

Сингулярные поверхностные поляритоны на границе одинаковых одноосных кристаллов

© К.Ю. Голеницкий, Г.М. Гуткин

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе Российской академии наук,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: golenitski.k@mail.ioffe.ru

Поступила в Редакцию 27 июля 2025 г.

В окончательной редакции 18 августа 2025 г.

Принята к публикации 19 августа 2025 г.

Как известно, вдоль границы двух сред могут распространяться поверхностные электромагнитные волны. Рассмотрен случай границы двух одинаковых одноосных кристаллов, в одном из которых поверхностный поляритон принимает сингулярную форму, которая аналогична волне Фохта. Для таких поляритонов получены необходимые и достаточные условия существования, связывающие главные значения диэлектрической проницаемости с его направлением распространения или с ориентацией оптических осей кристаллов. Получены аналитические выражения для распределения полей в поляритоне. Обнаружено, что для заданной ориентации осей и степени анизотропии кристаллов возможно до четырех пар направлений распространения. При определенных условиях поляритон может распространяться параллельно или перпендикулярно оптической оси кристалла, где распределение поля поляритона имеет несингулярную форму.

Ключевые слова: поверхностный поляритон, поверхностная электромагнитная волна, метаматериалы, волна Дьяконова, анизотропная среда.

DOI: 10.61011/FTT.2025.09.61633.4-25

1. Введение

В изотропном случае необходимым условием существования поверхностных электромагнитных волн является противоположность знаков диэлектрических проницаемостей граничащих сред. Это условие может быть выполнено, например, для границы металла с диэлектриком. Использование таких волн, называемых поверхностными плазмон-поляритонами, ограничено из-за диссипации в среде с отрицательной вещественной частью диэлектрической проницаемости. Отсутствие изотропии хотя бы в одной из граничащих сред может приводить к значительному изменению свойств поверхностных волн и их условий существования. В статье Дьяконова [1] для случая границы одноосного кристалла с изотропной средой показано, что при наличии анизотропии возможно распространение поверхностной волны вдоль границы двух прозрачных диэлектриков. Первое экспериментальное наблюдение таких волн, называемых теперь поверхностными волнами Дьяконова или бездисперсионными поверхностными волнами, было проведено в 2008 году [2]. Эти волны распространяются в ограниченном диапазоне углов, который крайне чувствителен к степени анизотропии [3–5]. Малость этого диапазона для оптических волн в природных минералах затрудняет их наблюдение, но сильная чувствительность к изменению диэлектрической проницаемости граничащих сред может найти применение в сенсорах [3].

В последнее время рассматриваются все более сложные структуры с анизотропными средами, в которых могут распространяться поверхностные волны. Структу-

ры с дополнительным тонким изотропным диэлектрическим слоем между полубесконечными средами имеют увеличенный диапазон углов распространения [3,6–8]. В работе [9] было показано, что дополнительное ограничение двух одноосных кристаллов плоскими границами с воздухом (или проводником) сохраняет возможность распространения бездиссипативных волн. При этом оказывается возможным распространение поверхностной волны в условиях, запрещенных для полубесконечных сред [9,10]. Развитие технологий позволяет создавать сложные структуры (метаматериалы) с требуемыми электромагнитными свойствами, в том числе с сильной анизотропией [11–14]. В метаматериалах для некоторого диапазона длин волн может быть реализована анизотропная эффективная диэлектрическая проницаемость не только с одинаковыми знаками главных значений, но и с различными. В таких средах, называемых гиперболическими, также исследуются поверхностные волны, подобные волнам Дьяконова [12,15,16].

С точки зрения математического описания поверхностных волн при наличии анизотропии интересен случай, когда зависимость полей от расстояния до границы сред содержит слагаемое $(\mathbf{ar})\exp(i\mathbf{qr})$, представляющее собой произведение линейной функции на экспоненциальную [17–20]. Если подобными выражениями описываются поля хотя бы в одной из граничащих сред, волна называется сингулярной поверхностной волной (поляритоном) [17,21] или поверхностной волной Дьяконова–Фохта [18,19]. В частности, если анизотропны обе среды, возможна ситуация, когда выражениями вышеупомянутого вида описываются поля в

обеих из них [21,22]. В этом случае волна называется бисингулярным поляритоном.

В большинстве случаев условия существования поверхностных волн и зависимости их характеристик от направления распространения исследуются численно или приближенно. В работе [23] получено аналитическое решение для случая границы изотропной среды с одноосным кристаллом, а в работе [24] — с двуосным при положительных главных значениях диэлектрической проницаемости. Для случая границы двух анизотропных кристаллов задача становится более сложной, и ее аналитическое решение в общем виде пока никем не получено. Однако, в случае сингулярных волн дисперсионное уравнение приобретает значительно более простой вид. В работе [21] для двух одноосных кристаллов с параллельными границе оптическими осями была аналитически решена задача о распространении бисингулярного поляритона. В настоящей статье рассмотрена аналогичная задача для одинаковых кристаллов, но условие сингулярной формы решения ставится только в одном из них. Получены условия существования, связывающие взаимную ориентацию оптических осей или направление распространения с главными значениями диэлектрической проницаемости. Также получены аналитические выражения для распределения полей поверхностной волны.

