10

Управляемые фазовые пластины на основе неоднородно-анизотропных нематических жидких кристаллов

© Л.С. Асланян, А.Э. Айвазян

Ереванский государственный университет,
Ереван, Республика Армения

e-mail: leon@ysu.am

Поступила в редакцию 20.05.2025 г.
В окончательной редакции 15.09.2025 г.
Принята к публикации 16.09.2025 г.

Рассмотрены особенности распространения поляризованного света в тонком слое нематического жидкого кристалла в присутствии электростатического поля, возмущающего однородность распределения директора (единичного вектора, параллельного локальной оптической оси). Анализ проведен методом квазиизотропного приближения геометрической оптики. С единых позиций получены приближенные уравнения, их решения и аналитические выражения для параметров Стокса. С помощью полученных выражений проанализированы пространственная эволюция состояния поляризации света внутри образца, зависимость состояния поляризации выходящего света от величины приложенного поля, а также возможности таких управляемых фазовых пластинок различного назначения.

Ключевые слова:

DOI: 10.61011/OS.2025.09.61762.8190-25

1. Введение

Трудно переоценить роль поляризации света в современной оптике и фотонике. Поляризационные элементы важны в интерферометрах и модуляторах света, в спектроскопии, в лазерах и лазерных системах. В нелинейной оптике поляризационные методы имеют решающее значение для обеспечения фазового согласования процессов, а также для анализа тензорных свойств нелинейных оптических восприимчивостей разного порядка. Поляризация света важна также для жидких кристаллов (ЖК), которые являются частью нашей повседневной жизни [1–3].

В современной оптоэлектронике и фотонике для оптических элементов, управляющих состоянием поляризации света (фазовых пластин или фазосдвигающих элементов) применяются различные среды. В их числе чистые и примесные ЖК, периодические среды с металлическими и диэлектрическими покрытиями, анизотропные и бианизотропные среды и др.

Для существенного расширения возможностей таких фазовых пластин и их применения в различных управляемых элементах используют среды с наведенной неоднородностью анизотропии. Управление таких систем может осуществляться электрическими, магнитными и акустическими, а также световыми полями [4–8]. Одним из легкоуправляемых элементов являются чистые и примесные ЖК-структуры. Переориентация директора нематического жидкого кристалла (НЖК) влечет к перераспределению оптической оси НЖК по всему обьему, т. е. к локальной неоднородности анизотропии. С точки зрения практического применения важна возможность внешнего управления такой неднородностью анизотропии. К примеру, в [9] исследованы особенности отражения и преломления света в ЖК-среде в присутствии электрического поля и проведено последовательное описание эффектов, связанных с точками поворота, наличие которых приводит к появлению запрещенных зон, трансформации мод, эффектам просачивания и надбарьерного отражения. В [10] исследовано воздействие электрического поля на локальную ориентацию директора, которое сопровождается изменением электрической емкости исследуемой ячейки. Заметим, такой емкостной метод исследования (т. е. метод измерения электрической емкости ЖК ячеек при различных напряжениях) применяется для исследования диэлектрических и магнитных свойств НЖК.

Целью настоящей работы является теоретический анализ влияния неоднородного распределения директора на пространственную эволюцию поляризации света методом квазиизотропного приближения геометрической оптики (ГО) [11,12] и на основе полученных результатов рассмотрение возможностей их использования в качестве управляемых фазовых пластин различного назначения.

2. Система уравнений в квазиизотропном приближении

В рассматриваемых далее НЖК наиболее часто встречаются неоднородности анизотропии, наведенные с помощью внешних полей. В дальнейшем, для конкретности, обсудим только случай электростатического поля, так как механизм наведения неоднородности анизотро-

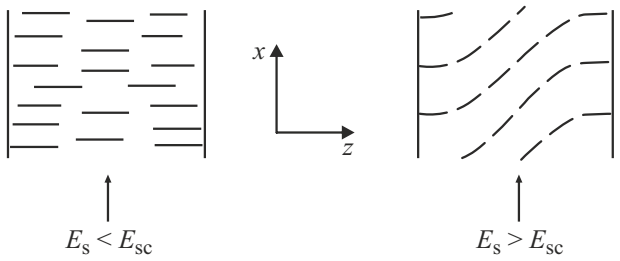

Рис. 1. Распределение директора при эффекте Фредерикса.

