

## Перенос однофотонного возбуждения посредником

© А.М. Башаров<sup>1</sup>, А.И. Трубилко<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Национальный исследовательский центр „Курчатовский институт“, Москва, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский университет ГПС МЧС России, Санкт-Петербург, Россия

e-mail: basharov@gmail.com, trubilko.andrey@gmail.com

Поступила в редакцию 24.03.2025 г.

В окончательной редакции 24.03.2025 г.

Принята к публикации 24.10.2025 г.

Продemonстрирована возможность переноса состояния однофотонного возбуждения посредником при нерезонансном взаимодействии двух осцилляторов. Однофотонное возбуждение представляет собой широкополосный по частоте пакет, который нерезонансно воздействует на осциллятор-посредник. Центральная частота пакета резонансна частоте другого изолированного осциллятора, на который собственно и переносится возбуждение. В рамках такой постановки однофотонный пакет моделируется широкополосным однофотонным термостатом. Показано, что в условиях нерезонансного взаимодействия осцилляторов обнаруженный эффект описывается кинетическим уравнением, полученным в рамках марковского приближения на основе алгебраической резонансной теории возмущений. Показано, что возможен случай переноса возбуждения, отличающий случай осциллятора от атома. Определена статистика переданного возбуждения.

**Ключевые слова:** однофотонное возбуждение, нерезонансное взаимодействие, марковское приближение.

DOI: 10.61011/OS.2025.10.61952.7721-25

### 1. Введение

Однофотонные волновые пакеты, представляющие собой состояние электромагнитного поля с одним возбуждением, являются привлекательными прежде всего для целей квантовой теории информации [1,2]. Именно с помощью таких источников осуществляется кодирование и перенос информации в большинстве квантовых информационных протоколов. Вместе с тем однофотонный источник может быть и широкополосным, где наряду с центральной частотой важную роль играет и спектральная ширина пакета. В случае, если последняя имеет значение большее, чем другие характерные спектральные ширины в задаче, он может рассматриваться как термостат, где однофотонное состояние случайным образом распределено внутри его спектральной ширины. Такое состояние может быть получено, например, посредством генерирования бифотонного светового поля нелинейным кристаллом, когда один из фотонов пары поступает на детектор и детектируется, тогда другой фотон достоверно поступает в оптическую схему. Подчеркнем, что в этом случае осуществляется приготовление состояния путем проекционного измерения, в результате которого реализуется сугубо квантовое состояние объекта. Полоса фазового синхронизма нелинейного кристалла в данном случае и отвечает спектральной ширине имеющего место излучения. В рамках такой постановки излучение со случайным характером распределения одиночного возбуждения по частоте пакета может рассматриваться как широкополосный волновой пакет, играющий роль термостата при его последующем воздействии на другой

физический объект, который становится, таким образом, открытой системой.

Первостепенной задачей квантовой теории открытых систем является вывод кинетического уравнения для матрицы плотности подсистемы или подсистем, основным компонентом которого является релаксационный оператор. Обычно предполагается, что сама подсистема, обладающая определенным, как правило, конечным числом степеней свободы, слабо взаимодействует с системой, имеющей значительно большее число степеней свободы, называемой термостатом. В работах [3,4] из общих физических соображений, не привлекая какие-либо модельные понятия и допущения, за исключением марковости, был математически установлен вид релаксационного оператора и соответствующий ему вид кинетического уравнения, называемый формой Линдблада. Однако универсальный вид Линдблада релаксационного оператора кинетического уравнения таит в себе опасность некорректного применения этого уравнения. В стандартных физических ситуациях — при анализе предельных случаев и пр. — часто выходят за рамки применимости известного кинетического уравнения [5]. В нестандартных физических ситуациях часто пренебрегают выводом релаксационного оператора, используя, подчас без какого-либо обоснования, линдбладовский релаксационный оператор [6]. Например, в статьях [5–7] релаксационный оператор в форме Линдблада применялся либо к гамильтониану открытой системы в поле термостата, в котором не было использовано приближение вращающейся волны, либо было использовано приближение вращающейся волны за пределами области

параметров, в которой приближение вращающейся волны справедливо. Это привело к парадоксальным выводам типа нарушения второго закона термодинамики [6,7]. Чтобы избежать подобных ситуаций в новых задачах, необходимо представлять требования к гамильтониану открытой системы в термостате в условиях марковского приближения. Тогда моделью термостата является дельта-коррелированный термостат и в эффективном гамильтониане не должно быть быстро меняющихся во времени слагаемых, чтобы время корреляции термостата было минимальным в системе [8,9]. Поэтому отдельным вопросом во многих задачах теории открытых систем является обоснование эффективного гамильтониана открытой системы с требуемыми свойствами, определяющего наряду с релаксационным оператором кинетическое уравнение.

Еще раз подчеркнем — случай „чисто“ фотонных (бозонных) систем с точки зрения кинетических уравнений особый. Развита методика для точного решения многочастичных и многомодовых бозонных задач [10,11,14], которые, тем не менее, нуждаются в численном моделировании. Мы предлагаем альтернативный подход, который в рассматриваемой ситуации и в ряде задач квантовой оптики представляется более простым и физически наглядным.

В этой работе мы рассматриваем вопрос о переносе состояния однофотонного широкополосного пакета с гауссовым распределением фотона по его частотной полосе при взаимодействии с осцилляторными системами. Ранее аналогичный вопрос мы обсуждали при взаимодействии однофотонного широкополосного пакета с атомами. Мы рассматриваем две осцилляторные системы. Одна система представляет из себя просто обычный гармонический квантовый осциллятор, взаимодействие термостата с которым резонансно. Этот же осциллятор, который мы называем посредником, нерезонансным образом взаимодействует с однофотонным широкополосным пакетом. Его собственная частота считается существенно большей центральной частоты однофотонного пакета, а потому определяющей масштаб всех характерных времен эволюции в задаче. Кроме того осциллятор-посредник также нерезонансным образом взаимодействует еще с одним осциллятором, который считается „изолированным“ как от термостата, так и от однофотонного волнового пакета. Собственная частота последнего резонансна центральной частоте пакета. Такая двухосцилляторная схема востребована в связи с различными архитектурами квантовых вычислительных систем [15]. „Изолированный“ осциллятор участвует в унитарных операциях, поскольку его распад в термостат заторможен осциллятором—посредником [16–18]. Подчеркнем — здесь все исходные процессы взаимодействия полей и систем — нерезонансные.

