уменьшать проводимость двухкомпонентного электронного газа. Напомним, что разработанная теория справедлива только в области низких температур, поэтому вне зависимости от положения уровня Ферми, начиная с некоторого значения температуры, удельное сопротивление электронного газа будет расти. Подчеркнем, что описанные нетривиальные свойства смеси двух электронных газов не имеют под собой каких-либо экзотических оснований. В частности, изученная система не полагалась сильно коррелированной или обладающей особенностями в энергетическом спектре.

В заключение обсудим роль экранировки кулоновского потенциала электронным газом в рассмотренной системе. Как было упомянуто в начале статьи, в разработанной теории используется голый кулоновский потенциал электрон-электронного взаимодействия, чтобы непротиворечивым образом учесть наличие в системе кулоновских примесных центров и таким образом сделать время релаксации электронов зависимым от их энергии. Экранировка кулоновского потенциала электронным газом будет, с одной стороны, эффективно ослаблять зависимость примесного времени релаксации электронов от энергии за счет уменьшения эффективного радиуса действия кулоновских центров (что эквивалентно смещению в сторону больших  $y$  на графиках рис. 3 и рис. 4), а с другой, изменит температурную зависимость эффекта. Рассмотрим в качестве примера предельный случай сильной экранировки, когда все дефекты кристаллической решетки и примесные центры являются короткодействующими. В этой ситуации потенциал электрон-электронного взаимодействия в рамках модели случайных фаз (RPA) в двухкомпонентной системе описывается диэлектрической проницаемостью следующего вида:

$$\epsilon_{\mathbf{k}}^{ee} = (1 - V_{\mathbf{k}}^{aa} \Pi_{\mathbf{k}}^a) (1 - V_{\mathbf{k}}^{bb} \Pi_{\mathbf{k}}^b) - (V_{\mathbf{k}}^{ab})^2 \Pi_{\mathbf{k}}^a \Pi_{\mathbf{k}}^b, \quad (31)$$

где функции  $\Pi_{\mathbf{k}}^{a,b}$  характеризуют поляризуемости электронных газов в соответствующих энергетических зонах и при квазибаллистическом режиме транспорта электронов имеют простой вид:  $\Pi_{\mathbf{k}}^{a,b} \approx -m_{a,b}/\pi$ . Электроны обоих типов имеют одинаковый электрический заряд и лежат в одном слое, поэтому голые кулоновские потенциалы равны,  $V_{\mathbf{k}}^{aa} = V_{\mathbf{k}}^{bb} = V_{\mathbf{k}}^{ab} = 2\pi e^2/\epsilon k$ , и в длинноволновом пределе взаимодействие электронов друг с другом приобретает контактный характер:

$$\frac{V_{\mathbf{k}}^c}{\epsilon_{\mathbf{k}}^{ee}} \rightarrow \frac{\pi}{m_a + m_b}, \quad (32)$$

Используя в интегралах межзонных электрон-электронных столкновений решение уравнений (7), включающих только точечные примесные центры,  $\phi_a = \phi_b = \tau_i$ , и

экранированный кулоновский потенциал (32) приходим к выражению:

$$\delta\sigma = -\sigma_D \frac{\pi\tau_i T^2}{3\mu} \left( \frac{1-x}{1+x} \right)^2 \times \left[ \frac{1-x}{\sqrt{x}} + \frac{1+x}{2x} \ln \left( \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right) \right], \quad (33)$$

где  $\sigma_D = e^2\tau_i\mu/\pi$  — друдевская проводимость. Поправка к проводимости (33), как и ожидалось, стремится к нулю при восстановлении галилеевской инвариантности системы, то есть при  $x \rightarrow 1$ . Кроме того, выражение (33) строго отрицательно, что означает исключительно рост удельного сопротивления системы с увеличением температуры в условиях сильной экранировки кулоновского взаимодействия. Формальная корневая расходимость поправки (33) в пределе  $m_a \ll m_b$  не имеет какого-либо

физического смысла и означает выход за пределы применимости полученных выражений:  $m_a/m_b \gg T/\mu$ .

## Благодарности

Авторы благодарят В.М. Ковалёва и О.В. Кибиса за ценные замечания при подготовке публикации.

## Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания FSUN-2023-0006 и при поддержке Фонда развития теоретической физики и математики „БАЗИС“ (грант № 24-1-3-33-1).

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Приложение I. Функции $K_{ij}$

$$K_{ii} = 4 \ln \left( \frac{2\mu}{T} \right) \frac{\partial \tilde{\phi}_i}{\partial y} + 2(1 - \ln 2)y \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_i}{\partial y^2}, \quad (\text{П1})$$

$$K_{ab} = \frac{1}{x} \left\{ \operatorname{arcth} \sqrt{x} \left[ 4 \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial y} \right) + 2(3x - 1) \frac{\partial \tilde{\phi}_b}{\partial y} - \frac{\tilde{\phi}_a - x\tilde{\phi}_b}{y} - 2y(1+x) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_b}{\partial y^2} \right] \right. \\ \left. - \frac{\tilde{\phi}_a - x\tilde{\phi}_b}{2y\sqrt{x}} \ln \left[ \left( \frac{4\mu}{T} \right)^2 \frac{4x}{1-x} \right] + 2\sqrt{x}y \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_b}{\partial y^2} \right\}, \quad (\text{П2})$$