пии роли не играет. Очевидно, что наведенная неоднородность анизотропии существенно влияет на процесс распространения световой волны в такой среде. В связи с этим актуален анализ эволюции поляризации света при распространении в такой неоднородно анизотропной среде. Хотя и это хорошо исследованная задача, в частности методом ГО, здесь мы применим другой метод — метод квазиизотропного приближения ГО [11,12], которое позволяет представить аналитическое решение задачи в более симметричной и удобной для анализа аналитической форме. Ранее этот метод применялся относительно ЖК с твист-ориентацией ([13–17] и приведенные в этих работах ссылки).

Исследуем распространение плоской монохроматической волны в непоглощающей слоисто неоднородной анизотропной среде. В качестве такой среды рассмотрим гомеотропно ориентированный НЖК, в котором имеется неоднородность анизотропии, созданная электростатическим полем [18]. Заметим, с учетом малой толщины НЖК-слоя искривлением луча при распространении можно пренебречь (т. е. пренебречь продольной составляющей электрического поля, возникающего из-за деформации директора НЖК). Лабораторную систему координат выберем так, чтобы ось z совпадала с направлением распространения волны. Ось x выбирается сонаправленной внешнему электростатическому полю, а y соответственно перпендикулярно плоскости xz так, чтобы x, y, z образовали правовинтовую систему координат (рис. 1). Обычно для решения таких задач волновое уравнение приводится к двумерному виду ([14–17] и ссылки в этих работах). В случае нормального падения на такую среду (параллельно оси z) двумерное волновое уравнение для составляющих E_x и E_y имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2E_i(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}h_{ij}(z)E_j(z) = 0, \\ i, j = x, y. \end{array} \right\} \tag{1}$$

Двумерный тензор h_{ij},

$$h_{ij}(z) = \varepsilon_{ij} - \frac{\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{jz}}{\varepsilon_{zz}}, \tag{2}$$

непосредственно связан с трехмерным тензором диэлектрической проницаемости и характеризует оптические свойства среды. Как известно, диэлектрическая проницаемость НЖК представляется в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_o\delta_{ij} + \varepsilon_a m_i(z)m_j(z),$$

где $m_i(z)$ — составляющие директора, описывающие локальную ориентацию оптической оси, δ_{ij} — символ Кронекера, $\varepsilon_a = \varepsilon_e - \varepsilon_o$ — анизотропия НЖК, ε_e, ε_o — главные значения тензора ε_{ij} [18]. В рассматриваемых далее структурах деформация директора происходит в плоскости xz, т. е.

$$\mathbf{m}(z) = \{\sin\theta(z), 0, \cos\theta(z)\}, \tag{2a}$$

где θ — угол между направлением директора и осью z. Во многих важных задачах в слоисто неоднородной среде диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{ij}(z)$ — плавно меняющаяся функция вдоль оси z, и применение приближенных методов, в частности метода ГО, вполне оправдано. Действительно, приближение ГО применимо, если $\lambda d\varepsilon/dz \ll \varepsilon$ [11]. Нетрудно проверить, например, что для световых волн в НЖК МББА ($\varepsilon_e = 3.22$; $\varepsilon_0 = 2.43$,[18]) это условие удовлетворяется при $L \gg 0.4\,\mu$m, где L — толщина слоя ЖК, т. е. практически всегда. В квазиизотропном приближении (КИП) появляется дополнительное требование. В основе КИП лежит предположение, что электромагнитное поле в нулевом приближении имеет поперечную структуру, как и в изотропном случае, т. е. тензор анизотропии

$$\nu_{ik} = h_{ik} - \varepsilon\delta_{ik}$$

также удовлетворяет условию малости: $\max|\nu_{ik}| \ll 1$, где

$$\varepsilon = \frac{1}{2}Sph_{ik}$$

— и изотропная часть тензора h_{ik} [12]. Нетрудно проверить, что для НЖК МББА это условие также выполняется (например, $\nu_{xx}/\varepsilon \sim 0.1$).