2. Модель

Рассмотрим плоскость границы между двумя одинаковыми немагнитными и негиротропными одноосными кристаллами, оптические оси которых параллельны этой границе. Будем считать, что каждый кристалл характеризуется тензором диэлектрической проницаемости $\hat{\varepsilon}$ с главными значениями ε_{\perp} и ε_{\parallel} , где значение ε_{\perp} соответствует направлениям распространения волн перпендикулярно оптической оси, а ε_{\parallel} — параллельно. Предполагаем, что в рассматриваемом диапазоне частот ω можно пренебречь поглощением, поэтому ε_{\perp} и ε_{\parallel} являются вещественными числами.

Введем систему координат (рис. 1), где $x = 0$ — плоскость границы, а Oz — направление распространения поверхностной волны. Обозначим через φ и θ углы, отсчитанные от оси Oz до оптических осей S и O сред, заполняющих полупространства $x < 0$ и $x > 0$, соответственно. Направление отсчета углов выберем совпадающим с направлением часовой стрелки при взгляде на плоскость со стороны $x > 0$. Тензор диэлектрической проницаемости каждого из кристаллов в выбранной системе координат имеет вид

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} \cos^2(\psi) + \varepsilon_{\parallel} \sin^2(\psi) & (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin(\psi) \cos(\psi) \\ 0 & (\varepsilon_{\parallel} - \varepsilon_{\perp}) \sin(\psi) \cos(\psi) & \varepsilon_{\perp} \sin^2(\psi) + \varepsilon_{\parallel} \cos^2(\psi) \end{pmatrix} \quad (1)$$

где $\psi = \varphi, \theta$.

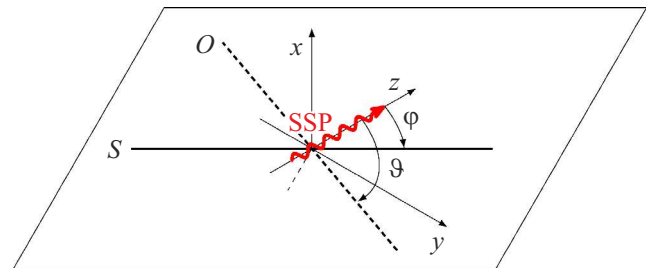


Рис. 1. Взаимная ориентация направления распространения волны и оптических осей.

В силу симметрии задачи углы φ и θ определены с точностью до π . Взаимную ориентацию оптических осей S и O в плоскости границы можно задать углом $\alpha = \theta - \varphi$. При этом будем считать, что выполнено $0 < \varphi < \pi$, а угол θ выбирается из промежутка от 0 до 2π так, что $0 \leq \alpha < \pi$. Так определенный α равняется углу, отсчитанному от оси S до оси O по часовой стрелке, если смотреть со стороны среды $x > 0$. Так как при совпадении осей S и O граница между кристаллами исчезает, то везде предполагаем $\alpha \neq 0$. Степень анизотропии кристаллов удобно характеризовать параметром $\eta \stackrel{\text{def}}{=} (\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}) - 1$.

3. Решение

В выбранной системе координат поля поверхностной волны наиболее общего вида представляются выражениями $\mathbf{E}(\mathbf{r}; t) = \mathbf{e}(x) \exp(i(qz - \omega t)) + \text{с.с.}$, $\mathbf{H}(\mathbf{r}; t) = \mathbf{h}(x) \exp(i(qz - \omega t)) + \text{с.с.}$. После подстановки решения в такой форме в уравнения Максвелла две проекции векторов $\mathbf{e}(x)$ и $\mathbf{h}(x)$ явно выражаются через остальные. Оставшиеся проекции подчиняются однородной системе из 4 линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Таким образом, зависимость полей от нормальной координаты x определяется четырьмя корнями характеристического уравнения этой системы, имеющими следующий вид:

$$\begin{aligned} \kappa_{o\pm} &= \pm \sqrt{q^2 - \varepsilon_{\perp} \frac{\omega^2}{c^2}}, \\ \kappa_{e\pm} &= \pm \sqrt{(1 + \eta \cos^2 \psi) q^2 - \varepsilon_{\parallel} \frac{\omega^2}{c^2}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Если $\kappa_{o\pm} \neq \kappa_{e\pm}$, то ограниченное при $|x| \rightarrow \infty$ решение системы имеет вид суммы обыкновенной и необыкновенной компонент $A_o \exp(\kappa_o x)$ и $A_e \exp(\kappa_e x)$. Если $\kappa_{o\pm} = \kappa_{e\pm}$, то решение необходимо выбирать в сингулярном виде $(A + Bx) \exp(\kappa x)$ [25,17].