Другой существенной особенностью такой постановки задачи является задача разделения двух термостатов — обычного вакуумного термостата и „термостата“, описывающего однофотонный широкополосный волновой па-

кет. В случае распространения широкополосного пакета в атомарной среде [19] разделение термостатов осуществлялось на основе узкой угловой направленности однофотонного пакета. В случае двух осцилляторов мы используем алгебраическую резонансную теорию возмущений (АРТВ) для получения эффективного гамильтониана, а разделение термостатов осуществляется введением отдельных констант взаимодействия с каждым из широкополосных полей. В принципе, это может быть обосновано различными условиями взаимодействия полей с осциллятором-посредником.

При этом в формальном решении уравнения Шредингера с эффективным гамильтонианом для термостатных полей учтены все порядки разложения формального решения, тогда как для гауссова широкополосного однофотонного пакета учитываем только два низших порядка. Получено кинетическое уравнение вида Линдблада—Коссаковского—Горини—Сударшана для матриц плотности открытой системы, описывающее релаксацию и возбуждения системы осцилляторов. Оно может быть использовано в различных задачах. В данной статье на основе полученного уравнения показано, что движения как осциллятора-посредника, так и изолированного осциллятора оказываются факторизованы. Проанализированы особенности переноса статистических характеристик состояния пакета на состояние изолированного осциллятора и доказано, что при определенных условиях возможен полный перенос возбуждения и статистики на „изолированный“ осциллятор. Это отличает задачу переноса возбуждения однофотонного широкополосного пакета на осциллятор от задачи переноса возбуждения на атом. В случае атома имеем максимальную заселенность возбужденного уровня, равную  $1/3$ . Следует также подчеркнуть, что полученное уравнение является проявлением природы бозонных коммутационных соотношений и не может быть получено описанием источника в рамках классического рассмотрения. К настоящему времени существуют два экспериментально продемонстрированных физических эффекта подобного проявления — эффект Казимира [20] и лэмбовский сдвиг [21] атомных уровней.

## 2. Постановка основной задачи

Будем предполагать следующую постановку задачи. Пусть существуют два бозонных осциллятора с существенно разными частотами, для определенности  $\omega_c \gg \omega_r$ , каждый из которых описывается операторами рождения  $c^\dagger$ ,  $r^\dagger$  и уничтожения  $c$ ,  $r$  с бозонными коммутационными соотношениями  $[\alpha, \alpha^\dagger] = 1$ ,  $\alpha = c, r$ ,  $[c, r] = [c, r^\dagger] = 0$ . Осциллятор, описываемый операторами  $r$ , будем называть изолированным, полагая что он взаимодействует только лишь с осциллятором-посредником  $c$ . Такое взаимодействие указанных осцилляторов нерезонансное, иными словами осуществляется

в крыле линии поглощения какого-либо из них или в дисперсионном пределе.

Осциллятор-посредник взаимодействует с еще двумя подсистемами.

Во-первых, взаимодействует со „своим“ термостатом  $B$ , находящимся в вакуумном состоянии. В качестве термостата  $B$  выбрана бозонная система, которая описывается операторами  $b_\omega^\dagger, b_\omega$ , с аналогичными приведенным гейзенберговскими коммутационными соотношениями  $[b_{\omega'}, b_\omega^\dagger] = \delta_{\omega', \omega}$ . При взаимодействии осциллятора с термостатом предполагаются выполненными обычные условия слабого взаимодействия подсистемы в широкой полосе взаимодействия с вакуумным окружением, когда собственно обратным воздействием системы на термостат можно пренебречь, считая состояние последнего неизменным, что является стандартным условием для построения кинетического уравнения.

Во-вторых, на осциллятор-посредник  $c$  действует узконаправленный однофотонный широкополосный пакет, центральная частота которого  $\omega_0$  существенно меньше собственной частоты  $\omega_c$ , но резонансна собственной частоте изолированного осциллятора  $\omega_0 = \omega_r$ . Операторы рождения  $a^\dagger(\omega)$  и уничтожения  $a(\omega)$  квазимоды однофотонного пакета отвечают бозонным коммутационным соотношениям  $[a(\omega), a^\dagger(\omega')] = \delta(\omega - \omega')$ . Эти же операторы определяют и операторы его напряженности, которые запишем в виде

$$\begin{aligned}\epsilon^-(t) &= \int_{\omega \in (\omega_0)} d\omega \epsilon(\omega) a(\omega) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon^+(t) &= (\epsilon^-(t))^\dagger.\end{aligned}\quad (1)$$

Здесь  $\epsilon(\omega)$  характеризуется свойствами источника однофотонного поля, а интегрирование ведется по его спектральной полосе  $S(\omega_0)$  с центральной частотой  $\omega_0$ . Для удобства считаем, что в  $\epsilon(\omega)$  включен также параметр связи  $\kappa$  осциллятора и однофотонного поля, который в дальнейшем считаем не зависящим от частоты. Поэтому размерность этой величины не совпадает с размерностью напряженности электрического поля. Свободная энергия такого квантованного пакета задана соотношением

$$H_{0,A} = \int_{\omega \in S(\omega_0)} d\omega \frac{|\epsilon(\omega)|^2}{\kappa^2} a^\dagger(\omega) a(\omega). \quad (2)$$

Интегрирование здесь ведется по всей спектральной полосе источника. Считаем, что каждый из источников можно считать независимым. Это физически может быть реализовано, например, как и в случае атомов [19], на основе узкой угловой направленности однофотонного пакета при его падении на зеркало микрорезонатора, реализующего осциллятор-посредник. Отметим, что при этом осциллятор-посредник служит источником перераспределения фотонов одного термостата в другой, как и в случае атомов [19].