Решение двумерного волнового уравнения (1) ищем в виде

$$E_i(z) = \frac{J_i(z)}{\sqrt{\phi'(z)}}\exp\left\{i\frac{\omega}{c}\Phi(z)\right\}. \tag{3a}$$

Обоснование такой формы решения имеется в [14]. Здесь $J_i(z)$ — медленно меняющаяся комплексная амплитуда. Фазовый множитель $\Phi(z)$ имеет вид

$$\Phi(z) = \int n(z)dz = \int \sqrt{\varepsilon(z)}dz. \tag{3b}$$

$$n^2(z) = \varepsilon(z) = \frac{1}{2}Sph_{ik}(z). \tag{3c}$$

После подстановки (3a) в (1), пренебрежения J_i'' (согласно методу ГО) и с учетом (2) получим

$$\frac{dJ_i(z)}{dz} = i\frac{\omega}{c}\frac{h_{xx} - h_{yy}}{4n(z)}\sigma_{1ij}J_j(z), \tag{4}$$

где $\hat{\sigma}_1$ — матрица Паули:

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Полученная система уравнений (4) полностью описывает процесс распространения поляризованной волны в неоднородно анизотропной среде.

3. Решение уравнений в неоднородно анизотропном НЖК

Для окончательного аналитического решения задачи следует задать распределение $\theta(z)$. Обсудим конкретный пример. Рассмотрим случай, когда деформация директора в плоскости x, z создается поперечным электростатическим полем (так называемый эффект Фредерикса) (рис. 1). В физике ЖК-переходом Фредерикса называется явление переориентации директора при воздействии внешних электрических, магнитных или световых полей [19]. Оно хорошо исследовано как экспериментально, так и теоретически. В случае жестких граничных условий, т.е. когда $\theta(0) = \theta(d) = 0$ (d — толщина ячейки), распределение директора описывается формулой [18]

$$\theta(z) = 2\sqrt{\frac{E_{\mathrm{s}}}{E_{\mathrm{sc}}} - 1}\sin\left(\frac{\pi z}{d}\right). \tag{5}$$

Здесь E_{s} — напряженность приложенного к ячейке электростатического поля, E_{sc} — его критическое значение, после превышения которого происходит переориентация. Как видно из(5), подбором отношения $E_{\mathrm{s}}/E_{\mathrm{sc}}$ можно обеспечить выполнение условия $\theta(z) \ll 1$, так что применение метода ГО вполне оправдано. Нетрудно проверить, что в этом приближении $n(z) \approx \sqrt{(\varepsilon_o)}$ (согласно (3c)). Из (4) нетрудно также заметить, что в случае деформации в плоскости x, z система расщепляется на два независимых уравнения. Тогда решение уравнений (4) нетрудно с помощью (2) и (3) представить в виде

$$E_i(z) = \frac{A_i}{\sqrt{\varepsilon_o}}\exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda}\right.$$
$$\left.\times\left[\Phi(z) + i(\hat{\sigma}_1)_{ii}\frac{\varepsilon_a\sqrt{\varepsilon_o}}{4\varepsilon_e}\int\theta^2(z)dz\right]\right\}. \tag{6}$$

Постоянные интегрирования A_i определяются из граничных условий

$$E_x(0) = \cos\beta_0, \qquad E_y(0) = \sin\beta_0 e^{i\delta_0},$$

где β_0 — азимутальный угол входящей линейно поляризованной волны, а δ_0 — смещение фазы исходной волны, если волна на входе поляризована эллиптически. Интенсивность нормирована на единицу. Подставляя (5) в (6) и вычислив интеграл, с учетом граничных условий

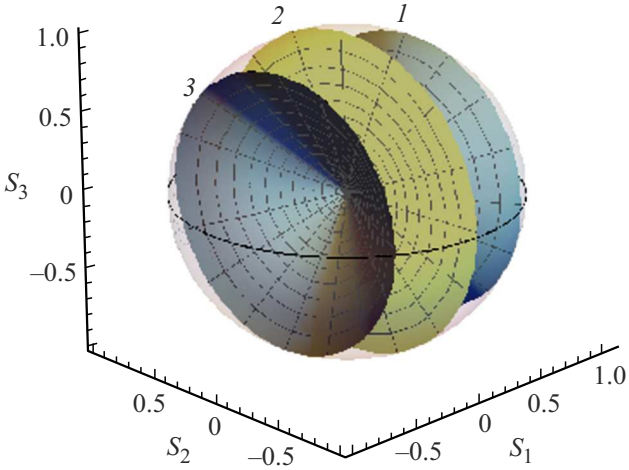

Рис. 2. Поведение вектора Стокса на сфере Пуанкаре в гомеотропно ориентированном НЖК при изменении напряженности электростатического поля ($E_s/E_{sc} = 1 - 1.2$) при фиксированной толщине. Азимутальный угол входной поляризации $\beta_0 = \pi/6$ (1); $\pi/4$ (2); $\pi/3$ (3). Остальные параметры: $\varepsilon_e = 3.22$, $\varepsilon_o = 2.43$; $\lambda = 0.5\,\mu$m, $d = 6\,\mu$m.

