01,10

Объединенная функция распределения по энергиям квантовых, классических и фрактальных частиц

 С.В. Терехов

Донецкий физико-технический институт им. А.А. Галкина,
Донецк, ДНР, Россия

E-mail: svlter@yandex.ru

Поступила в Редакцию16 октября 2025 г.
В окончательной редакции 16 октября 2025 г.
Принята к публикации 17 октября 2025 г.

В рамках статистической физики были установлены функции распределения по энергиям для классических (распределение Максвелла–Больцмана) и квантовых (распределения Ферми–Дирака и Бозе–Эйнштейна) частиц. Развитие нанотехнологий привело к необходимости использовать функцию распределения по энергиям Цаллиса для ансамбля фрактальных частиц. Отличительными чертами перечисленных объединений частиц являются: различимость классических частиц; наличие спина (полуцелый — фермионы, целый — бозоны) у квантовых частиц; геометрические отличия фрактальных частиц. С другой стороны взаимосвязь организационных уровней вещества ставит вопрос о существовании объединенной функции распределения по энергиям указанных объектов. Вид функции распределения находится при использовании метода ячеек Больцмана, путем вычисления большой статистической суммы, использованием вариационного метода и т. д. В данной работе представление известных функций распределения в виде решений соответствующих задач Коши позволило установить вид объединенного выражения для описания средних чисел частиц в квантовых, классических и фрактальных ансамблях. Показано, что при показателе „деформации“ $q = 0.5$ фрактальный ансамбль описывается функцией, похожей на энергетический шум в системе. В системах с $q < 0$ фрактальные ансамбли зарождаются при определенном пороговом отрицательном значении (внутренняя энергия фрактальной частицы меньше ее химического потенциала) безразмерной энергии.

Ключевые слова: энергетическое состояние, ансамбль частиц, температура, химический потенциал, фрактальная размерность.

DOI: 10.61011/FTT.2025.10.61960.279-25

Создание наноструктурированных композитов приводит к необходимости отыскания не только функции распределения частиц по размерам [1,2], но и по энергетическим состояниям. Это связано с изменениями механических, электрических, магнитных, термодинамических и других свойств малых частиц по сравнению с объектами квантовой и классической физики. Кроме того, иерархическое строение уровней организации вещества [3] указывает на существование объединенной функции распределения по энергиям.

Поэтому целью данного краткого сообщения является отыскание положительно определенной функции распределения по энергиям f, описывающей в предельных случаях при пороговых значениях параметров средние числа квантовых, классических и фрактальных частиц. Впервые такая задача была поставлена в работе [4]. Отметим, что основное внимание в данном сообщении уделено математическому аспекту решаемой задачи, так как физическая суть функций распределения подробно изложена в учебниках по теоретической и статистической физике, а также в научных статьях.

Рассмотрим при давлении P и температуре T макроканонический ансамбль классических частиц с энергией ε. Введем безразмерную энергию

$$x = \beta(\varepsilon - \mu), \tag{1}$$

здесь $\beta = 1/\theta$, $\theta = k_B T$, k_B — постоянная Больцмана, химический потенциал μ [5]

$$\mu = \mu_0(P, T) + \theta \ln a, \tag{2}$$

$\mu_0(P, T)$ — значение химического потенциала при атмосферном давлении и комнатной температуре, $a = \gamma x$ — активность, γ — коэффициент активности, x — концентрация частиц. Для ансамбля, состоящего из одинаковых частиц активность $a = 1$, для n-компонентного ансамбля идеальных элементов — $\gamma = 1$.

Классическая статистика. Решением задачи Коши [6] вида

$$df(x)/dx = -f(x), \quad f(0) = 1 \tag{3}$$

является функция

$$f(x) = \exp(-x), \tag{4}$$

соответствующая распределению Максвелла–Больцмана [7].