Наконец, свободные энергии оставшихся рассматриваемых систем — осцилляторов и термостата — запишем в виде

$$H_{0,c} = \hbar\omega_c c^\dagger c, H_{0,r} = \hbar\omega_r r^\dagger r, H_{0,B} = \sum_{\omega} \hbar\omega b_\omega^\dagger b_\omega, \quad (3)$$

а также запишем свободные энергии описанных нами взаимодействий между ними, используя представление Дирака по свободному гамильтониану  $H_0 = H_{0,c} + H_{0,r} + H_{0,B} + H_{0,A}$ . Эти взаимодействия считаем электродипольными, а операторы в представлении Дирака будем отражать явным написанием аргумента  $t$  следующих операторозначных функций:

$$\begin{aligned}V_{c-r}(t) &= g (c e^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t}) (r e^{-i\omega_r t} + r^\dagger e^{i\omega_r t}), \\ V_{c-A}(t) &= (\epsilon^-(t) + \epsilon^+(t)) (c e^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t}), \\ V_{c-B}(t) &= \gamma_{cB} \sum_{\omega \in (\omega_c)} (c e^{-i\omega_c t} + c^\dagger e^{i\omega_c t}) (b_\omega^\dagger e^{i\omega t} + b_\omega e^{-i\omega t}),\end{aligned}\quad (4)$$

где константы  $g, \gamma_{cB}$  определяют параметры связи взаимодействий осцилляторов между собой и осциллятора-посредника со своим вакуумным термостатом. При записи последнего выражения предполагается, что значение константы взаимодействия выбрано на центральной частоте  $\omega_c$  осциллятора-посредника и она неизменна внутри всей широкой полосы частот взаимодействия этого термостата с данным осциллятором. Это предположение уже является одним из проявлений марковского характера взаимодействия системы с широкополосным окружением и является традиционным для задач вывода кинетического уравнения для открытой системы. Напомним, что константа взаимодействия осциллятора  $c$  с однофотонным широкополосным пакетом уже включена в операторозначные выражения для  $\epsilon^-(t), \epsilon^+(t)$ .

Ранее в работах [22,23] в отсутствие широкополосного однофотонного пакета нами был продемонстрирован эффект релаксации изолированного осциллятора в термостат осциллятора-посредника, который взаимодействует квазирезонансным образом со своим широкополосным термостатом в термодинамически равновесном состоянии. Было показано, что динамика релаксации в этом случае оказывается как для независимых подсистем. При этом наблюдается как возбуждение изолированного осциллятора, так и его необратимая релаксация. Последняя, однако, происходит на частоте и в полосе частот, существенно отличной от той, в которую диссипирует собственно сам осциллятор-посредник. Было показано, что физической природой такого появляющегося эффекта второго порядка является возникновение нового квантового интерференционного канала, обусловленного резонансным взаимодействием осциллятора-посредника с термостатом и нерезонансным взаимодействием осцилляторов между собой. В текущей постановке задачи именно в этой области частот имеется узконаправленный однофотонный широкополосный пакет, который в

поставленных условиях играет роль широкополосного термостата. Это обстоятельство играет существенную роль, позволяя рассматривать динамику всей системы в суперпозиции двух широкополосных полей — однофотонного источника и вакуумного окружения. Поэтому актуальным представляется как вопрос о непосредственном переносе однофотонного состояния на состояние изолированного осциллятора, так и собственно сама его динамика релаксации в этих условиях.

### 3. Кинетическое уравнение для матрицы плотности осцилляторной системы

Для вывода кинетического уравнения динамики релаксации открытой системы будем использовать АРТВ [24,25]. Ее основой является получение эффективного гамильтониана системы и последующее введение марковского приближения для представления окружения белым шумом (источники шумов равновесного термостата определяются как дельта-коррелированные во времени случайные процессы), что и обеспечивает построение корректного уравнения для матрицы плотности подсистемы. Эффективный гамильтониан следует вполне определенному и физически интуитивно понятному требованию отсутствия в нем быстро меняющихся осциллирующих иначе антивращающихся слагаемых. Обычно эти слагаемые при традиционных построениях кинетического уравнения игнорируются и отбрасываются уже на этапе написания взаимодействия. И если такое игнорирование может быть хоть как-то оправдано в условиях резонансного и квазирезонансного взаимодействий, то при нерезонансных взаимодействиях оно не оправдано ничем. Отметим, что эти взаимодействия приводят, например, к дополнительному сдвигу основной частоты и замораживанию скорости релаксации системы. Именно поэтому приходится проводить полный вывод эффективного гамильтониана для каждой новой физической ситуации.

Для волнового вектора всей системы  $\Psi$  и полного гамильтониана задачи  $H(t) = V_{c-r}(t) + V_{c-B}(t) + V_{c-A}(t)$  запишем уравнение Шредингера в представлении Дирака:

$$\frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = -i\hbar H(t)|\Psi(t)\rangle. \quad (5)$$

Уравнение (5) с учетом выражений (4), содержит осциллирующие слагаемые  $\exp(\pm i(\omega_c \pm \omega)t)$ ,  $\exp(\pm i(\omega_c \pm \omega_r)t)$ , которые в зависимости от значений частоты  $\omega$ , пробегающий весь спектр значений, могут быть как быстро меняющимися функциями времени, так и медленно меняющимися функциями по сравнению с  $\exp(\pm i\omega_c t)$  и  $\exp(\pm i\omega_r t)$ . Такая ситуация характерна для всех задач взаимодействия оптического излучения с квантовой системой, состоящей из двух и более

энергетических уровней. Для открытых систем наличие быстро меняющихся функций времени в гамильтониане в представлении Дирака критично в связи с дальнейшим использованием марковского приближения и представления термостатных полей как дельта-коррелированных.

