01,10

Объединенная функция распределения по энергиям квантовых, классических и фрактальных частиц

© С.В. Терехов

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина, Донецк, ДНР

E-mail: svlter@yandex.ru

Поступила в Редакцию 16 октября 2025 г. В окончательной редакции 16 октября 2025 г. Принята к публикации 17 октября 2025 г.

В рамках статистической физики были установлены функции распределения по энергиям для классических (распределение Максвелла—Больцмана) и квантовых (распределения Ферми—Дирака и Бозе—Эйнштейна) частиц. Развитие нанотехнологий привело к необходимости использовать функцию распределения по энергиям Цаллиса для ансамбля фрактальных частиц. Отличительными чертами перечисленных объединений частиц являются: различимость классических частиц; наличие спина (полуцелый — фермионы, целый — бозоны) у квантовых частиц; геометрические отличия фрактальных частиц. С другой стороны взаимосвязь организационных уровней вещества ставит вопрос о существовании объединенной функции распределения по энергиям указанных объектов. Вид функции распределения находится при использовании метода ячеек Больцмана, путем вычисления большой статистической суммы, использованием вариационного метода и т.д. В данной работе представление известных функций распределения в виде решений соответствующих задач Коши позволило установить вид объединенного выражения для описания средних чисел частиц в квантовых, классических и фрактальных ансамблях. Показано, что при показателе "деформации" q=0.5 фрактальный ансамбль описывается функцией, похожей на энергетический шум в системе. В системах с q<0 фрактальные ансамбли зарождаются при определенном пороговом отрицательном значении (внутренняя энергия фрактальной частицы меньше ее химического потенциала) безразмерной энергии.

Ключевые слова: энергетическое состояние, ансамбль частиц, температура, химический потенциал, фрактальная размерность.

DOI: 10.61011/FTT.2025.10.61960.279-25

Создание наноструктурированных композитов приводит к необходимости отыскания не только функции распределения частиц по размерам [1,2], но и по энергетическим состояниям. Это связано с изменениями механических, электрических, магнитных, термодинамических и других свойств малых частиц по сравнению с объектами квантовой и классической физики. Кроме того, иерархическое строение уровней организации вещества [3] указывает на существование объединенной функции распределения по энергиям.

Поэтому целью данного краткого сообщения является отыскание положительно определенной функции распределения по энергиям f, описывающей в предельных случаях при пороговых значениях параметров средние числа квантовых, классических и фрактальных частиц. Впервые такая задача была поставлена в работе [4]. Отметим, что основное внимание в данном сообщении уделено математическому аспекту решаемой задачи, так как физическая суть функций распределения подробно изложена в учебниках по теоретической и статистической физике, а также в научных статьях.

Рассмотрим при давлении P и температуре T макроканонический ансамбль классических частиц с энергией ε . Введем безразмерную энергию

$$x = \beta(\varepsilon - \mu),\tag{1}$$

здесь $\beta=1/\theta,\;\theta=k_BT,\;k_B$ — постоянная Больцмана, химический потенциал μ [5]

$$\mu = \mu_0(P, T) + \theta \ln a, \tag{2}$$

 $\mu_0(P,T)$ — значение химического потенциала при атмосферном давлении и комнатной температуре, $a=\gamma x$ — активность, γ — коэффициент активности, x — концентрация частиц. Для ансамбля, состоящего из одинаковых частиц активность a=1, для n-компонентного ансамбля идеальных элементов — $\gamma=1$.

Классическая статистика. Решением задачи Коши [6]

$$df(x)/dx = -f(x), \quad f(0) = 1$$
 (3)

является функция

$$f(x) = \exp(-x),\tag{4}$$

соответствующая распределению Максвелла—Больцмана [7].