Фермионы и бозоны. В зависимости от значения спина квантовые частицы разделяют на фермионы (полуцелый спин), подчиняющихся статистике Ферми–Дирака [7,8]

$$f(x) = 1/\left[\exp(x) + 1\right], \tag{5}$$

и бозоны (целый спин) со статистикой Бозе–Эйнштейна [7,8]

$$f(x) = 1/\left[\exp(x) - 1\right]. \tag{6}$$

Функции (5) и (6) являются решениями задач Коши (7) и (8) соответственно

$$df(x)/dx = -f(x)\left[1 - f(x)\right], \quad f(0) = 0.5, \tag{7}$$

$$df(x)/dx = -f(x)\left[1 + f(x)\right], \quad \lim_{x \to 0} f(x) = \infty. \tag{8}$$

Уравнения (3), (7) и (8) в работе [4] были сведены к задаче Коши

$$A\,df(x)/dx = -f(x)\left[A + Bf(x)\right], \quad f(0) = A/(1 - B) \tag{9}$$

с решением

$$f(x) = A/\left[\exp(x) - B\right]. \tag{10}$$

Коэффициент A определяет вырожденность энергетического уровня, а параметр B — связан со спином частицы. Классические различимые частицы образуют невырожденный ансамбль ($A = 1$, $B = 0$) и распределение (10) преобразуется в (4). Квантовые тождественные частицы объединяются в вырожденные ансамбли с разными спинами ($A = 1$, $B = \pm 1$), при этом равенство (10) переходит в распределения (5) при $B = -1$ и (6) при $B = 1$ соответственно. Если $A = 1$ и $\exp(x)$ достигает величин, значительно превосходящих B, то (10) принимает вид (4).

Фрактальные объекты. Распределение фрактальных частиц можно описать уравнением (3) с деформированной правой частью

$$df(x)/dx = -f^q(x), \quad f(0) = 1, \tag{11}$$

где $q \neq 1$ — показатель „деформации", учитывающий влияние геометрического строения фрактальных частиц на их среднее количество в энергетической ячейке и порождающий не целочисленность числа частиц в не экстенсивной системе. Решением дифференциального уравнения (11) является функция

$$f(x) = \left[1 + (1 - q)(-x)\right]^{1/(1-q)}, \tag{12}$$

асимптотикой которой при $q \to 1$ служит функция (4). Функция (12) задает распределение Цаллиса (Tsallis) [9], она описывает масштабно-инвариантные объекты с фрактальным строением фазового пространства [10,11]. Для монофракталов показатель „деформации" q связан с фрактальной размерностью D объекта формулой [3]

$$q = 1 - D, \tag{13}$$

а для мультифракталов он определяется минимальным $\alpha_{\min}$ и максимальным $\alpha_{\max}$ индексами Гельдера–Липшица (показателями гладкости функции распределения) [12]

$$(1 - q)^{-1} = \alpha_{\min}^{-1} - \alpha_{\min}^{-1}. \tag{14}$$

Объединенная функция распределения. Вышеизложенный материал позволяет получить объединенную задачу Коши

$$A\,df(x)/dx = -f^q(x)\left[A + Bf(x)\right], \tag{15}$$

решением которой является первообразная

$$F(f(x), q, A, B) + C = A\int df(x)/\left\{f^q(x)\left[A + Bf(x)\right]\right\} = -x, \tag{16}$$

где C — постоянная интегрирования.

Рассмотрим частные случаи распределения (16). При параметре „деформации" $q = 0.5$, условии $f(0) = A/(1 - B)$ и $AB > 0$, равенство (16) принимает вид [13]

$$2\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{Bf(x)/A}\right]/\sqrt{AB} - 2\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{B/(1 - B)}\right]/\sqrt{AB} = -x. \tag{17}$$

Для параметров $A = 1$, $B \to +1$ первообразная равна

$$f(x) = \mathrm{tg}^2\left[(\pi - x)/2\right] = \mathrm{ctg}^2(x/2). \tag{18}$$

Из (18) видно, что в точках $x = 2\pi n$, $n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$ происходит „конденсация" фрактальных частиц ($f(x) \to +\infty$), при этом их энергия

$$\varepsilon = \mu - 2\pi n k_B T, \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots. \tag{19}$$