В работе [9] было показано, что для того, чтобы можно было использовать марковское приближение в теории открытых квантовых систем, в гамильтониане системы необходимо исключить все быстро меняющиеся во времени слагаемые в представлении Дирака. Для этого удобно использовать АРТВ, основанную на унитарной симметрии квантовой теории. Место АРТВ среди других методов получения эффективного гамильтониана обсуждено в работе [8].

Совершим унитарное преобразование исходного вектора-состояния, переходя к новому представлению:

$$|\tilde{\Psi}(t)\rangle = \exp(-iS(t))|\Psi(t)\rangle. \quad (6)$$

В этом представлении уравнение Шредингера для преобразованного вектора  $|\tilde{\Psi}(t)\rangle$  имеет тот же самый вид, что и (5), но с преобразованным (что отмечает знак „тильда“) гамильтонианом:

$$\tilde{H}(t) = e^{-iS(t)}H(t)e^{iS(t)} - i\hbar e^{-iS(t)}\frac{\partial}{\partial t}e^{iS(t)}. \quad (7)$$

Дальнейшие преобразования основаны на разложении генераторов  $S(t)$  и  $\tilde{H}(t)$  в ряды по константам имеющихся в задаче взаимодействий и учете условий резонансности. В нашем случае

$$S(t) = S^{(1,0,0)}(t) + S^{(0,1,0)}(t) + S^{(0,0,1)}(t) + S^{(2,0,0)}(t) + \dots, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}(t) = & \tilde{H}(t)^{(1,0,0)} + \tilde{H}(t)^{(0,1,0)} \\ & + \tilde{H}(t)^{(0,0,1)} + \tilde{H}(t)^{(2,0,0)} + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Левый индекс каждой тройки верхних индексов описывает порядок слагаемого по константе связи между квантованными осцилляторами, центральный — по взаимодействию осциллятора-посредника с равновесным термостатом, а правый — по взаимодействию этого же осциллятора с однофотонным широкополосным пакетом. Выражение (9) с конечным числом слагаемых называем эффективным гамильтонианом и обозначаем  $\tilde{H}^{eff}(t)$ .

Поскольку взаимодействие между осцилляторами нерезонансно, оно начинает проявляться только во втором порядке по взаимодействию между ними. Взаимодействия осциллятора-посредника с окружением носят как резонансный характер при взаимодействии с собственным термостатом, так и нерезонансный характер, проявляющийся во втором порядке по взаимодействию с однофотонным источником. Именно поэтому в рассматриваемой системе будут проявляться эффекты второго порядка по взаимодействиям. Наряду с тривиальными эффектами также будет возможность появления новых нетривиальных каналов релаксации,

обусловленных квантовой интерференцией различных альтернатив, описывающихся билинейной комбинацией констант взаимодействий.

Мы не будем выписывать общие уравнения для слагаемых генераторов, поскольку они неоднократно выписывались и их общий вид неизменен для различных физических условий [8,19,24]. Особенности описания воздействия однофотонного широкополосного пакета совместно с термостатом, правда, на атомы, рассмотрены нами в работе [19]. Там же прописана техника получения кинетического уравнения. Заметим, что входящие в (9) эффективные операторы, описывающие как нерезонансные взаимодействия, так и взаимодействия с широкополосными полями, в кинетическом уравнении исчезают, оставляя лишь релаксационный оператор в форме Линдблада и штарковские сдвиги энергетических уровней.

В результате стандартных процедур АРТВ и стохастических дифференциальных уравнений получили управляющее кинетическое уравнение для матрицы плотности  $\rho^S$ , описывающее эволюцию подсистемы из двух выделенных осцилляторов в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^S}{\partial \tau} = & -\mathcal{K}(\tau)\mu^2(r^\dagger r \rho^S + \rho^S r^\dagger r - 2r \rho^S r^\dagger) \\ & - \frac{1}{2}\mathcal{K}(\tau)\mu^2(rr^\dagger \rho^S + \rho^S rr^\dagger - 2r^\dagger \rho^S r) \\ & - \frac{1}{2}\sigma^2(r^\dagger r \rho^S + \rho^S r^\dagger r - 2r \rho^S r^\dagger) \\ & - \frac{1}{2}\chi^2(c^\dagger c \rho^S + \rho^S c^\dagger c - 2c \rho^S c^\dagger). \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введено безразмерное время  $\tau = \omega_c t$ . Временная функция  $\mathcal{K}(\tau) = 2(erf(\delta\tau/2))$ , выраженная через функцию ошибок  $erf$ , предопределена гауссовым частотным распределением однофотонного пакета. Мы предположили, что однофотонный пакет имеет гауссово частотное распределение плотности вероятности обнаружения фотона ( $\nu = \omega/\omega_c$  — безразмерная частота,  $\nu_0 = \omega_0/\omega_c$ ):

$$|\epsilon(\nu)|^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}\delta} \exp\left(-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{\delta^2}\right).$$

Безразмерная спектральная ширина  $\delta = \Delta/\omega_c$  определяется полосой генерации  $\Delta$  источника однофотонного излучения.

