17

О возможности обнаружения суперпозиции оптических вихрей при наличии отдельных искажающих факторов (гауссова шума, вращения и смещения изображения) с использованием нейронных сетей

© В.В. Чечеткин[1], А.В. Семенова[2,3], М.Б. Черняева[1,2], В.Л. Вакс[1,2,3]

[1] ННГУ им. Лобачевского,
Нижний Новгород, Россия
[2] ИФМ РАН,
Афонино, Россия
[3] ФТИ им. Иоффе,
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: elena@ipm.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 02.06.2025 г.
В окончательной редакции 22.08.2025 г.
Принята к публикации 03.09.2025 г.

Решена задача распознавания суперпозиции оптических вихрей при помощи нейронных сетей для их потенциального применения в связи, проведена оценка эффективности работы нейронной сети в условиях шума в приемном канале, вариаций ориентации и пространственного позиционирования изображений профилей интенсивности суперпозиции оптических вихрей.

Ключевые слова: пучки Лагерра-Гаусса, оптические вихри, орбитальный угловой момент, топологический заряд, оптическая связь, *free space optics*, *orbital angular momentum shiftkeying*, мультиплексирование, машинное обучение, сверточные нейронные сети, *LeNet*.

DOI: 10.61011/OS.2025.09.61765.8233-25

Введение

Работа посвящена рассмотрению такого явления, как скалярные оптические вихри или закрученные фотоны (т. е. фотоны, обладающие ненулевой проекцией орбитального углового момента (ОУМ) на направление распространения), а также решению задачи распознавания оптических вихрей при помощи нейронных сетей.

Стремительный технический прогресс требует увеличения пропускной способности, более высокой скорости, простоты установки и надежности работы сети передачи данных. Оптическая связь в свободном пространстве (FSO, *free space optical communications*), как новая технология связи, является одной из сетей передачи, отвечающих этим требованиям. Информация в системах FSO „записывается“ и передается, как модуляция некоторых параметров электромагнитных волн.

Известно, что электромагнитные волны обладают энергией, импульсом, а также угловым моментом. В ранних работах [1–3] рассматривается передача спинового момента импульса электромагнитной волны механической системе. Однако угловой момент фотонов определяется не только спиновой, но и орбитальной компонентой. Отдельные фотоны и пучки электромагнитных волн, соответствующие собственным значениям оператора проекции орбитального углового момента на направление распространения, называются закрученными пучками или скалярными оптическими вихрями. Так как ОУМ пучка электромагнитных волн определяется распределением фазы, интенсивности или поляризации в поперечном сечении пучка, то для формирования оптического вихря необходимо высококогерентное излучение и оптические системы, с высокой точностью преобразующие пучок. Поэтому детально изучить свойства таких пучков стало возможно лишь после появления лазеров. Большой интерес к оптическим вихрям появился в 1992 г. после публикации статьи Аллена и др. [4]. В этой статье авторы показали, что лазерные пучки с винтовым волновым фронтом (рис. 1) обладают определенным орбитальным угловым моментом, и предложили способы получения и детектирования таких пучков.

К подобным пучкам относятся точные и приближенные решения уравнения Гельмгольца в цилиндрических координатах: пучки Бесселя, бесселеподобные пучки, пучки Лагерра-Гаусса [5]. Все они с достаточной точностью являются потоками фотонов, находящихся в собственном состоянии оператора проекции ОУМ l [5], где $l = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$. Величину l также называют топологическим зарядом или числом закрученности [5]. Отметим, что проекция ОУМ может быть отлична от нуля также для сферических волн или пучков со специфическим распределением поляризации [6]. Однако данная работа сосредоточена на возможности распознавания суперпозиции оптических вихрей, что потенциально может быть использовано в системах связи. Поэтому основное вни-

мание будет уделено пучкам Лагерра-Гаусса: в отличие от сферических волн, они обладают определенным направлением распространения, а в отличие от истинных пучков Бесселя переносят конечную мощность и могут быть сформированы в реальной установке. Следует заметить, что интерес для систем связи могут представлять и бесселеподобные пучки [5], однако подробное их рассмотрение выходит за рамки текущей работы.