можем окончательное решение представить в следующем виде:

$$E_i(z) = E_i(0)\exp\left\{i\frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_o}}{\lambda}[z + \varphi(z)\sigma_{1ii}]\right\}, \tag{7}$$

$$\varphi(z) = \frac{\varepsilon_a}{2\varepsilon_e}\left(\frac{E_{\mathrm{s}}}{E_{\mathrm{sc}}} - 1\right)\left(z - \frac{d}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{d}\right).$$

Выражение (7) является окончательным аналитическим решением задачи в случае перехода Фредерикса. Заметим, что в отличие от ранее полученных оно имеет достаточно простую и удобную для анализа и практического использования форму.

4. Обсуждение

Наглядное описание пространственной эволюции поляризации распространяющегося в среде света удобнее провести на сфере Пуанкаре, точки которой однозначно соответствуют состояниям поляризации света. Координатными осями сферы Пуанкаре служат составляющие вектора Стокса [19]:

$$\mathbf{S}(z) = \mathbf{E}^+(z)\hat{\sigma}\mathbf{E}(z), \tag{8a}$$

где $\hat{\sigma}_i$ — матрицы Паули. С помощью (7) и (8a) нетрудно найти аналитические выражения для параметров Стокса:

$$(S_1(z) = \cos(2\beta),$$

$$S_2(z) = \sin(2\beta)\cos\left[\frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_0}}{\lambda}\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_e}\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_e} - 1\right)\right.$$
$$\left.\times\left(z - \frac{d}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{d}\right) - \delta_0\right],$$

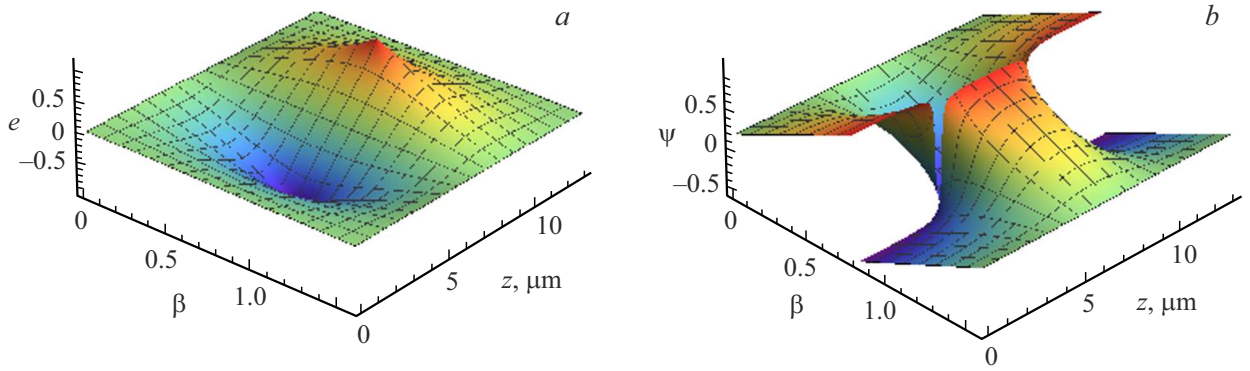

Рис. 3. 3D-зависимость параметров $e(z)$ и $\psi(z)$ от пространственной координаты и азимутального угла входной поляризации ($\varepsilon_e = 3.22$, $\varepsilon_o = 2.43$; $E_{sc} \sim 1$ V/cm (для МББА); $\lambda = 0.5\,\mu$m).

$$S_3(z) = -\sin(2\beta)\sin\left[\frac{2\pi\sqrt{\varepsilon_0}}{\lambda}\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_e}\left(\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_a}-1\right)\right.$$
$$\left.\times\left(z-\frac{d}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{d}\right)-\delta_0\right], \tag{8b}$$

Заметим следующую особенность задачи. Из-за независимости распространения составляющих $E_x(z)$ и $E_y(z)$ (см. систему (4)), очевидно, невозможно однозначно представить поведение линейной поляризации в среде, если она совпадает с оптическими осями на входе. В связи с этим для наглядной демонстрации особенностей решения (7) поляризация входящей волны должна быть либо линейной с азимутом $\beta_0 \neq 0$, $\pi/2$, либо эллиптической.