Нас интересует случай совпадения корней в одном из кристаллов при их различии в другом. Пусть решение имеет сингулярный вид в кристалле при $x < 0$, тогда

из (2) получаем

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \frac{\varepsilon_{\perp}}{\cos^2 \varphi} \quad (3)$$

и при этом $\cos^2 \theta \neq \cos^2 \varphi$. Случай $\cos^2 \theta = \cos^2 \varphi$ отвечает бисингулярному поляритону и реализуется при $\sin^2(\alpha/2) = 2/|\eta|$ или $\cos^2(\alpha/2) = 2/|\eta|$ [21]. Видно, что равенство (3) возможно только при $\varepsilon_{\perp} > 0$. Также для возникновения сингулярного решения необходимо наличие ненулевых внедиагональных компонент у тензора (1), то есть $\eta \neq 0$ и $\varphi \neq 0, \pi/2$. Далее эти условия везде предполагаются выполненными.

Для удобства обезразмерим все величины на $\sqrt{\varepsilon_{\perp}} (\omega/c)$. Если обозначить положительные совпадающие корни характеристического уравнения (2) в кристалле $x < 0$ как κ , то отрицательные корни в кристалле $x > 0$ будут равны $-\kappa$ и $-\lambda$, где

$$\kappa = |\operatorname{tg} \varphi|, \quad (4)$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{1 + \eta \cos^2 \theta - (\eta + 1) \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}}. \quad (5)$$

Условие совместности стандартных граничных условий для ненулевого решения уравнений Максвелла сводится к равенству

$$\begin{aligned} & \lambda \{ \sin^2 \theta [\eta \cos^2 \varphi + 4] + \sin \theta \cos \theta [-2\eta \sin \varphi \cos \varphi] \\ & + \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \varphi [\eta \cos^2 \varphi - 4] \} = \kappa \{ \sin^2 \theta [\eta \cos^2 \varphi - 4] \\ & + \sin \theta \cos \theta [-2\eta \sin \varphi \cos \varphi] + \cos^2 \theta \operatorname{tg}^2 \varphi [\eta \cos^2 \varphi + 4] \}. \end{aligned} \quad (6)$$

При заданных φ и η уравнения (5), (6) могут быть решены относительно θ и λ (см. Приложение). Анализируя решения, можно получить условия существования сингулярного поляритона в виде

$$\begin{cases} \cos^2 \varphi > \frac{4}{4\sqrt{\eta(\eta+1)} - \eta}, \\ \eta \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{4}{5}\right]. \end{cases} \quad (7)$$

При этом для λ имеем

$$\lambda = \kappa \frac{(\eta^2 \cos^4 \varphi - 16) + 4|\eta| \cos^2 \varphi \sqrt{D}}{D + 4 \sin^2(2\varphi)}, \quad (8)$$

где $D = (\eta \cos^2 \varphi + 4 \cos(2\varphi))^2 + 12 \sin^2(2\varphi)$, а для угла θ имеем

$$\cos^2 \theta = \frac{\lambda^2 - \operatorname{tg}^2 \varphi + \eta}{\eta} \cos^2 \varphi, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sign}(\sin(2\theta)) &= \operatorname{sign}\{\lambda^2[-4 - \eta \cos^2 \varphi \cos(2\varphi)] + \lambda\kappa[-8] \\ &+ \kappa^2[-4 + 2\eta^2 \cos^4 \varphi + \eta \cos^2 \varphi \cos(2\varphi)]\} \operatorname{sign}(\sin(2\varphi)). \end{aligned} \quad (10)$$

Если условия (7) выполнены, то выбор φ определяет на промежутке $(0; 2\pi]$ пару углов θ , отличающихся друг

от друга на π . В соответствии с определением угла α это дает однозначную функцию $\alpha(\varphi)$.

Стоит отметить интересные случаи, когда сингулярный поляритон распространяется вдоль или перпендикулярно оптической оси того кристалла, где решение несингулярно. Случай $\theta = \pi/2$ реализуется в гиперболической среде при $\eta < -4$ и

$$\varphi = \pm \arcsin\left(\frac{|\eta| - 4}{|\eta|}\right). \quad (11)$$

Случай $\theta = 0$ реализуется в сильно анизотропном диэлектрике при $\eta > 8$ и

$$\varphi = \pm \arccos\left(\frac{2(1 + \sqrt{\eta + 1})}{\eta}\right). \quad (12)$$

Пусть теперь задана взаимная ориентация оптических осей S и O (угол α), а не направление распространения сингулярного поляритона относительно оптической оси S (угол φ). Направление отсчета углов φ относительно оси S ведется против часовой стрелки при взгляде со стороны среды $x > 0$. Собирая в (6) слагаемые при η в одной стороне равенства, используя соотношения (4), (5) и сокращая на $(\kappa - \lambda)$, получаем условие совместности граничных условий в виде

$$(\kappa + \lambda)^2 = \frac{\eta^2}{4} \sin^2 \alpha. \quad (13)$$

Отметим, что уравнение (13) можно получить из уравнения (6) в работе [26], если выбрать константы локализации обыкновенной и необыкновенной волны в одной из сред одинаковыми, например $k_0 = k_1 = \kappa$ и $k_2 = \lambda$. Однако, выбор поляризаций парциальных волн из работ [24, 26] при таком вырождении некорректен.