Итак, собственные состояния ОУМ, определяемые разными значениями топологического заряда, ортогональны друг другу. Количество таких состояний, как и топологический заряд, теоретически ничем не ограничены. Поэтому ОУМ является дополнительной степенью свободы, позволяющей увеличить информационную емкость фотона. Ряд перспективных технологий оптической связи основан на передаче информации с помощью оптических вихрей. Исследования показывают, что оптические вихри позволяют достичь высоких скоростей передачи данных, а также могут использоваться для повышения эффективности и пропускной способности сети передачи данных, в том числе в системах FSO. Исследования каналов связи с использованием ОУМ пучков проводятся от миллиметрового до оптического диапазонов. В канале связи с использованием четырех мультиплексированных режимов ОУМ пучков и двух поляризаций была достигнута скорость передачи 32 Gbit/s на 28 GHz, а комбинирование мультиплексирования ОУМ с обычным пространственным мультиплексированием в линии связи миллиметрового диапазона (28 GHz) продемонстрировало скорость 100 Gbit/s. В ТГц диапазоне экспериментально продемонстрирована система, объединяющая поляризационно-разделительное мультиплексирование (PDM), частотно-разделительное мультиплексирование (FDM) и ОУМ и обеспечивающая мультиплексирование 8 каналов данных с общей скоростью передачи данных 32 Gbit/s на несущей частоте ~ 300 GHz. [7] Более высокие скорости передачи данных достигнуты в оптическом диапазоне. Например, в работе [8] была достигнута скорость передачи данных 1.6 Tbit/s при передаче по оптическому волокну длиной 1.1 km. В другом исследовании [9] использование оптических вихрей позволило добиться скорости передачи данных до 2.56 Tbit/s. Для разработки каналов связи на основе ОУМ, работающих в различных частотных диапазонах (акустических, радио, миллиметровых, терагерцовых, оптических), необходимо находить компромисс между эффектами расхождения луча и взаимодействием распространяющегося электромагнитного излучения со средой.

Для определения ОУМ пучка обычно используются различные интерференционные и дифракционные методы. Например, при интерференции плоской волны и оптического вихря образуется система полос, одна из которых разветвляется наподобие „вилки“; структура такой точки ветвления определяется топологическим зарядом пучка. При интерференции пучков с равными по модулю и противоположными по знаку топологическими зарядами формируется характерная многолепестковая структура. Однако с ростом значения топологического заряда такие интерференционные картины становится трудно различить. Для распознавания подобных структур перспективно использование нейронных сетей, например, при исследовании эволюции структуры пространственных мод при их распространении на 143 km по атмосферному каналу интерференционные картины, образующиеся при суперпозиции различных мод, различались с использованием искусственной нейронной сети [10]. Для практического применения оптических вихрей в системах связи необходимо исследование влияния реальных условий (турбулентность, шумы), вносящих искажения в сигнал при передаче по каналу связи, на прием сигнала. Методы машинного обучения с использованием сверточных нейронных сетей на примере моделирования распространения сигналов, в которых кодировка осуществлялась с использованием оптических вихрей, в свободном пространстве в условиях моделируемой атмосферной турбулентности, а также гауссова шума и последующее демультиплексирование на основе распознавания интенсивности мультиплексированных ОУМ пучков представлены в [11]. В [12] демультиплексирование на основе распознавания интенсивности мультиплексированных ОУМ пучков в условиях атмосферной турбулентности реализовывалось путем гибридной оптико-электронной нейронной сети, где использовался один-единственный сверточный слой для реализации полной операции свертки оптики Фурье, интегрирующейся с текущей оптической установкой, что дало преимущество по сравнению с нейронными сетями с более сложными структурами, поскольку свертка остается основным компонентом вычислительного процесса сверточной нейронной сети, так как доля затрат вычислительных ресурсов на ее использование была ниже.

Следует заметить, что в соответствии с теоремой Шеннона шумы в системах связи не только определяют чувствительность приемника к слабым сигналам, но и ограничивают скорость передачи информации. Целью работы является решение задачи распознавания суперпозиции оптических вихрей при помощи нейронных сетей для их потенциального применения в связи, а также оценка эффективности работы нейронной сети в условиях шума в приемном канале, а также вариаций ориентации и пространственного позиционирования изображений профилей интенсивности суперпозиции двух оптических вихрей.