Представленное уравнение (10) имеет типичную форму уравнения Линдблада и описывает эффекты релаксации и возбуждения системы. Однако его нельзя эвристически записать, не проделав вычисления, аналогичные случаю атомов [19] и случаю распада изолированного осциллятора в термостат [22], поскольку только прямым вычислением можно выделить интерференционные операторы взаимодействия, отражением которых служат безразмерные параметры  $\mu = 2\sqrt{2\pi}g\kappa(\hbar^2\omega_c^{3/2}\sqrt{\omega_0})^{-1}$ ,  $\sigma = 2\sqrt{2\pi}g\gamma_{cB}(\hbar^2\omega_c^{3/2}\sqrt{\omega_0})^{-1}$  и  $\chi = \sqrt{2\pi}\gamma_{cB}(\hbar\omega_c)^{-1}$ .

Сами интерференционные операторы не вошли в итоговое кинетическое уравнение для осцилляторной системы, поскольку в интерференции были задействованы широкополосные поля, которые стандартно „исключились“ при написании кинетического уравнения.

#### 4. Характеристики осцилляторов

На основе полученного уравнения (6) можно определить характеристики выделенных осцилляторов. Отметим, что динамика обеих подсистем — изолированного осциллятора, на который переносится состояние однофотонного пакета, и осциллятора-посредника, факторизуется, если в первоначальных состояниях отсутствовала запутанность. Поэтому обе подсистемы развиваются независимо друг от друга. Их нерезонансное взаимодействие между собой, а также взаимодействия с термостатом и однофотонным пакетом, продуцируют только изменение собственных частот рассматриваемых подсистем, описываемые следующими формулами:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_c &= \omega_c - \Pi_c(\omega_r) - \frac{\Pi_r(\omega_0)}{g^2} \int d\omega |\epsilon(\omega)|^2 - \frac{\gamma_{cB}^2}{2\hbar\omega_c}, \\ -\tilde{\omega}_r &= \omega_r - \Pi_r(\omega_c). \end{aligned}$$

Здесь возникают стандартные параметры АРТВ:

$$\begin{aligned} \Pi_c(\omega_r) &= \frac{g^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega_c + \omega_r} - \frac{1}{\omega_c - \omega_r} \right), \\ \Pi_r(\omega_c) &= \frac{g^2}{\hbar} \left( \frac{1}{\omega_c + \omega_r} + \frac{1}{\omega_c - \omega_r} \right). \end{aligned}$$

Динамика осциллятора-посредника в рассмотренных условиях сводится непосредственно только к его релаксации, обусловленной лишь его резонансным взаимодействием с вакуумным термостатом. Так, среднее число возбуждений  $\langle c^\dagger c \rangle(\tau) = Sp_S(c^\dagger c \rho^S(\tau))$  описывается стандартным выражением

$$\langle c^\dagger c \rangle(\tau) = \langle c^\dagger c \rangle_0 \exp(-\chi^2 \tau),$$

где  $\langle c^\dagger c \rangle_0$  — среднее число возбуждений осциллятора в начальный момент времени и, следовательно, начальное среднее экспоненциально затухает либо не развивается для начального вакуумного состояния. Нетрудно показать, что в случае взаимодействия с горячим термостатом, состояние которого подчиняется равновесному распределению, среднее число возбуждений осциллятора-посредника также определялось бы средней плотностью числа фотонов непосредственно термостата.

Динамика изолированного осциллятора обусловлена каналами релаксации, появляющимися исключительно вследствие квантовой интерференции альтернатив нелинейных взаимодействий этого осциллятора с осциллятором-посредником, осциллятора-посредника с однофотонным пакетом, так и выделенным гауссовым

характером самого однофотонного пакета. Подчеркнем, что эти слагаемые естественным образом возникают при применении АРТВ совместно с квантовыми стохастическими дифференциальными уравнениями при выводе кинетического уравнения для матрицы плотности открытой системы, благодаря учету всех быстро меняющихся слагаемых исходного гамильтониана взаимодействий [19,24,25]. Эти факторы приводят к следующему уравнению для матрицы плотности  $\rho^R$  изолированного осциллятора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^R}{\partial \tau} = & -\mathcal{K}(\tau)\mu^2(r^\dagger r \rho^R + \rho^R r^\dagger r - 2r \rho^R r^\dagger) \\ & - \frac{1}{2}\mathcal{K}(\tau)\mu^2\left(rr^\dagger - \frac{1}{2}\sigma^2(r^\dagger r \rho^R + \rho^R r^\dagger r - 2r \rho^R r^\dagger)\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Видно, что динамика изначально изолированного осциллятора определяется взаимодействием с однофотонным пакетом, который линейно взаимодействует с посредником, коэффициенты которого, однако зависят от времени, ввиду гауссова характера распределения одного фотона в частотном пакете. Кроме того, благодаря интерференции открывается канал непосредственной релаксации изолированного осциллятора в термостат осциллятора-посредника. Эта релаксация, однако, происходит в частотной полосе с центром на собственной частоте самого изолированного осциллятора, а не посредника.

Из уравнения (11) следует кинетическое уравнение динамики среднего числа возбуждений  $n = \langle r^\dagger r \rangle = \text{Sp}_R(r^\dagger r \rho^R)$  изолированного осциллятора:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + \left(\mathcal{K}(\tau)\mu^2 + \sigma^2\right)n = \mathcal{K}(\tau)\mu^2. \quad (12)$$

В рассматриваемом случае гауссов характер спектрального распределения широкополосного однофотонного пакета приводит к появлению нелинейного характера уравнения эволюции среднего числа возбуждений. Аналитическое решение уравнения (12) возможно в случае отсутствия (или возможностью пренебрежения) взаимодействия с вакуумным термостатом, когда  $\sigma^2 = 0$ . В этом случае среднее число возбуждений изолированного осциллятора определяется соотношением

$$n(\tau) = n_0 \mathcal{M}(\tau) + (1 - \mathcal{M}(\tau)), \quad (13)$$

где функция  $\mathcal{M}(\tau)$  определена характером спектрального распределения однофотонного пакета, описываемого функцией  $\mathcal{K}(\tau)$ , и имеет следующий явный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\tau) = & \exp\left(-\frac{4\mu^2}{\delta}\left[\frac{\delta\tau}{2}\text{erf}(\delta\tau/2)\right.\right. \\ & \left.\left. + \frac{\exp(-\delta^2\tau^2/4)}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\right]\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Заметим, что в рассматриваемом случае среднее число возбуждений изолированного осциллятора очевидно

стремится к своему стационарному значению и на больших временах выходит на уровень равный единице, так же как и в исходном однофотонном пакете. Поэтому в случае отсутствия взаимодействия с вакуумным резервуаром или возможности пренебрежения этим взаимодействием среднее число возбуждений передается от исходного однофотонного пакета к изолированному осциллятору полностью без изменений.