Уравнения (4), (5), (13) позволяют также получить аналитические выражения для зависимости $\varphi(\alpha)$ и условия существования сингулярного поляритона при фиксированном η . Мы привели их во второй части Приложения. Наглядное представление об основных особенностях $\varphi(\alpha)$ при различных η дает семейство кривых, построенных на рис. 2, а и 2, д. На рис. 2, а построены зависимости $\varphi(\alpha)$ для гиперболических сред с $\eta < -4/3$, а на рис. 2, д — для диэлектрических сред с $\eta > 4/5$. Пустые кружки на кривых соответствуют направлениям распространения бисингулярного поляритона, когда $\theta = \pi - \varphi$ или $\theta = 2\pi - \varphi$, то есть $\alpha = \pi - 2\varphi$ или $\alpha = 2\pi - 2\varphi$.

При выбранном угле между оптическими осями $\tilde{\alpha}$ можно определить число пар направлений распространения сингулярного поляритона по числу пересечений вертикальной прямой $\alpha = \tilde{\alpha}$ с кривыми $\varphi(\alpha)$ для заданного η . Отметим, что графики симметричны относительно замены $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$ и $\alpha \rightarrow \pi - \alpha$. Таким образом, для числа направлений распространения неважно, какой — наибольший или наименьший — угол между оптическими осями выбирается в качестве $\tilde{\alpha}$.

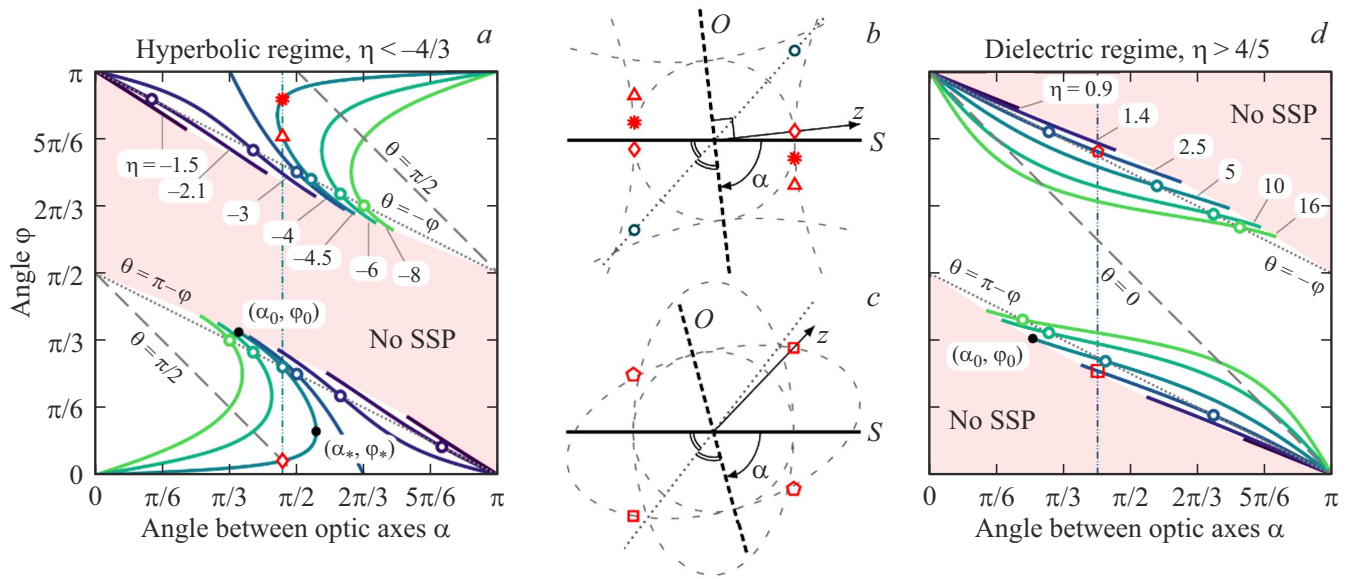


Рис. 2. Зависимости углов распространения сингулярного поверхностного поляритона (СПП) φ от угла между оптическими осями α : *a* — в гиперболических кристаллах с $\eta < -1$; *d* — в диэлектрических кристаллах с $\eta > 0$. *b* — волновые вектора СПП \mathbf{q} для кристаллов с $\eta = -4.5$ и углом $\alpha \approx 1.46$. *c* — волновые вектора СПП \mathbf{q} для кристаллов с $\eta = 2.5$, $\alpha = 5\pi/12$. Обозначения точек на панелях *b* и *c* соответствуют обозначениям точек на графиках *a* и *d* для выбранных углов α .