Теоретические сведения об оптических вихрях

Известно [13], что волновое уравнение в параксиальном приближении — это упрощенная форма уравнения Гельмгольца (1):

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{1}$$

где $k = \omega/c$ — волновое число, Δ — оператор Лапласа. При параксиальном приближении волна распространяется под малыми углами по отношению к оси распространения (например, оси z), и волновое уравнение сводится к следующему выражению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u + 2jk\frac{\partial u}{\partial z} = 0. \qquad (2)$$

Решение волнового уравнения (2) обычно представляют в виде разложения по собственным модам. Существует несколько равнозначных наборов собственных мод. Для описания оптических вихрей используются решения Лагерра-Гаусса. Распределение поперечной компоненты векторного потенциала магнитного поля в пучках Лагерра-Гаусса в цилиндрических координатах выглядит следующим образом [14]:

$$u_{p,l}(r,\varphi,z) = \sqrt{\frac{2p!}{\pi w^2(z)(p+|l|)!}}\left[\frac{r\sqrt{2}}{w(z)}\right]^{|l|}$$
$$\times L_p^{|l|}\left(\frac{2r^2}{w^2(z)}\right)\exp\left[\frac{-r^2}{w^2(z)}\right]\exp\left[\frac{jkr^2z}{2(z^2+z_R^2)}\right]$$
$$\times \exp\left[-j(2p+|l|+1)\tan^{-1}\left(\frac{z}{z_R}\right)\right]\exp(jl\varphi), \qquad (3)$$

где $w(z) = w_0[(z^2+z_R^2)/z_R^2]^{1/2}$ — радиус пучка, w_0 — минимальная ширина пучка, z_R — длина Рэлея, k — волновое число, p — неотрицательное целое число (радиальный индекс), $l \in Z$ — топологический заряд, $L_p^{|l|}(x)$ — обобщенный полином Лагерра, который можно вычислить по формуле:

$$L_p^{|l|}(x) = \frac{x^{-|l|}e^x}{p!}\frac{d^p}{dx^p}(e^{-x}x^{p+|l|}).$$

Именно множитель $\exp(il\varphi)$ в (3), содержащий азимутальную зависимость фазы, формирует закрученный волновой фронт. На рис. 1 показано смоделированное распределение фазы и интенсивности пучков Лагерра-Гаусса при различных значениях топологического заряда l и радиального индекса p в плоскости $z = 0$. Моделирование производилось с использованием языка программирования *Python* при помощи библиотек *NumPy* [15] и *Matplotlib* [16].

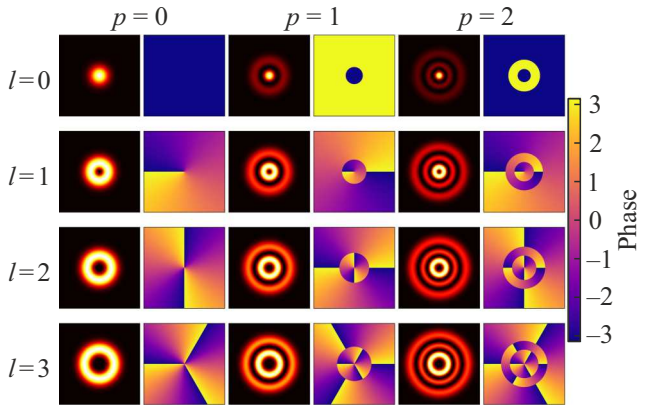

Рис. 1. Распределение интенсивности и фазы различных мод Лагерра-Гаусса при $z = 0$.

Модуляция при помощи ОУМ

Важнейшим элементом в разработке канала связи является выбор методов модуляции, которые постоянно совершенствуются. Одним из перспективных методов является модуляция с орбитальным угловым моментом (OAM-SK, *orbital angular momentum-shiftkeying*).

В оптической системе связи каждая мода ОУМ, соответствующая своему топологическому заряду l, может представлять собой уникальный символ. Присваивая каждому уникальному значению l определенную битовую последовательность, можно передавать сигнал, который несет информацию, закодированную при помощи отдельных мод ОУМ. Например:

1) $l = 0$ соответствует битовой последовательности „00“,
2) $l = 1$ соответствует „01“,
3) $l = -1$ соответствует „10“,
4) $l = 2$ соответствует „11“.

В этом случае каждая мода ОУМ несет 2 bits информации. Соответственно, чем больше различных состояний ОУМ мы используем, тем больше информации может быть закодировано в каждом фотоне. Например, при использовании 16 состояний ОУМ каждый пучок может нести 4 bits информации.