Покажем, что состояние изолированного осциллятора в рассматриваемом случае имеет гауссово распределение для координаты и импульса, считая для простоты его начальное состояние вакуумным. Доказательство этого факта можно привести двумя разными способами.

Во-первых, можно показать, что коммутант четвертого порядка  $k_q^{(4)} = \langle q^4 \rangle - 4\langle q \rangle \langle q^3 \rangle - 3\langle q^2 \rangle^2 + 12\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2 - 6\langle q \rangle^4$  для средних от оператора канонической координаты  $q$  точно равен нулю. Это следует из решений системы уравнений для средних, построенной на основе кинетического уравнения (11), которые при выбранном начальном условии имеют вид

$$\langle q \rangle = 0, \quad \langle q^3 \rangle = 0,$$

$$\langle q^2 \rangle = \frac{3}{2}(1 - \mathcal{M}(\tau)), \quad \langle q^4 \rangle = \frac{27}{4}(1 - \mathcal{M}(\tau))^2. \quad (15)$$

Во-вторых, вводя вигнеровское представление матрицы плотности

$$W(q, p, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp(-is p) \langle q + s | \rho | q - s \rangle,$$

определяющее функцию квазивероятности  $W(q, p, \tau)$  канонических сопряженных координаты и импульса для изолированного осциллятора:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W(q, p, \tau)}{\partial \tau} = & \left[\partial_q \left(\frac{\mathcal{K}(\tau)}{2}\mu^2 q\right) + \partial_p \left(\frac{\mathcal{K}(\tau)}{2}\mu^2 p\right)\right. \\ & \left.+ \left(\partial_q^2 + \partial_p^2\right)\left(\frac{3\mathcal{K}(\tau)}{4}\mu^2\right)\right] W(q, p, \tau). \end{aligned} \quad (16)$$

Представленное уравнение является уравнением Фоккера-Планка с положительно определенными диффузионными коэффициентами и коэффициентами сноса и не имеет смешанных производных. Это означает, что эволюция координаты и импульса осуществляется независимым образом, а их функциями распределения в используемом представлении являются гауссовы функции. Заметим, что из уравнения (16) естественным образом следуют решения (15) для приведенных средних.

Для определения статистических характеристик числа возбуждений изолированного осциллятора найдем нормально упорядоченное среднее  $\mathcal{Q} = \langle r^\dagger r^\dagger r r \rangle$ , одно-временное среднее которого подчиняется уравнению, следующему из (12) в случае отсутствия взаимодействия с вакуумным термостатом:

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial \tau} + 2\mathcal{K}(\tau)\mu^2 \mathcal{Q} = 4\mathcal{K}(\tau)\mu^2 n(\tau), \quad (17)$$

где функция  $n(\tau)$  определена решением (13). Решение для случая вакуумного начального состояния  $n_0 = 0$  изолированного осциллятора имеет простой вид

$$Q(\tau) = 2(1 - \mathcal{M}(\tau))^2, \quad (18)$$

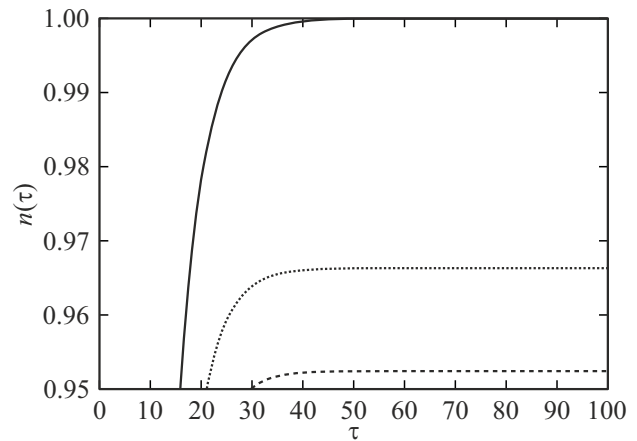
где функция  $\mathcal{M}(\tau)$  определена согласно (14).

С помощью представленных выражений можно проследить эволюцию параметра статистики  $\xi$  числа возбуждений изолированного осциллятора от времени. Этот параметр определяет отклонение статистики от стандартного квантового предела, заданного вакуумным и когерентным состояниями осциллятора, минимизирующими соотношение неопределенностей сопряженных компонент, для которого характерна пуассоновская статистика регистрируемого числа возбуждений, дисперсия которого в этом случае равна  $\Delta n^2 = \langle r^\dagger r^\dagger r r \rangle - \langle r^\dagger r \rangle^2 = n$ . Представленный параметр статистики характеризует отклонение от нормированной на уровень стандартного квантового предела в дисперсии числа возбуждений:

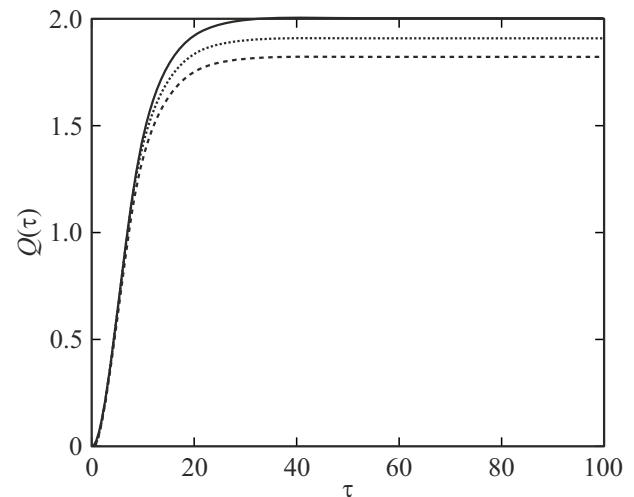
$$\frac{\Delta n^2}{n} = 1 + \xi. \quad (19)$$

При этом значение  $\xi = 0$  отвечает когерентному состоянию осциллятора, при  $\xi > 0$  статистика оказывается суперпуассоновской, а случай  $\xi < 0$  отвечает субпуассоновской статистике числа возбуждений. В рассматриваемом случае дисперсия среднего числа возбуждений осциллятора  $\Delta n^2 = n^2 + n$  и параметр статистики принимает в данном случае значение  $\xi = n$ .

Представленная аналитическими решениями ситуация передачи возбуждения и свойств однофотонного пакета изолированному осциллятору является идеальной, наличие взаимодействия осциллятора с вакуумным термостатом осциллятора-посредника приводит к необходимости учета его необратимой релаксации, что в конечном итоге приводит к неидеальному переносу как самого возбуждения, так и статистических свойств исходного пакета. Это отчетливо видно из рис. 1 и 2, где представлена динамика развития и выхода на стационарные решения среднего числа возбуждений изолированного осциллятора и нормально упорядоченного среднего  $Q$  соответственно. На представленных графиках приведены решения как для случая полного отсутствия релаксации в вакуумный термостат — сплошные кривые, так и при учете такого взаимодействия — графики, представленные точками и штрихами. Для всех графиков положена спектральная ширина исходного однофотонного пакета, нормированная значением, равным единице. Очевидно, что учет взаимодействия систем с вакуумным термостатом приводит к неполной передаче как среднего значения числа возбуждений, так и изменению статистических свойств исходного гауссова пакета.



**Рис. 1.** Зависимость среднего числа возбуждений  $n(\tau)$  изолированного осциллятора от безразмерного времени  $\tau$ . Выбраны следующие значения параметров:  $\delta = 1$ ,  $\mu^2 = 0.1$ , сплошная кривая —  $\sigma^2 = 0$ , точки —  $\sigma^2 = 0.01$ , штрихи —  $\sigma^2 = 0.07$ .



**Рис. 2.** Зависимость нормально упорядоченного среднего  $Q = \langle r^\dagger r^\dagger r r \rangle$  изолированного осциллятора от безразмерного времени  $\tau$ . Выбраны следующие значения параметров:  $\delta = 1$ ,  $\mu^2 = 0.1$ , сплошная кривая —  $\sigma^2 = 0$ , точки —  $\sigma^2 = 0.005$ , штрихи —  $\sigma^2 = 0.01$ . Значение функции равно отвечает гауссову состоянию осциллятора.

## 5. Заключение

Следует заметить, что рассмотрение широкополосного однофотонного пакета, уединенное возбуждение которого распределено по гауссову закону, в качестве широкополосного термостата для других систем, на который он и действует, авторам не известно ни по постановке, ни по решению. При этом следует отметить следующие обстоятельства.

1. В настоящем смысле широкополосный однофотонный пакет термостатом не является, поскольку возможно полное поглощение фотона. Однако факт широкополосности так, как зачастую это делают в теории

открытых систем при их взаимодействии с термостатом, использован при вычислениях.

2. Такие широкополосные пакеты являются состояниями одиночного фотона при генерации широкополосных бифотонных полей [26,27]. Осуществление проекционного измерения над одним из фотонов пары однозначно свидетельствует о воздействии другого из них на выделенную открытую систему. При таком способе приготовления состояние анализируемого фотона существенно квантовое (с необходимым учетом его коммутационных соотношений) и не может быть интерпретировано никакими другими классическими источниками. В работе [27] приведен пример генерации широкополосных бифотонных полей в кристалле ниобата лития, где генерируется сигнальная волна на длине волны  $\lambda = 495 \text{ nm}$  с шириной спектра излучения  $\Delta\nu \approx 2.5 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ , что много больше скорости релаксации поля в оптических резонаторах.

3. Полученное уравнение динамики открытой системы вида (10) является уравнением, описывающим как линейное поглощение, так и линейное усиление системы на основе релаксационного оператора Линдблада. Оно получено для состояния квантового источника, поскольку само уравнение является проявлением коммутационных соотношений однофотонного источника. Гауссова огибающая источника продуцирует нелинейные эффекты, возникающие в системе. Близкая задача, где в качестве источника выступают классические поля, приводит к уравнению и решению принципиально иного вида. В качестве источников таких полей выступает обычное лазерное излучение с ослабленным числом фотонов, среднее значение которых снижено до единицы. Для их описания коммутационные соотношения неважны, поскольку их характеристики описываются здесь обычными  $c$ -числовыми функциями. В этом случае кинетическое уравнение для матрицы плотности открытой системы определяется только динамической частью (без учета взаимодействия с вакуумной составляющей) и имеет следующий вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = i\eta \left[ (r\mathcal{E}^*(\tau) + r^\dagger - \mathcal{E}(\tau)), \rho \right],$$

где  $\eta$  — константа связи,  $\mathcal{E}(\tau) = \int d\nu \epsilon(\nu) \langle a(\nu) \rangle \exp(i(\nu - 1)\tau)$ , а угловыми скобками обозначено среднее значение безразмерной амплитуды поля на данной частоте. Очевидно, что как вид самого приведенного уравнения, так и его решение отличаются от анализируемого в настоящей статье случая.