Из рис. 2, *a* видно, что возможно до 4 пар направлений распространения сингулярного поляритона. При $-4/3 > \eta > -(1 + \sqrt{17})/2 \approx -2.56$ возможна только одна пара направлений. При $\eta \in (-\infty; -5) \cup (-4; -(1 + \sqrt{17})/2)$ для некоторых углов между оптическими осями — две пары направлений, причем при $\eta \in (-4; -(1 + \sqrt{17})/2)$ направление существует для любого α . В кристаллах, где $-5 < \eta < -4$, для углов α вблизи $\pi/2$ возможны четыре пары направлений. В случае диэлектрических кристаллов (рис. 2, *d*) — две пары направлений, при $\eta > (-1 + \sqrt{17})/2 \approx 1.56$. В этом же промежутке значений η направление распространения существует для любого угла α .

Для иллюстрации векторов \mathbf{q} при отрицательных η был выбран случай, когда имеется четыре пары направлений распространения и для одной из них $\theta = \pi/2$ (рис. 2, *b*). Оказывается, что в таком случае одна из трех других пар направлений обязательно будет соответствовать бисингулярному поляритону. Для иллюстрации векторов \mathbf{q} при положительных η был выбран случай, когда есть две пары направлений распространения (рис. 2, *c*). Все концы векторов \mathbf{q} , отмеченные на рис. 2, *b* и 2, *c*, лежат на прямых, перпендикулярных оптической оси S и проходящих через точки касания границ световых конусов обыкновенной и необыкновенной волн среды $x < 0$ (кривых $\kappa_{o+} = 0$ и $\kappa_{e+} = 0$ в (2)). В терминологии статей [21,23] такие прямые называются сингулярными осями поверхностных волн в среде. Направления, отмеченные на рис. 2, *b* кружками, соответствуют бисингулярному поляритону и лежат на пересечении

сингулярных осей поверхностных волн обеих сред и на бисектрисе угла между оптическими осями.

4. Распределения полей

Электрическое поле в сингулярном поляритоне описывается выражением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}; t) = C[\mathbf{e}(x) \exp(i(qz - \omega t)) + \text{с.с.}],$$

где C — произвольная константа, $\mathbf{e}(x)$ — вектор поляризации, получающийся прямым вычислением из граничных условий. Он дается выражениями

$$\begin{cases} e_x = iq \left[\left(K + \frac{\lambda}{\kappa} L \right) e^{\kappa x} + 2(K + M) \kappa x e^{\kappa x} \right], \\ e_y = \sigma \left[\left(\frac{4(K + M)}{\eta \cos^2 \varphi} + K + L \right) e^{\kappa x} - 2(K + M) \kappa x e^{\kappa x} \right], \\ e_z = \kappa [(K + L) e^{\kappa x} - 2(K + M) \kappa x e^{\kappa x}], \end{cases}$$

при $x < 0$ и

$$\begin{cases} e_x = iq \left[K e^{-\kappa x} + \frac{\lambda}{\kappa} L e^{-\lambda x} \right], \\ e_y = \sigma [M e^{-\kappa x} + N e^{-\lambda x}], \\ e_z = \kappa [K e^{-\kappa x} + L e^{-\lambda x}], \end{cases}$$

при $x > 0$.

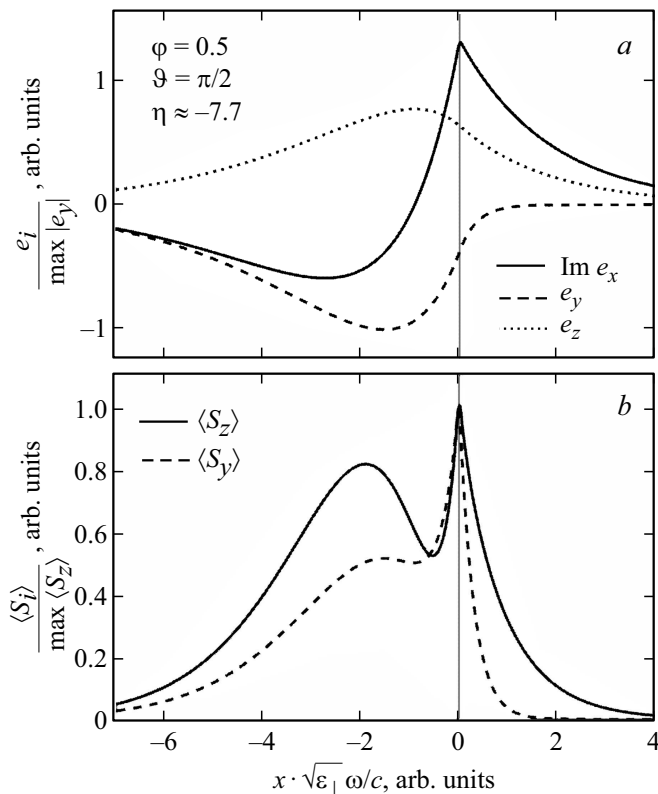


Рис. 3. Зависимости от координаты x в сингулярном поверхностном поляритоне проекций: a — поляризации электрического поля e ; b — усредненного вектора Пойнтинга $\langle S \rangle$.