Таким образом, OAM-SK может обеспечить высокую скорость передачи данных, используя уникальные свойства пучков с ненулевым ОУМ и связанное с ними значение топологического заряда l.

В случае суперпозиции двух оптических вихрей принимаемый сигнал имеет специфичный профиль интенсивности. Для обработки такого сигнала в приемной системе можно использовать нейронные сети [10]. Однако присутствующий в реальных условиях шум искажает принимаемую картину. В представленной работе рассматривается применение сверточной нейронной сети при обработке суперпозиции двух оптических вихрей и оценка эффективности ее применения при наличии шума в приемном канале. Сверточные нейронные сети способны работать со сложными и зашумленными данными, что отличает их от традиционных методов (например, вычисление корреляции), которые менее надежны при наличии искаженных данных.

Нейронные сети могут использоваться для разделения входных данных по классам. Сверточная нейронная сеть дает на выходе вероятность, с которой входные данные можно отнести к каждому классу; класс с наибольшей вероятностью считается предсказанием модели. В нашем случае каждая суперпозиция пучков с

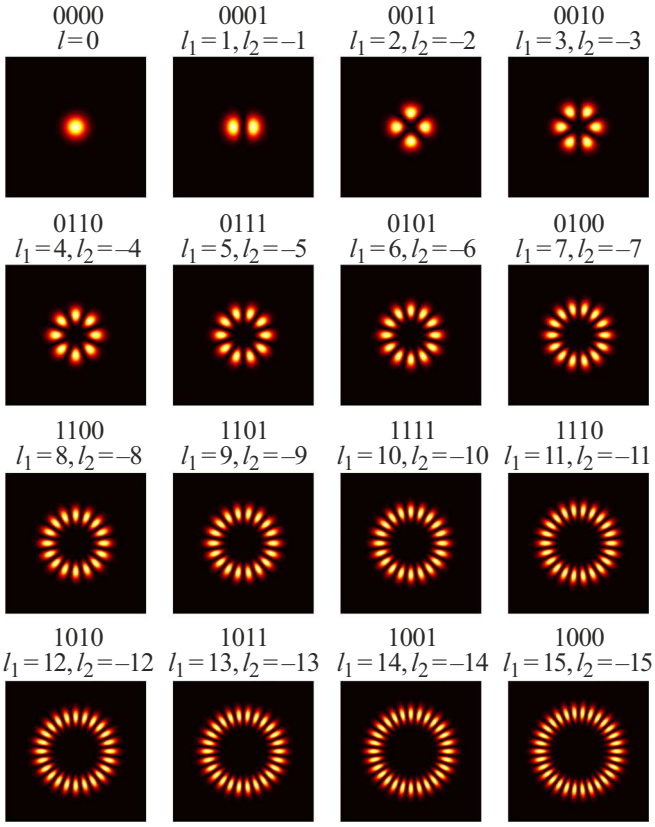

Рис. 2. Профили интенсивности суперпозиции двух оптических вихрей с топологическими зарядами l_1 и l_2 ($l_1 = -l_2$) и возможные соответствующие им битовые последовательности. Каждая суперпозиция соответствует своему классу.

топологическими зарядами l_1 и l_2 относится к своему классу l ($l = l_1 = -l_2 = 0, 1, 2 \ldots 15$), т. е. всего имеется 16 классов (рис. 2).

Используемые инструменты для проведения моделирования

Для реализации поставленной цели в работе в качестве основного языка программирования был выбран *Python*. Использование данного языка обосновывается тем, что он прост, универсален и обладает обширным набором библиотек, которые упрощают разработку и позволяют решать широкий спектр задач.

Моделирование оптических вихрей и обучение нейронной сети (рис. 3) выполнялось при помощи следующих библиотек:

1) *NumPy* [15] — библиотека для вычислений на *Python*. Она обеспечивает поддержку больших многомерных массивов и матриц, а также набор математических функций для эффективного выполнения операций над этими массивами.