$$K_{ba} = x \left\{ \operatorname{arcth} \sqrt{x} \left[ 4 \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \tilde{\phi}_b}{\partial y} \right) + 2 \left( \frac{3}{x} - 1 \right) \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial y} - \frac{\tilde{\phi}_b - \tilde{\phi}_a/x}{y} - 2y \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial y^2} \right] \right. \\ \left. - \sqrt{x} \frac{\tilde{\phi}_b - \tilde{\phi}_a/x}{2y} \ln \left[ \left( \frac{4\mu}{T} \right)^2 \frac{4x}{1-x} \right] + \frac{2y}{\sqrt{x}} \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial y^2} \right\}. \quad (\text{П3})$$

## Приложение II. Функция $F$

$$F(x, y, T) = 4 \ln \left( \frac{2\mu}{T} \right) \left( \tilde{\phi}_a \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial y} + \frac{1}{x} \tilde{\phi}_b \frac{\partial \tilde{\phi}_b}{\partial y} \right) + 2(1 - \ln 2)y \left( \tilde{\phi}_a \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial y^2} + \frac{1}{x} \tilde{\phi}_b \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_b}{\partial y^2} \right) \\ + \frac{1}{x} \operatorname{arcth} \sqrt{x} \left\{ 4\tilde{\phi}_a \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial y} \right) + 4x\tilde{\phi}_b \frac{\partial}{\partial y} \left( y \frac{\partial \tilde{\phi}_b}{\partial y} \right) + 2(3x - 1)\tilde{\phi}_a \frac{\partial \tilde{\phi}_b}{\partial y} + 2(3 - x)\tilde{\phi}_b \frac{\partial \tilde{\phi}_a}{\partial y} \right. \\ \left. - \frac{(\tilde{\phi}_a - x\tilde{\phi}_b)(\tilde{\phi}_a - \tilde{\phi}_b)}{y} - 2y(1+x) \left( \frac{\tilde{\phi}_a \partial^2 \tilde{\phi}_b}{\partial y^2} + \frac{\tilde{\phi}_b \partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial y^2} \right) \right\} \\ - \ln \left[ \left( \frac{4\mu}{T} \right)^2 \frac{4x}{1-x} \right] \frac{(\tilde{\phi}_a - x\tilde{\phi}_b)^2}{2yx^{3/2}} + \frac{2y}{\sqrt{x}} \left( \tilde{\phi}_a \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_b}{\partial y^2} + \tilde{\phi}_b \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_a}{\partial y^2} \right) \quad (\text{П4})$$

## Список литературы

- [1] W.G. Baber. Proc. Roy. Soc. London **158**, 383 (1937).
- [2] C.A. Kukkonen, P.F. Maldague. Phys. Rev. Lett. **37**, 782 (1976).
- [3] V.F. Gantmakher, I.B. Levinson. Sov. Phys. JETP **47**, 133 (1978).
- [4] S. Li, D.L. Maslov. Phys. Rev. B **98**, 245134 (2018).
- [5] M.V. Entin, L.I. Magarill, E.B. Olshanetsky, Z.D. Kvon, N.N. Mikhailov, S.A. Dvoretsky. JETP **117**, 933 (2013).
- [6] D.A. Bandurin, A. Principi, I.Y. Phinney, T. Taniguchi, K. Watanabe, P. Jarillo-Herrero. Phys. Rev. Lett. **129**, 206802 (2022).
- [7] V. Kravchenko, N. Minina, A. Savin, O.P. Hansen, C.B. Sorensen, W. Kraak. Phys. Rev. B **59**, 2376 (1999).
- [8] O.V. Kibis. Phys. Rev. B **99**, 235416 (2019).
- [9] V.M. Kovalev, M.V. Boev, O.V. Kibis. Phys. Rev. B **108**, 155140 (2023).
- [10] H.K. Pal, V.I. Yudson, D.L. Maslov. Lith. J. Phys. **52**, 142 (2012).
- [11] D.L. Maslov, V.I. Yudson, A.V. Chubukov. Phys. Rev. Lett. **106**, 106403 (2011).
- [12] A.D. Levin, G.M. Gusev, F.G.G. Hernandez, E.B. Olshanetsky, V.M. Kovalev, M.V. Entin, N.N. Mikhailov. Phys. Rev. Lett. **6**, 023121 (2024).
- [13] V.M. Kovalev, M.V. Entin, Z.D. Kvon, A.D. Levin, V.A. Chitta, G.M. Gusev, N.N. Mikhailov. Phys. Rev. Lett. **134**, 196303 (2025).
- [14] W.-R. Lee, A.M. Finkel'stein, K. Michaeli, G. Schwiete. Phys. Rev. Research. **2**, 013148 (2020).
- [15] E.H. Hwang, S. Das Sarma. Phys. Rev. B **67**, 115316 (2003).
- [16] P. Cudazzo, C. Attaccalite, I.V. Tokatly, A. Rubio. Phys. Rev. Lett. **104**, 226804 (2010).
- [17] K.E. Nagaev. Phys. Rev. B **106**, 085411 (2022).

Редактор А.Н. Смирнов