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\sigma &\stackrel{\text{def}}{=} -\text{sign}(\text{tg } \varphi), \\ K &\stackrel{\text{def}}{=} ((\kappa + \lambda)/2\kappa) \cos \varphi \sin \theta, \\ L &\stackrel{\text{def}}{=} \sin \varphi \cos \theta, \\ M &\stackrel{\text{def}}{=} ((\kappa + \lambda)/2\kappa) \sin \varphi \cos \theta, \\ N &\stackrel{\text{def}}{=} \cos \varphi \sin \theta.\end{aligned}$$

Напряженность магнитного поля

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}; t) = C[\mathbf{h}(x) \exp(i(qz - \omega t)) + \text{c.c.}]$$

можно получить, вычислив $\text{rot } \mathbf{E}$. Так как формулы (3), (4), (8) и (9), (10) задают q, κ, λ и θ как функции $\varepsilon_{\perp}, \varepsilon_{\parallel}$ и φ , как функции этих параметров могут быть рассмотрены и приведенные выше выражения для полей (14). В силу выражений для $\varphi(\alpha)$ (см. Приложение) и (3) одной из задаваемых величин можно рассматривать α или q .

На рис. 3 приведены зависимости проекций вектора поляризации $\mathbf{e}(x)$ и усредненного по периоду $2\pi/\omega$ вектора Пойнтинга

$$\mathbf{S}(x) = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}].$$

В качестве параметров для расчета были выбраны $\varphi = 0.5$ и $\eta = -4/(1 - |\sin \varphi|)$, что соответствует $\theta = \pi/2$. Заметим, что проекции вектора \mathbf{e} в среде с сингулярным решением ($x < 0$) ведут себя немонотонно (рис. 3, a). Это является отличительной особенностью поверхностных волн в анизотропных средах, в то время как в изотропных поля локализованы строго на границе. Немонотонная зависимость амплитуд полей от расстояния до границы может наблюдаться и для несингулярных решений, если вклады обыкновенной и необыкновенной парциальных волн отличаются по знаку. На рис. 3, b видно, что и зависимости $\langle S_y \rangle$ и $\langle S_z \rangle$ немонотонны, причем в среде $x < 0$ каждая из них имеет локальный максимум (для $\langle S_y \rangle$ он заметен слабо). Также отметим, что отношение $\langle S_y \rangle / \langle S_z \rangle$, определяющее „направление распространения энергии волны“, также зависит от x . Отличие $\langle S_y \rangle$ от нуля не удивительно, поскольку направления групповой и фазовой скоростей волн в анизотропных средах часто не совпадают. Не построенное на графиках среднее значение $\langle S_x \rangle = 0$, что отвечает переносу энергии волной только вдоль границы.

5. Заключение

В статье исследованы сингулярные поверхностные поляритоны, распространяющиеся вдоль границы двух одинаковых одноосных кристаллов. Предсказано их существование в таком диапазоне частот, где степень анизотропии кристалла

$$\eta = \left(\frac{\varepsilon_{\parallel}}{\varepsilon_{\perp}} - 1 \right) < -4/3$$

или $\eta > 4/5$ при $\varepsilon_{\perp} > 0$, где ε_{\parallel} и ε_{\perp} — главные компоненты тензора диэлектрической проницаемости. Такие величины степени анизотропии могут наблюдаться в природных одноосных минералах в инфракрасном или терагерцовом диапазоне длин волн, а также они могут быть достижимы в метаматериалах в более широком диапазоне длин волн. При этом требования для двух одноосных кристаллов слабее, чем в случае границы анизотропной среды с изотропной.

Направление распространения поверхностного поляритона характеризуется углом φ относительно оптической оси кристалла, где решение сингулярно, и правильно выбранным углом между оптическими осями α . Получены аналитические выражения для углов $\alpha(\varphi)$ и $\varphi(\alpha)$ в зависимости от выбора одного из них в качестве задаваемого параметра. Сингулярный поляритон распространяется только вдоль особых направлений, поэтому его условия существования зависят от углов φ или α . Эти условия были определены в работе. Для определенных степеней анизотропии и диапазонов углов между оптическими осями в гиперболическом (диэлектрическом) режиме возможно до 4 (2) пар направлений распространения. Интересно отметить, что при $\eta < -4$ поляритон может распространяться перпендикулярно

оптической оси кристалла, в котором распределение поля имеет несингулярный вид, а при $\eta > 8$ — параллельно. Эти направления являются запрещенными в кристалле с сингулярным видом распределения поля. Получены аналитические выражения для распределений компонент электромагнитного поля в сингулярном поларитоне, определенные как функции от диэлектрических проницаемостей ε_{\perp} , ε_{\parallel} и одного из углов φ , α или волнового вектора q . Полученные в работе выражения могут быть использованы для построения приближенных решений задачи о распространении несингулярных волн в окрестностях направлений распространения сингулярных.