2) *Matplotlib* [16] — библиотека для *Python*, позволяющая создавать высококачественные статические, анимированные и интерактивные визуализации данных. Она

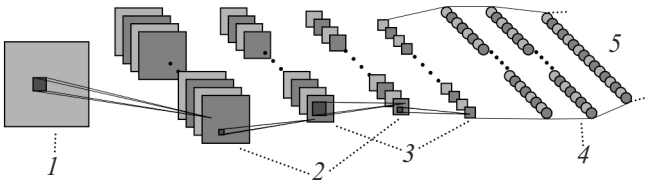

Рис. 3. Архитектура сверточной нейронной сети *LeNet* [18]. *1* — входное изображение, *2* — карты признаков, *3* — субдискретизованные карты признаков, *4* — полносвязная нейронная сеть, *5* — выход нейронной сети.

имеет большие возможности настройки и поддерживает широкий спектр типов графиков, таких как линейные графики, гистограммы, диаграммы рассеяния и тепловые карты.

3) *PyTorch* [17] — библиотека машинного обучения с открытым исходным кодом. Она широко используется для задач глубокого обучения благодаря своей адаптируемости и позволяет легко модифицировать модели. *PyTorch* предоставляет обширные инструменты для тензорных вычислений (аналогично *NumPy*), а также поддержку вычислений на GPU.

Подготовка набора данных для обучения нейронной сети

В типичной архитектуре сверточной нейронной сети входное изображение проходит через ряд слоев, создающих карты признаков. Карты признаков генерируются в процессе свертки фильтра (матрицы), разработанного или обученного для обнаружения определенного шаблона с входными данными (или картой признаков из предыдущего слоя). Сверточный слой использует несколько фильтров, каждый из которых создает свою собственную карту признаков, тем самым захватывая разнообразный набор признаков из ввода. Модель нейронной сети, которая используется в данной работе, основана на архитектуре *LeNet* (рис. 3) [18]. Архитектура *LeNet* была изначально разработана для распознавания рукописных цифр. Эта модель относительно проста и состоит из двух сверточных слоев, двух слоев max-пулинга (понижение частоты дискретизации, используемое для уменьшения пространственных размеров входного объема) и трех слоев полносвязной нейронной сети. Выходной слой нейронной сети содержит 16 нейронов, каждый из которых соответствует одному из классов.

Одной из проблем при обучении нейронных сетей является создание обучающих и тестовых наборов данных. Создание наборов реальных размеченных данных для обучения является крайне трудо- и времязатратным процессом, поэтому для обучения нейронных сетей в большинстве случаев используются синтетические данные. Созданию алгоритмов синтеза обучающих данных, а также выявлению возможных проблем и повышению реалистичности синтезируемых обучающих данных

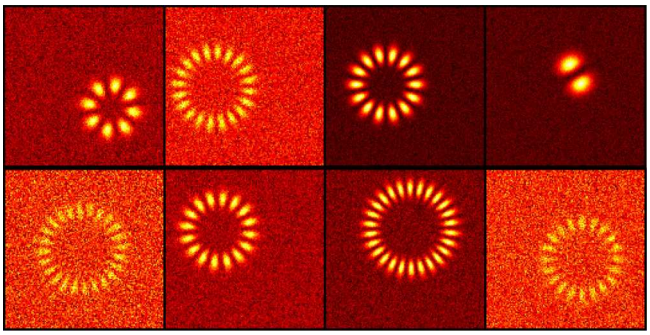

Рис. 4. Примеры данных, используемых при обучении и тестировании нейронной сети.

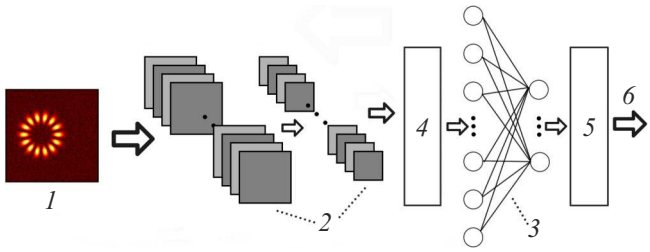

Рис. 5. Принцип работы нейронной сети: *1* — входное изображение; *2* — карты признаков; *3* — полносвязная нейронная сеть; *4* — векторизация; *5* — выбор нейрона с максимальным выходным значением; *6* — определение принятой суперпозиции (например, 8-й нейрон относится к суперпозиции $l = \pm 7$) по выбранному нейрону.