Фермионы и бозоны. В зависимости от значения спина квантовые частицы разделяют на фермионы (полуцелый спин), подчиняющихся статистике Ферми–Дирака [7,8]

$$f(x) = 1/[\exp(x) + 1], \tag{5}$$

и бозоны (целый спин) со статистикой Бозе–Эйнштейна [7,8]

$$f(x) = 1/[\exp(x) - 1].$$
 (6)

Функции (5) и (6) являются решениями задач Коши (7) и (8) соответственно

$$df(x)/dx = -f(x)[1 - f(x)], \quad f(0) = 0.5,$$
 (7)

$$df(x)/dx = -f(x)[1+f(x)], \lim_{x\to 0} f(x) = \infty.$$
 (8)

Уравнения (3), (7) и (8) в работе [4] были сведены к задаче Коши

$$A df(x)/dx = -f(x)[A + Bf(x)], \quad f(0) = A/(1 - B)$$
(9)

с решением

$$f(x) = A/[\exp(x) - B]. \tag{10}$$

Коэффициент A определяет вырожденность энергетического уровня, а параметр B — связан со спином частицы. Классические различимые частицы образуют невырожденный ансамбль (A=1,B=0) и распределение (10) преобразуется в (4). Квантовые тождественные частицы объединяются в вырожденные ансамбли с разными спинами $(A=1,B=\pm 1)$, при этом равенство (10) переходит в распределения (5) при B=-1 и (6) при B=1 соответственно. Если A=1 и $\exp(x)$ достигает величин, значительно превосходящих B, то (10) принимает вид (4).

Фрактальные объекты. Распределение фрактальных частиц можно описать уравнением (3) с деформированной правой частью

$$df(x)/dx = -f^{q}(x), \quad f(0) = 1,$$
 (11)

где $q \neq 1$ — показатель "деформации", учитывающий влияние геометрического строения фрактальных частиц на их среднее количество в энергетической ячейке и порождающий не целочисленность числа частиц в не экстенсивной системе. Решением дифференциального уравнения (11) является функция

$$f(x) = [1 + (1-q)(-x)]^{1/(1-q)},$$
 (12)

асимптотикой которой при $q \to 1$ служит функция (4). Функция (12) задает распределение Цаллиса (Tsallis) [9], она описывает масштабно-инвариантные объекты с фрактальным строением фазового пространства [10,11]. Для монофракталов показатель "деформации" q связан с фрактальной размерностью D объекта формулой [3]

$$q = 1 - D, \tag{13}$$

а для мультифракталов он определяется минимальным α_{\min} и максимальным α_{\max} индексами Гельдера—Липшица (показателями гладкости функции распределения) [12]

$$(1-q)^{-1} = \alpha_{\min}^{-1} - \alpha_{\min}^{-1}.$$
 (14)

Объединенная функция распределения. Вышеизложенный материал позволяет получить объединенную задачу Коши

$$A df(x)/dx = -f^{q}(x)[A + Bf(x)], \qquad (15)$$

решением которой является первообразная

$$F(f(x), q, A, B) + C$$

$$= A \int df(x) / \{f^{q}(x)[A + Bf(x)]\} = -x, \quad (16)$$

где C — постоянная интегрирования.

Рассмотрим частные случаи распределения (16). При параметре "деформации" q=0.5, условии $f\left(0\right)=A/(1-B)$ и AB>0, равенство (16) принимает вид [13]

$$2\arctan\left[\sqrt{Bf(x)/A}\right]/\sqrt{AB}$$

$$-2\arctan\left[\sqrt{B/(1-B)}\right]/\sqrt{AB} = -x. \tag{17}$$

Для параметров $A=1,\,B\to +1$ первообразная равна

$$f(x) = tg^{2}[(\pi - x)/2] = ctg^{2}(x/2).$$
 (18)

Из (18) видно, что в точках $x=2\pi n,\, n=0,\, \mp 1,\, \mp 2,\, \ldots$ происходит "конденсация" фрактальных частиц $(f(x)\to +\infty)$, при этом их энергия

$$\varepsilon = \mu - 2\pi n k_B T, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$
 (19)