4.1. Эволюция поляризации в неоднородно анизотропном НЖК

Для конкретности обсудим только случай линейной поляризации. На рис. 2 представлено поведение вектора Стокса на сфере Пуанкаре при трех разных азимутальных углах входной линейно поляризованной волны при изменении напряженности электростатического поля (толщина ячейки фиксирована). Аналогичное поведение наблюдается в пространственной эволюции состояния поляризации при постоянной напряженности электростатического поля [17]. Как видно, вектор Стокса вращается по поверхности конуса. Ясно, что вращение вектора Стокса соответствует смене состояния поляризации выходящей волны при изменении напряженности электростатического поля, что может быть использовано для управления состоянием поляризации выходящего излучения.

Из приведенного рисунка можно сделать следующие выводы.

— Угол раствора этого конуса зависит от азимутального угла входящей волны и определяет максимально возможную величину эллиптичности при той или иной геометрии задачи.

— Увеличение толщины образца соответствует увеличению числа оборотов вектора Стокса.

Для детального количественного анализа эволюции состояния поляризации в неоднородно анизотропной среде удобнее воспользоваться параметрами эллиптичности $e(z)$ и азимута $\psi(z)$, которые выражаются составляющими этого вектора следующими соотношениями [19]:

$$\frac{b}{a} = e(z) = \operatorname{tg}\left\{\frac{1}{2}\arcsin S_3(z)\right\};$$
$$\psi(z) = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{S_2(z)}{S_1(z)}. \tag{9}$$

Здесь a и b — большая и малая полуоси эллипса поляризации, ψ — азимутальный угол, т. е. угол, который составляет большая полуось эллипса с осью x.

На рис. 3, *a, b* представлены 3D-графики зависимостей параметров $e(z)$ и $\psi(z)$ от пространственной координаты и азимута поляризации падающей волны, когда неоднородность анизотропии реализуется с помощью эффекта Фредерикса. Как видно из рис. 3, *a*, изменение эллиптичности носит достаточно плавный характер, тогда как в поведении азимутального угла вблизи угла $\pi/4$ наблюдается скачок (рис. 3, *b*).Однако этот скачок не является действительным нарушением непрерывности [20]. Как следует из (8b) и (9), этот скачок обусловлен поведением функции $\operatorname{tg} 2\beta$ вблизи угла $\beta = \pi/4$. Это следствие того, что диапазон значений азимута ограничен от $-\pi/2$ до $+\pi/2$.

Для выяснения роли отдельных зависимостей рассмотрим конкретный пример. Обсудим, к примеру, эволюцию параметра эллиптичности $e(z)$ от пространственной координаты в ячейке НЖК МББА.

На рис. 4, *a* представлена эта зависимость в двух случаях однородной (1) и неоднородной (2) ориентации директора НЖК. При распространении в однородно анизотропной среде, как хорошо известно, наблюдаются поляризационные биения от линейного до кругового и обратно (рис. 4, *a*, кривая *1*). В случае неоднородно анизотропной среды появляется ряд особенностей (рис. 4 *a*,