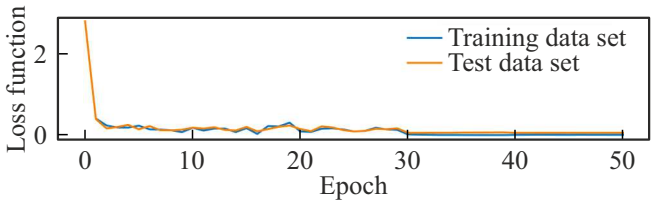

Рис. 6. Процесс обучения нейронной сети. Выход нейронной сети представляет собой ненормализованные вероятности принадлежности к каждому классу, поэтому функция потерь будет безразмерна.

посвящён целый пласт работ, например [19,20]. Хотя синтетические данные не могут учесть всех искажающих факторов, присутствующих в реальных данных, расширение и модифицирование набора синтезируемых данных путём добавления данных, построенных с учётом отдельных причин искажений (шумы, вращения изображения, смещение и т. п.), повышает реалистичность обучающей выборки и выборки для тестирования [20].

Для обучения были созданы два больших набора данных: 48000 изображений для обучения и 19200 изображений для проверки эффективности и достоверности модели (тестовые данные) (рис. 4). Чтобы убедиться, что модель хорошо обобщается на данные, приближенные к реальным, и справляется с вариациями данных, к изображениям было применено несколько методов увеличения выборки данных. В частности, в изображения был добавлен аддитивный белый гауссовский шум. Отношение сигнал-шум (ОСШ) варьируется в диапазоне от -15 dB до 15 dB, что имитирует различные уровни искажения сигнала и обеспечивает хорошую работу модели в условиях шума. Кроме того, для учета вариаций ориентации и пространственного позиционирования изображения подвергались случайным поворотам и случайным смещениям. Такие дополнения позволили модели обучаться и адаптироваться к широкому спектру возможных входных данных.

Результаты

На рис. 5 показан принцип работы нейронной сети при распознавании суперпозиции оптических вихрей. На вход подается изображение суперпозиции двух оптических вихрей, а на выходе 16 нейронов представляют собой вероятность принадлежности к одному из классов. Соответственно, нейрон, обладающий наибольшим выходным значением, считается предсказанием модели.

На рис. 6 показан процесс обучения нейронной сети. Эффективность нейронной сети характеризуется функцией потерь, которая определяет отклонения предсказаний модели от „истинных“ предсказаний. Другими словами, функция потерь отслеживает степень ошибки в выходных данных нейронной сети. Простейшим примером может служить квадратичная функция потерь:

$$E = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N}(y_i - a_i)^2,$$

где N — число классов, y_i — результат на выходе нейронной сети, a_i — ожидаемый результат. Для обучения нейронной сети в *PyTorch* в качестве функции потерь использовалась перекрестная энтропия (*CrossEntropyLossFunction*) [14], которая хорошо подходит для задач классификации.

На начальных этапах обучения функция потерь должна постепенно уменьшаться. Это говорит о том, что модель начинает учиться и корректирует свои веса на основе ошибки. Когда функция потерь перестает сильно изменяться или достигает плато, то это может указывать на то, что модель достигла определенного уровня эффективности, и дальнейшее обучение не даст значительных улучшений. В таком случае, например, если на протяжении 15–20 эпох (эпоха — один цикл обучения на наборе данных) функция потерь изменяется не более чем на некоторое малое значение (например, 0.01), то можно остановить обучение. В нашем случае процесс обучения занял порядка 50 эпох.

Значения точности обученной модели высоки как в обучающем наборе данных (рис. 7, *a*), так и в тестовом (рис. 7, *b*), в основном в диапазоне от 96.2 до 99.8 %,