При $AB < 0$ решение (16) имеет вид [14]

$$\ln\left|\left(\sqrt{A} + \sqrt{|B|}f(x)\right)/\left(\sqrt{A} - \sqrt{|B|}f(x)\right)\right|/\sqrt{A|B|} - \ln\left(\sqrt{A} + \sqrt{|B|}A/(1 + |B|)\right)/\left(\sqrt{A} - \sqrt{|B|}A/(1 + |B|)\right)\Big|/\sqrt{A|B|} = -x. \tag{20}$$

Для параметров $A = 1$, $B = -1$ равенство (20) принимает вид

$$\ln\left|\left[1 + f(x)\right]/3\left[1 - f(x)\right]\right| = -x$$

или

$$f(x) = \left[3\exp(-x) - 1\right]/\left[3\exp(-x) + 1\right] \quad 0 \le f(x) < 1, \tag{21}$$

если $x = 0$, то $f(x) = 1/2$. Полученные результаты показывают: при $AB > 0$ наличие у фрактальных частиц свойств бозонов, а при $AB < 0$ — фермионов.

Для монофрактальных плоских объектов (по (13) фрактальная размерность $D = 2$) параметр $q = -1$, а для объемных объектов (по (13) $D = 3$) — $q = -2$. В этих случаях решения (16) задаются формулами [13]

$$f(x)/B - (A/B^2)\ln\left[A + Bf(x)\right] + C = -x, \tag{22}$$

$$f^2(x)/(2B) - Af(x)/B^2 + (A^2/B^3)\ln\left[A + Bf(x)\right] + C = -x \quad (23)$$

соответственно. Компьютерные вычисления показывают образование фрактального ансамбля при пороговом отрицательном значении (внутренняя энергия частицы меньше ее химического потенциала) безразмерной энергии (1).

Таким образом, частными случаями объединенной функции распределения (16) являются распределения:

$F(f(x), 1, A, 0) = -x$ — Максвелла–Больцмана;

$F(f(x), 1, 1, -1) = -x$ — Ферми–Дирака;

$F(f(x), 1, 1, 1) = -x$ — Бозе–Эйнштейна;

$F(f(x), q, A, 0) = -x,\ q \neq 1$ — Цаллиса.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] В.Б. Федосеев, А.В. Шишулин. ЖТФ, **91**, *1*, 39 (2021). doi: 10.21883/JTF.2021.01.50270. 159-20.
[2] Е.А. Уханова, А.В. Смирнов, Б.А. Федоров. Научно-технический вестник СанктПетербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, **2**, *60*, 66 (2009).
[3] A.I. Olemskoi, A.B. Kiselev. Physics Letters **A 247**, 221 (1998).
[4] С.В. Терехов. Физика и техника высоких давлений **24**, *1*, 5 (2014).
[5] И. Пригожин, Д. Кондепуди. Современная термодинамика. От тепловых двигателей до диссипативных структур. Мир, М. (2002). 461 с.
[6] Я.С. Бугров, С.М. Никольский. Высшая математика. Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. ООО „Дрофа“, М. (2004). 513 с.
[7] А.Г. Браун, И.Г. Левитина. Основы статистической физики. ИНФРА-М, М., (2015). 120 с.
[8] И.А. Квасников. Термодинамика и статистическая физика. Т. 2. Едиториал УРСС, М. (2002). 432 с.
[9] C. Tsallis. J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988). doi: 10.1007/BF01016429.
[10] P.A. Alemany. Phys. Lett. **A 235**, *5*, 452 (1997). doi: 10.1016/S0375-9601(97)00689-0.
[11] А.И. Олемской. Письма в ЖЭТФ **69**, *5*, 391 (1999). http://www.jetpletters.ac.ru.
[12] M.L. Lyra, C. Tsallis. Phys. Rev. Lett. **80**, 53 (1998). doi: 10.1103/PhysRevLett.80.53.
[13] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, М. (1963). 1108 с.
[14] М.Л. Смолянский. Таблицы неопределенных интегралов. Физматлит, М. (1963). 112 с.

Редактор Т.Н. Василевская