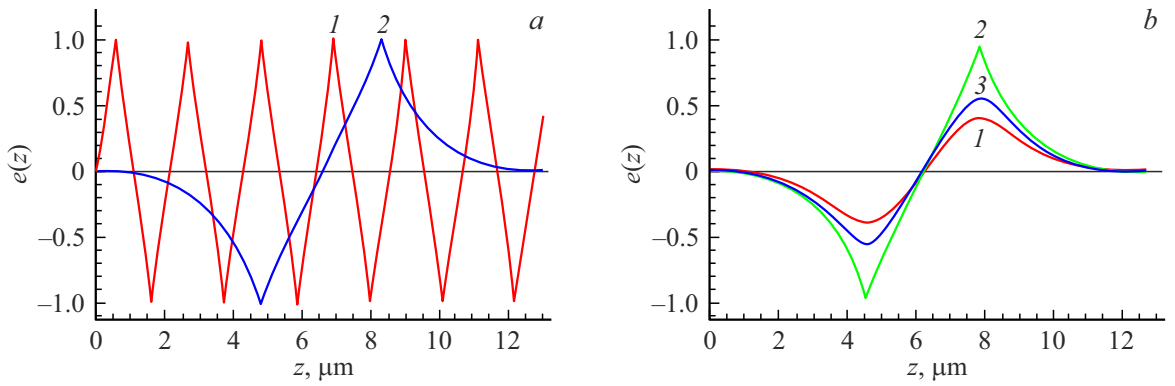

Рис. 4. Зависимость параметров эллиптичности $e(z)$ от пространственной координаты при толщине $d \sim 13\,\mu$m, (a) кривая 1 — случай однородной ориентации (главные оси направлены по координатным осям x и y), кривая 2 — случай неоднородной ориентации. Азимутальный угол входной поляризации $\beta_0 = \pi/4$. (b) Роль азимутального угла входной поляризации: $\beta_0 = \pi/9$ (1); $\pi/4$ (2); $(\pi)/3$ (3). Остальные параметры: $\varepsilon_e = 3.22$, $\varepsilon_o = 2.43$; $E_{\text{sc}} \sim 1$ V/cm (для МББА); $\lambda = 0.5\,\mu$m.

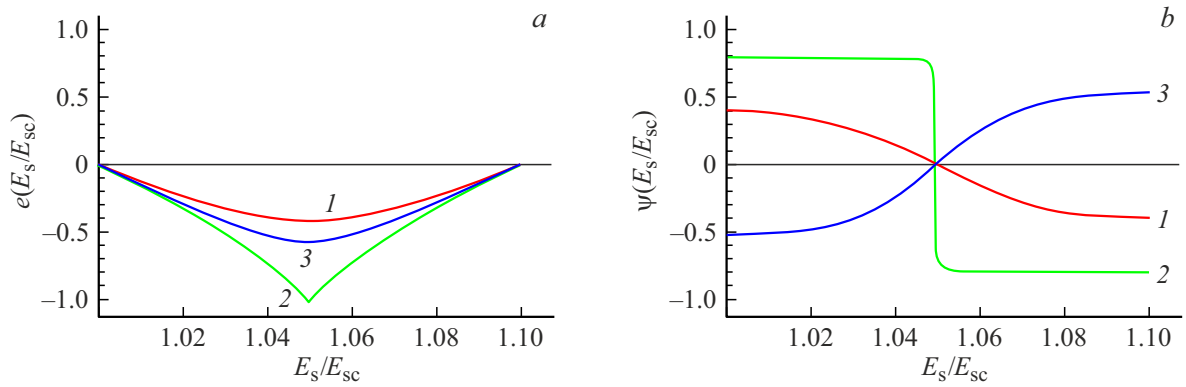

Рис. 5. Зависимость азимутального угла $\beta(z)$ от пространственной координаты. Азимутальный угол входной поляризации: $\beta_0 = \pi/8$ (1), $\pi/3$ (3), $\sim \pi/4$ (2). Остальные параметры такие же, как и на рис. 2.

кривая *2*). С учетом того, что из-за жестких граничных условий вблизи ограничивающих поверхностей угол переориентации меняется медленно, наблюдается плавное изменение эллиптичности. Осцилляции наблюдаются в центральной части ячейки, число которых растет пропорционально толщине образца. На рис. 4, *b* представлена эволюция эллиптичности в неоднородно анизотропной среде при трех разных азимутальных углах поляризаций входной волны.

Из приведенных графиков следует:

• изменение азимутального угла β_0 линейной поляризации входящей волны влияет исключительно на модуляцию колебаний эллиптичности,

• максимальная модуляция этих параметров растет при увеличении азимутального угла; при $\beta_0 = \pi/4$ и соответствующем значении напряженности внешнего поля волна поляризована по кругу.

Особо подчеркнем, что все полученные результаты полностью подтверждаются результатами прямого численного решения системы уравнений (1). Особенностью аналитического решения (9) являются простота, наглядность и универсальность.