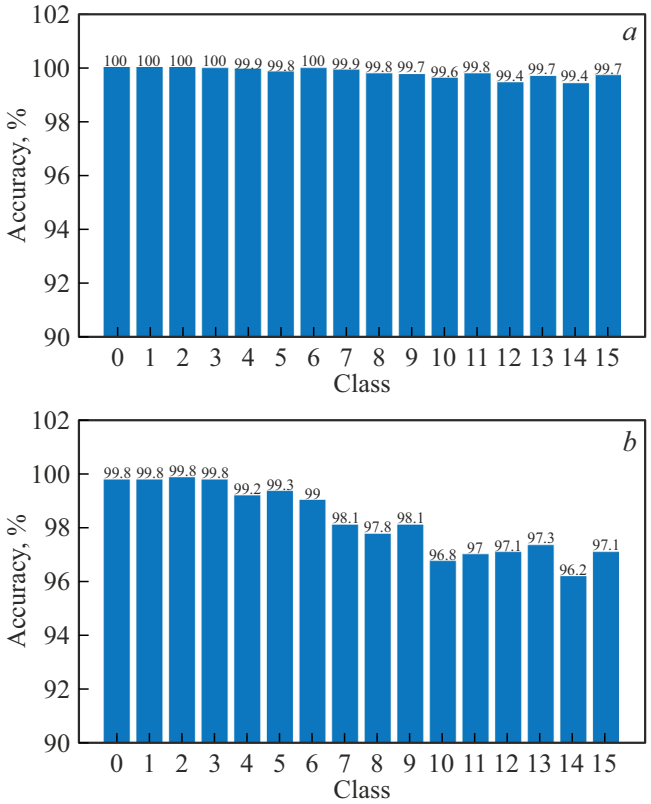

Рис. 7. Эффективность работы сети на данных для обучения (a) на тестовых данных (b).

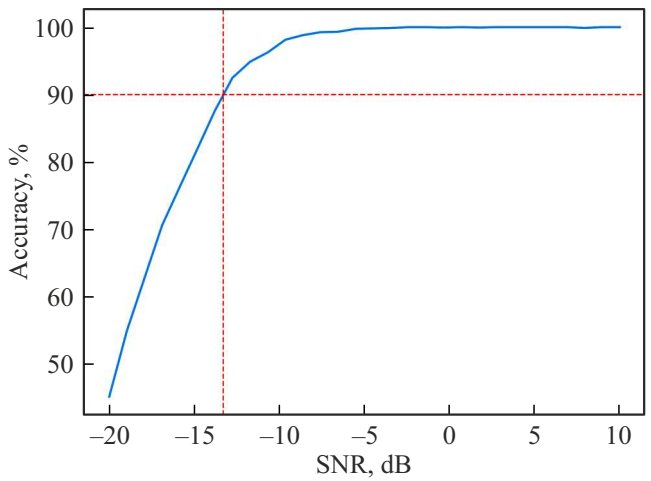

Рис. 8. Эффективность работы сети в зависимости от ОСШ. Значения точности получены при усреднении 1600 реализаций на каждое значение ОСШ. Штриховыми линиями отмечена граница ОСШ, при которой точность сети достигает 90%.

что указывает на то, что нейронная сеть в целом работает хорошо ($A_i = 100 \times \frac{M_i}{N_i}$ — точность для класса $i = 0, 1 \ldots 15$, где M_i — число верных предсказаний, N_i — размер выборки). Это говорит о том, что модель изучила основные паттерны входных данных и смогла обобщить их.

Можно заметить, что с входными данными, соответствующими более высоким значениям топологического заряда (классы с более высоким порядковым номером), сеть справляется хуже. Это можно объяснить тем, что при таких значениях топологического заряда труднее распознать более мелкие детали на профиле интенсивности, особенно в условиях шума. Таким образом, хотя теоретически максимальный топологический заряд пучка ничем не ограничен, однако на практике максимальное возможное значение топологического заряда определяется уровнем шумов и требованиями к допустимым ошибкам распознавания конкретной системы.

На рис. 8 показана эффективность работы сети в зависимости от ОСШ. Видно, что по мере увеличения ОСШ модель работает точнее. Из графика на рис. 8 можно сделать вывод, что нейронная сеть способна эффективно работать (её точность выше 90 %) при значениях ОСШ выше −13 dB.

Заключение

В настоящей работе было реализовано решение задачи распознавания суперпозиции оптических вихрей при помощи сверточной нейронной сети для их потенциального применения в связи, а также оценена эффективность работы данного метода в условиях шума.

Используемая нейронная сеть на основе архитектуры *LeNet*, обученная и протестированная на наборах данных из более чем нескольких десятков тысяч изображений суперпозиции вихрей с добавлением аддитивного белого гауссова шума, а также подвергнутых случайным поворотам и случайным смещениям, смогла адаптироваться к входным данным. Значения точности оказались высоки как в обучающем (до 99.8 %), так и в тестовом (до 96.2 %) наборах данных. В частности, при тестировании обученной модели было установлено, что она способна эффективно справляться с задачей распознавания суперпозиции оптических вихрей при значениях ОСШ выше −13 dB. При таких значениях ОСШ точность распознавания выше 90 %.