При AB < 0 решение (16) имеет вид [14]

$$\ln\left|\left(\sqrt{A} + \sqrt{|B|}f(x)\right)/\left(\sqrt{A} - \sqrt{|B|}f(x)\right)\right|/$$

$$\sqrt{A|B|} - \ln\left(\sqrt{A} + \sqrt{|B|}A/(1+|B|)\right)/$$

$$\left(\sqrt{A} - \sqrt{|B|}A/(1+|B|)\right)/\sqrt{A|B|} = -x. \quad (20)$$

Для параметров $A=1,\,B=-1$ равенство (20) принимает вид

$$\ln |[1 + f(x)]/3[1 - f(x)]| = -x$$

или

$$f(x) = [3\exp(-x) - 1]/[3\exp(-x) + 1] \quad 0 \le f(x) < 1,$$
(21)

если x=0, то f(x)=1/2. Полученные результаты показывают: при AB>0 наличие у фрактальных частиц свойств бозонов, а при AB<0 — фермионов.

Для монофрактальных плоских объектов (по (13) фрактальная размерность D=2) параметр q=-1, а для объемных объектов (по (13) D=3) — q=-2. В этих случаях решения (16) задаются формулами [13]

$$f(x)/B - (A/B^2) \ln[A + Bf(x)] + C = -x,$$
 (22)

1846 *С.В. Терехов*

$$f^{2}(x)/(2B) - Af(x)/B^{2} + (A^{2}/B^{3}) \ln[A + Bf(x)] + C = -x$$
 (23)

соответственно. Компьютерные вычисления показывают образование фрактального ансамбля при пороговом отрицательном значении (внутренняя энергия частицы меньше ее химического потенциала) безразмерной энергии (1).

Таким образом, частными случаями объединенной функции распределения (16) являются распределения:

$$F(f(x),1,A,0)=-x$$
 — Максвелла–Больцмана; $F(f(x),1,1,-1)=-x$ — Ферми–Дирака; $F((x),1,1,1)=-x$ — Бозе–Эйнштейна; $F(f(x),q,A,0)=-x,\ q\neq 1$ — Цаллиса.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.Б. Федосеев, А.В. Шишулин. ЖТФ, **91**, *I*, 39 (2021). doi: 10.21883/JTF.2021.01.50270. 159-20.
- [2] Е.А. Уханова, А.В. Смирнов, Б.А. Федоров. Научнотехнический вестник СанктПетербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, **2**, *60*, 66 (2009).
- [3] A.I. Olemskoi, A.B. Kiselev. Physics Letters A 247, 221 (1998).
- [4] С.В. Терехов. Физика и техника высоких давлений **24**, *I*, 5 (2014).
- [5] И. Пригожин, Д. Кондепуди. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. Мир, М. (2002). 461 с.
- [6] Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Высшая математика. Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. ООО "Дрофа", М. (2004). 513 с.
- [7] А.Г. Браун, И.Г. Левитина. Основы статистической физики. ИНФРА-М, М., (2015). 120 с.
- [8] И.А. Квасников. Термодинамика и статистическая физика. Т. 2. Едиториал УРСС, М. (2002). 432 с.
- [9] C. Tsallis. J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988). doi: 10.1007/BF01016429.
- [10] P.A. Alemany. Phys. Lett. A 235, 5, 452 (1997). doi: 10.1016/S0375-9601(97)00689-0.
- [11] А.И. Олемской. Письма в ЖЭТФ **69**, *5*, 391 (1999). http://www.jetpletters.ac.ru.
- [12] M.L. Lyra, C. Tsallis. Phys. Rev. Lett. 80, 53 (1998). doi: 10.1103/PhysRevLett.80.53.
- [13] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, М. (1963). 1108 с.
- [14] М.Л. Смолянский. Таблицы неопределенных интегралов. Физматлит, М. (1963). 112 с.

Редактор Т.Н. Василевская