4.2. Управляемые фазовые пластины

В практических целях более удобной является рассмотрение зависимости состояния поляризации от напряженности электростатического поля при фиксированной толщине.

К примеру, на рис. 5 представлены зависимости эллиптичности $e(E_s/E_{sc})$ и азимутального угла $\psi(E_sE_{\text{sc}})$ от приложенной нормированной напряженности для трех значений азимутального угла поляризации входящей волны. Как видно, при распространении в неоднородно анизотропной среде состояние поляризации меняется от линейной до эллиптической при изменении напряженности электростатического поля. При азимутальном угле $\beta_0 = \pi/4$ и соответствующей напряженности электростатического поля линейно поляризованная волна становится круговой ($e = 1$).

Таким образом, очевидно, что тонкий слой (при фиксированной толщине) гомеотропно ориентированного НЖК превращается в управляемую фазовую пластину. Можно оценить минимальную толщину образца, соответствующую тому или иному состоянию выходящей

поляризации. Действительно, с помощью (7) нетрудно оценить разность фаз δ между составляющими $E_y(z)$ и $E_x(z)$ выходящей волны:

$$\delta(z) = \delta_y - \delta_x = \delta_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\varepsilon_a\sqrt{\varepsilon_0}}{\varepsilon_e} \times \left(\frac{E_s}{E_{sc}} - 1\right)\left(z - \frac{d}{2\pi}\sin\frac{2\pi z}{d}\right). \quad (10)$$

Обсудим конкретные примеры.

Четвертьволновая пластина. При входящей линейно поляризованной волне ($\delta_0 = 0$) выходящая волна будет поляризована по кругу, если $\beta_0 = \pi/4$ и $\delta(d) = (2k+1)\pi/2$. Тогда из (10) можем вычислить значение E_s/E_{sc}, при котором такая ячейка НЖК будет работать как четвертьволновая пластина:

$$E_s/E_{sc} = 1 + \frac{\lambda}{4}\frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_a\sqrt{\varepsilon_o}}\frac{2k+1}{d},$$

где k — целое число. Например, при $k = 1$ $E_s/E_{sc} \approx 1.05$, что вполне согласуются с рис. 5. При $k = 2 - E_s/E_{sc} \approx 1.15$.

Полуволновая пластина. Аналогично можно оценить величину E_s/E_{sc} при данной толщине, чтобы фазовая пластина работала как пластина $\lambda/2$. В этом случае при линейнополяризованной входящей волне $\delta_0 = 0$) и $\delta(d) = \pi$ слой НЖК работает как полуволновая пластина (т. е. выходящая волна линейно поляризована, а азимутальный угол повернут на угол $2\beta_0$, где β_0 — азимутальный угол падающей волны), если

$$\frac{E_s}{E_{sc}} = 1 + \frac{\lambda}{2}\frac{\varepsilon_e}{d\varepsilon_a\sqrt{\varepsilon_o}}.$$

Подставляя численные значения, получаем $E_s/E_{sc} \approx 1.1$), что также хорошо согласуется с рис. 5.

5. Заключение

В настоящей работе теоретически исследованы особенности распространения поляризованного света в неоднородно анизотропном слое НЖК. Показано, что применение метода квазиизотропного приближения ГО позволяет провести рассмотрение с единых позиций. Эффективность метода продемонстрирована на примере гомеотропно ориентированного слоя НЖК в поперечном электростатическом поле. Проведен полный теоретический анализ и получены удобные аналитические выражения для параметров Стокса, описывающих пространственную эволюцию состояния поляризации света в слое такой неоднородно анизотропной среде. С помощью полученных выражений

- обсуждены особенности эволюции параметров эллиптичности и азимутального угла в зависимости от продольной координаты (при $E_s/E_{sc} = \text{const}$)),
- обсужден вопрос скачкообразного изменения фазы вблизи азимутального угла $\beta_0 = \pi/4$,
- пронализировано поведение поляризации на выходе ЖК-среды при постоянной толщине; показано, что регулировать состояние поляризации выходящего излучения можно, варьируя напряженность поля, что более удобно в практическом плане,
- показано, что такая ячейка может работать в качестве фазовой пластины различного назначения, в частности как четвертьволновая и полуволновая пластины.