Следует заметить, что вероятность ошибочного распознания увеличивается с ростом топологического заряда. Соответственно, хотя теоретических ограничений на топологический заряд нет, было обнаружено практическое ограничение, определяющееся уровнем ОСШ и допустимой вероятностью ошибки классификации конкретной системы. В некотором роде данное ограничение следует из теоремы Шеннона для системы связи на оптических вихрях: для заданного уровня шума оно определяет информационную емкость фотона и, соответственно, максимально возможную скорость передачи информации. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем проектировании систем связи на основе оптических вихрей.

Благодарности

Авторы статьи выражают благодарность Е.Г. Домрачевой за плодотворное обсуждение материалов статьи.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-72-30020-П, https://rscf.ru/project/21-72-30020/.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] А.И. Садовский. Ученыя записки Императорскаго Юрьевскаго Университета, **1**, 1–126 (1899).
[2] J.H. Poynting. Proc. R. Soc. Lond. A, **82**, 560–567 (1909). DOI: 10.1098/rspa.1909.0060
[3] R.A. Beth. Phys. Rev., **50** (2), 115–125 (1936). DOI: 10.1103/PhysRev.50.115
[4] L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman. Phys. Rev. A, **45** (11), 8185–8189 (1992). DOI: 10.1103/physreva.45.8185
[5] Б.А. Князев, В.Г. Сербо. УФН, **188**, 508–539 (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2018.02.038306 [B.A. Knyazev, V.G. Serbo. Phys. Usp., **61**, 449–479 (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2018.02.038306].
[6] X.-L. Wang, J. Chen, Y. Li, J. Ding. Phys. Rev. Lett., **105**, 253602 (2010).
[7] A.E. Willner, K. Pang, H. Song, K. Zou, H. Zhou. Appl. Phys. Rev., **8** (4), 041312 (2021). DOI: 10.1063/5.0054885
[8] N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A.E. Willner, S. Ramachandran. Science, **340** (6140), 1545–1548 (2013). DOI: 10.1126/science.1237861
[9] J. Wang, J.-Y. Yang, I.M. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A.E. Willner. Nat. Photonics, **6** (7), 488–496 (2012). DOI: 10.1038/nphoton.2012.138
[10] M. Krenn, J. Handsteiner, M. Fink, R. Fickler, R. Ursin, M. Malik, A. Zeilinger. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, **113** (48), 13648–13653 (2016). DOI: 10.1073/pnas.1612023113
[11] T. Doster, A.T. Watnik. Appl. Opt., **56** (12), 3386–3396 (2017). DOI: 10.1364/AO.56.003386
[12] J. Ye, H. Kang, Q. Cai, Z. Hu, M. Solyanik-Gorgone, H. Wang, E. Heidari, Ch. Patil, M.-A. Miri, N. Asadizanjani, V. Sorger, H. Dalir. Commun. Phys., **7**, 105 (2024). DOI: 10.1038/s42005-024-01571-3
[13] Х. Хаус. *Волны и поля в оптоэлектронике*. Пер. с англ. (Мир, М., 1988).
[14] A.M. Yao, M.J. Padgett. Adv. Opt. Photon., **3**, 161–204 (2011). DOI: 10.1364/AOP.3.000161
[15] C.R. Harris, K.J. Millman, S.J. van der Walt et al. Nature, **585**, 357–362 (2020). DOI: 10.1038/s41586-020-2649-2
[16] J.D. Hunter. CiSE, **9** (3), 90–95 (2007). DOI: 10.1109/MCSE.2007.55
[17] J. Ansel, E. Yang, H. He et al. In: ASPLOS '24: Proceedings of the 29th ACM International Conference on Architectural Support for Programming Languages and Operating Systems, **2**, 929–947 (2024). DOI: 10.1145/3620665.3640366
[18] R.C. Gonzalez, R.E. Woods. *Digital image processing*, 4th ed. (Global ed., Pearson Education, 2018).
[19] С.Ю. Пчелинцев, М.А. Ляшков, О.А. Ковалёва. Информационно-управляющие системы, **3**, 9–19 (2022). DOI: 10.31799/1684-8853-2022-3-9-19
[20] А.В. Парасич, В.А. Парасич, И.В. Парасич. Информационно-управляющие системы, **4**, 61–70 (2021). DOI: 10.31799/1684-8853-2021-4-61-70