Приложение

Решение относительно φ и η . Найдем λ , θ и области существования сингулярных волн при заданных φ и η . Выразим $\cos^2 \theta$ и $\sin^2 \theta$ из соотношения (5):

$$\begin{aligned}\cos^2 \theta &= \frac{\lambda^2 - \kappa^2 + \eta}{\eta} \cos^2 \varphi, \\ \sin^2 \theta &= \frac{(1 + \eta)\kappa^2 - \lambda^2}{\eta} \cos^2 \varphi.\end{aligned}\quad (\text{П1})$$

Выражения (П1) позволяют переписать (6) в виде уравнения

$$\begin{aligned}(\lambda - \kappa)\{\lambda^2[-4 - \eta \cos^2 \varphi \cos(2\varphi)] + \lambda\kappa[-8] \\ + \kappa^2[-4 + 2\eta^2 \cos^4 \varphi + \eta \cos^2 \varphi \cos(2\varphi)]\} \\ = (\lambda - \kappa)\text{sign}(\sin(2\varphi) \sin(2\theta))2|\eta| |\sin \varphi \cos^3 \varphi| \\ \times \sqrt{-\lambda^4 + \lambda^2[(2 + \eta)\kappa^2 - \eta] + (1 + \eta)(\eta - \kappa^2)\kappa^2}.\end{aligned}\quad (\text{П2})$$

Так как $\lambda \neq \kappa$, на $(\lambda - \kappa)$ можно сократить. Возведя обе части равенства в квадрат, получим уравнение четвертой степени относительно λ . Его решениями являются двухкратный корень $\lambda = -\kappa$ и пара корней

$$\lambda = \kappa \frac{(\eta^2 \cos^4 \varphi - 16) \pm 4|\eta| \cos^2 \varphi \sqrt{D}}{D + 4 \sin^2(2\varphi)},$$

где $D = (\eta \cos^2 \varphi + 4 \cos(2\varphi))^2 + 12 \sin^2(2\varphi)$.

Нужно определить для каких $(\varphi; \eta)$ будет $\lambda > 0$. Границы областей знакопостоянства λ можно найти из самого уравнения на λ при $\lambda = 0$. Исследуя знаки λ внутри каждой из них, можно получить, что корень (8) положителен для

$$\begin{aligned}\eta \in \left(-\infty; \frac{-4 \cos(2\varphi) - 4\sqrt{\cos^2(2\varphi) + 15}}{15 \cos^2 \varphi}\right) \\ \cup \left(\frac{-4 \cos(2\varphi) + 4\sqrt{\cos^2(2\varphi) + 15}}{15 \cos^2 \varphi}; +\infty\right),\end{aligned}$$

а другие корни $\lambda \leq 0$ при любых $(\varphi; \eta)$. Это условие можно переписать относительно φ как

$$\begin{cases} \cos^2 \varphi > \frac{4}{4\sqrt{\eta(\eta+1)} - \eta}, \\ \eta \in \left[-\frac{4}{3}; \frac{4}{5}\right]. \end{cases}$$

Далее требуется проверить, что выполняется $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$, где $\cos^2 \theta$ определяется (П1) и (4), (8). В выполнении этих неравенств можно убедиться, исследовав области положительного знака $\cos^2 \theta$ и $\sin^2 \theta$ аналогично исследованию $\lambda > 0$, используя при этом уравнения (П1) и (6). Отсутствие отрицательного знака под корнем в (П2) следует из $0 \leq \cos^2 \theta \leq 1$ в силу (П1), а согласование знаков правой и левой частей обеспечивается выбором знака у $\sin(2\theta)$.

Решение относительно α и η . Найдем направления распространения сингулярных волн, характеризуемые углом φ при заданных α и η . Так как величины κ и λ положительны, равенство (13) можно переписать в виде

$$\lambda = \frac{|\eta \sin \alpha|}{2} - \kappa. \quad (\text{П3})$$

Возведя (П3) в квадрат и воспользовавшись (4), (5), приходим к следующему уравнению, определяющему $\text{tg } \varphi$ как функцию от α и η :

$$\begin{aligned}\text{tg}^2 \varphi + \left[\frac{\text{sign}(\eta \sin \alpha) \text{sign}(\text{tg } \varphi) - 2 \cos \alpha}{\sin \alpha} \right] \text{tg } \varphi \\ - \left[\frac{4 + \eta}{4} \right] = 0.\end{aligned}\quad (\text{П4})$$

Уравнение (П4) эквивалентно двум квадратным уравнениям для $\text{tg } \varphi$ разных знаков. От его корней требуется вещественность, ограниченность и строгая положительность или отрицательность, а также выполнение условия $\lambda > 0$ в (П3), принимающего вид $2|\text{tg } \varphi| < |\eta \sin \alpha|$. Так как уравнение (П4) и наложенные на его корни условия инварианты относительно преобразования $\varphi \rightarrow \pi - \varphi$, $\alpha \rightarrow \pi - \alpha$, а $\text{tg } \varphi$ при таком преобразовании меняет знак, можно ограничиться рассмотрением $\varphi \in (0; \pi/2)$. Этой области соответствуют положительные решения

$$\begin{aligned}\text{tg } \varphi_{\pm} = \\ = \frac{2 \cos \alpha - \text{sign}(\eta) \pm \sqrt{(2 \cos \alpha - \text{sign}(\eta))^2 + (4 + \eta) \sin^2 \alpha}}{2 \sin \alpha}.\end{aligned}\quad (\text{П5})$$