Хотя окончательный анализ проведен для слоя НЖК в присутствии внешнего постоянного электростатического поля, полученные аналитические выражения обладают достаточной общностью и легко могут быть адаптированы и на случай других механизмов наведения неоднородности анизотропии.

Список литературы

[1] M. Chekhova, P. Banzer. Polarization of Light. In: *Classical, Quantum, and Nonlinear Optics* (Walter de Gruyter GmbH, Berlin, Boston, 2021). DOI: 10.1515/9783110668025

[2] B.E.A. Saleh, M.C. Teich. *Fundamentals of Photonics* (John Wiley & Sons, Hoboken, 2019). DOI: 10.1002/0471213748

[3] S. Obayya, M.F.O. Hameed, N.F.F. Areed. Computational Liquid Crystal Photonics. Fundamentals, Modelling and Applicattions (John Wiley & Sons, West Sussex, 2016). DOI: 10.1002/ 9781119041993

[4] Sh. Xu, F. Fan, Sh. Chen, Y. Xing, Y. Gao, H. Li, G. Niu, Sh. Chang. Optical Materials Express, **11**, (1), 171 (2021). DOI:10.1364/OME.414845

[5] E. Stoyanova, S. Ivanov, A. Rangelov. Appl. Opt., **59**, 10224 (2020). DOI: 10.1364/ AO.404150

[6] X. Zhang, F. Fan, C. Zhang, Y. Ji, X. Wang, S. Chang. Optical Materials Express, **10** (2), 282 (2020). DOI: 10.1364/OME.383058

[7] Cho-Fan Hsieh, Chan-Shan Yang, Fang-Cih Shih, Ru-Pin Pan, Ci-Ling Pan. Opt. Express, **27** (7), 9933 (2019). DOI: 10.1364/OE.27.009933

[8] E. Stoyanova, M. Al-Mahmoud, H. Hristova, A. Rangelov, E. Dimova, N.V. Vitanov. J. Opt., **21**, 105403 (2019). DOI: 10.1088/2040-8986/ab40fc

[9] E.V. Aksenova, A.A. Karetnikov, N.A. Karetnikov, A.P. Kovshik, A.V. Svanidze, S.V. Ul'yanov. Nanosystems: Phys. Chem. Math., **14** (1), 74 (2023). DOI: 10.17586/2220-8054-2023-14-1-74-85

[10] Е.В. Аксенова, А.А. Каретников, Н.А. Каретников, А.П. Ковшик, Е.И. Рюмцев, А.С. Сахацкий, А.В. Сванидзе. ЖЭТФ, **149** (5), 1087 (2016). DOI: 10.7868/ S0044451016050175

[11] Yu.A. Kravtsov. Geometrical Optics in Engineering Physics (Alpha Science, London, 2005).

[12] B. Bieg, J. Chrzanowski, Yu. A.Kravtsov, F. Orsitto. Physics Procedia, **62**, 102 (2015). DOI: 10.1016/j.phpro.2015.02.018

[13] H. Kubo, R. Nagata. JOSA, **73** (12), 1719-1724 (1983).

[14] A.L. Aslanyan, L. Aslanyan, Yu.S. Chilingaryan. Opt. Spectrosc., **116**, 483 (2014).

[15] L.S. Aslanyan, H.H. Hovakimyan. JOSA B, **37** (3), 847 (2020). DOI: 10.1364/ JOSAB.378809

[16] L.S. Aslanyan, A.E. Ayvazyan. J. Contemporary Physics (Armenian Academy of Sciences), **58**, 59 (2023). DOI: 10.54503/0002-3035-2023-58.1-84
[17] Л.С. Асланян, А.Э. Айвазян. Опт. и спектр., **130** (8), 1174–1180 (2022). DOI: 10.21883/OS.2022.08.52903.3295-22
[18] P.G. De Gennes, J. Prost. *The Physics of Liquid Crystals,* 2nd ed. (Clarendon Press., Oxford, 1993). DOI: 10.1063/1.2808028
[19] D.H. Goldstein. *Polarized Light*, 3rd ed. (CRC Press, Boca Raton, 2017). DOI: 10.120 1/b10436
[20] R.M.A. Azzam, B.E. Merrill, N.M. Bashara. Appl. Opt., **12** (4), 764 (1973). DOI: 10.1364/AO.12.000764