Мы показали, что в отсутствие или в пренебрежении вакуумным термостатом состояние однофотонного квантового широкополосного источника может быть перенесено на состояние изолированного осциллятора в рассмотренной системе. При резонансном воздействии на осциллятор возможна аналогичная передача ввиду полного отождествления вида кинетического уравнения (11) в этом случае. Такая картина наблюдается благодаря описанию осциллятора операторами типа

Бозе. Если в качестве уединенной системы выбрать одиночную модель атома, аналогичные результаты не возникают. Это связано с описанием атомной системы на основе операторов с коммутационными соотношениями, характерными для операторов углового момента. Именно они приводят к стационарному значению числа возбуждений, ограниченному величиной  $1/3$ . Эта величина оказывается такой же, как предельная заселенность переноса возбуждения в атомной цепочке [28], и как при возбуждении двухуровневого атома равновесным излучением со средним числом фотонов на резонансной частоте, равным единице [29]. Последнее обстоятельство можно также рассматривать как оправдание термина „термостат“ по отношению к широкополосному однофотонному пакету.

## Благодарности

Авторы выражают благодарность А.Д. Киселеву за проявленный интерес к работе и ряд полезных замечаний.

## Финансирование работы

Данная работа финансировалась за счет средств бюджета института и университета. Никаких дополнительных грантов на проведение данного конкретного исследования получено не было.

## Конфликт интересов

Авторы настоящей работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] F.V. Gubarev, I.V. Diakonov, M.Yu. Saigin, G.I. Struchalin, S.S. Straupe, S.P. Kulik. Phys. Rev. A, **102**, 012604 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevA.102.012604
- [2] С.А. Моисеев, Н.С. Перминов, А.М. Желтиков. Письма в ЖЭТФ, **115**, 353 (2022). DOI: 10.31857/S1234567822060039
- [3] G. Lindblad. Comm. Math. Phys., **48**, 119 (1976). DOI: 10.1007/BF01608499
- [4] V. Gorini, A. Frigerio, M. Verri, A. Kossakowski, E.S.G. Sudarshan. Rep. Math. Phys., **13**, 149 (1978). DOI: 10.1016/0034-4877(78)90050-2
- [5] A.B. Klimov, J.L. Romero, J. Delgado, L.L. Sanchez-Soto. J. Opt. B: Quantum Semiclassical Opt., **5**, 34 (2003). DOI: 10.1088/1464-4266/5/1/304
- [6] A. Levy, R. Kozloff. EPL, **107**, 20004 (2014). DOI: 10.1209/0295-5075/107/20004
- [7] S.E. Harris. Phys. Rev. A, **94**, 053859 (2016). DOI: 10.1103/PhysRevA.94.053859
- [8] А.М. Башаров. ЖЭТФ, **158**, 978 (2020). DOI: 10.31857/S004445102011019X
- [9] А.И. Трубилко, А.М. Башаров. Письма в ЖЭТФ, **111**, 632 (2020). DOI: 10.31857/S1234567820090104



- [10] F. Nicacio, T. Koide. Phys. Rev. E, **110**, 054116 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevE.110.054116
- [11] A.S. Trushechkin, I.V. Volovich. EPL, **113**, 30005 (2016). DOI: 10.1209/0295-5075/113/30005
- [12] А.Е. Теретёнков. Матем. заметки, **100**, 636 (2016). DOI: 10.4213/mzm11141
- [13] А.Е. Теретёнков. Точно решаемые задачи необратимой квантовой эволюции. Автореф. канд. дис., МГУ (2018).
- [14] T. Linowski, A. Teretenkov, L. Rudnicki. Phys. Rev. A, **106**, 52206 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevA.106.052206
- [15] С.А. Моисеев, Н.С. Перминов. Письма в ЖЭТФ, **111**, 602 (2020) DOI: 10.31857/S1234567820090050
- [16] A. Maignan, S.S. Khair, U. Singh et al. J. Indian Inst. Sci., **103**, 633 (2023). DOI: 10.1007/s41745-022-00330-z
- [17] Noh Kyungjoo, S.M. Girvin, Liang Jiang. Phys. Rev. Lett., **125**, 080503 (2020) DOI: 10.1103/PhysRevLett.125.0805
- [18] J. Wu, A.J. Brady, Q. Zhuang. Quantum, **7**, 1082 (2023). DOI: 10.22331/q-2023-08-16-1082
- [19] А.И. Трубилко, А.М. Башаров. ЖЭТФ, **153**, 726 (2018). DOI:10.7868/S004445101805005X
- [20] H.B.Z. Casimir. Proc. Kon. Neder. Akad. Wet., **51**, 793 (1948).
- [21] Jr. W.E. Lamb, R.C. Retherford. Phys. Rev., **72**, 241 (1947).
- [22] А.И. Трубилко, А.М. Башаров. Письма в ЖЭТФ, **110**, 505 (2019). DOI: 10.1134/S0370274X19190123
- [23] А.И. Трубилко, А.М. Башаров. ЖЭТФ, **157**, 74 (2020). DOI: 10.31857/S0044451020010083
- [24] A.I. Maimistov, A.M. Basharov. *Nonlinear optical waves* (Dordrecht, Kluwer Academic, 1999).
- [25] A.M. Basharov. Phys. Rev. A, **84**, 013801 (2011) DOI: 10.1103/PhysRevA.84.013801
- [26] K.G. Katamadze, N.A. Borshchevskaya, I.V. Dyakonov et al. Phys. Rev. A, **92**, 023812 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevA.92.023812
- [27] Г.Х. Китаева, М.В. Чехова, О.А. Шумилкина. Письма в ЖЭТФ, **90**, 190 (2009).
- [28] Х.В. Неркарян. ЖЭТФ, **89**, 1558 (1985).
- [29] Х.-П. Бройер, Ф. Петтручионе. *Теория открытых квантовых систем* (НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика“, М.-Ижевск, 2010).