В средах с $-4 \leq \eta < -4/3$ или $4/5 < \eta$ распространение возможно только в направлениях, определяемых $\text{tg } \varphi_+$, причем угол α должен принадлежать промежутку $(\alpha_0; \pi)$. В средах с $\eta < -4$ возможно распространение в направлениях $\text{tg } \varphi_+$ при $\alpha \in (\alpha_0; \alpha_*)$ и в направлениях $\text{tg } \varphi_-$ при $\alpha \in (0; \alpha_*)$. При $\eta = -4$ возможны только направления $\text{tg } \varphi_+$ при $\alpha \in (\alpha_0; 2\pi/3)$. Границы α_0 и α_*

задаются выражениями

$$\alpha_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{\eta(\eta+1)} - 2}{|\eta|}\right); \quad (\text{П6})$$

$$\alpha_* = \arccos\left(\frac{\sqrt{\eta^2 + 5\eta + 4} - 2}{|\eta|}\right). \quad (\text{П7})$$

Граница α_0 соответствует $\lambda = 0$, а граница α_* — обращению в ноль радикала в (П5). Условие $\alpha < 2\pi/3$ для $\text{tg } \varphi_+$ и отсутствие направлений $\text{tg } \varphi_-$ при $\eta = -4$ следуют из требования $\text{tg } \varphi_{\pm} > 0$. Подставляя α_0 в (П5), получаем выражение для наибольшего угла распространения $\varphi \in (0; \pi/2)$ в виде

$$\varphi_0 = \arctg\left(\sqrt{\sqrt{\eta(\eta+1)} - 1} - \frac{\eta}{4}\right). \quad (\text{П8})$$

Благодарности

Авторы выражают благодарность Н.С. Аверкиеву за помощь в подготовке статьи.

Список литературы

- [1] М.И. Дьяконов. ЖЭТФ **94**, 4, 119 (1988).
- [2] O. Takayama, L. Crasovan, D. Artigas, L. Torner. Phys. Rev. Lett. **102**, 4, 043903-1 (2009).
- [3] O. Takayama, L.C. Crasovan, S.K. Johansen, D. Mihalache, D. Artigas, L. Torner. Electromagnetics **28**, 3, 126 (2008).
- [4] J.A. Polo, A. Lakhtakia. Laser Photonics Rev. **5**, 2, 234 (2011).
- [5] В.И. Альшиц, В.Н. Любимов. ФТТ **44**, 2, 371 (2002).
- [6] L. Torner, J.P. Torres, C. Ojeda, D. Mihalache. J. Light. Technol. **13**, 10, 2027 (1995).
- [7] А.Н. Фурс, В.М. Галынский, Л.М. Барковский. Оптика и спектроскопия **98**, 3, 500 (2005).
- [8] O. Takayama, D. Artigas, L. Torner. Nat. Nanotechnol. **9**, 6, 419 (2014).
- [9] D.A. Chermoshentsev, E.V. Anikin, S.A. Dyakov, N.A. Gippius. Nanophotonics **9**, 16, 4785 (2020).
- [10] D.A. Chermoshentsev, E.V. Anikin, I.M. Fradkin, M.S. Sidorenko, A.A. Dudnikova, A.S. Kalganov, M.F. Limonov, N.A. Gippius, S.A. Dyakov. Nanophotonics, **13**, 16, 3005 (2024).
- [11] D. Artigas, L. Torner. Phys. Rev. Lett. **94**, 1, 013901 (2005).
- [12] O. Takayama, A.A. Bogdanov, A.V. Lavrinenko. J. Phys. Condens. Matter **29**, 46, 463001 (2017).
- [13] K. Korzeb, M. Gajc, D. Pawlak. Opt. Express **23**, 20, 25406 (2015).
- [14] S. Jahani, Z. Jacob. Nat. Nanotechnol. **11**, 1, 23 (2016).
- [15] O. Takayama, E. Shkondin, A. Bodganov, M.E. Aryaee Panah, K. Golenitskii, P. Dmitriev, T. Repaän, R. Malureanu, P. Belov, F. Jensen, A.V. Lavrinenko. ACS Photonics **4**, 11, 2899 (2017).
- [16] M. Moradi. Sci. Rep. **13**, 12353 (2023).
- [17] Ф.Н. Марчевский, В.Л. Стрижевский, С.В. Стрижевский. ФТТ **26**, 5, 1501 (1984).
- [18] A. Lakhtakia, T.G. Mackay, C. Zhou. Eur. J. Phys. **42**, 1, 015302-1 (2021).
- [19] T.G. Mackay, C. Zhou, A. Lakhtakia. Proc. R. Soc. A **475**, 2228, 20190317-1 (2019).
- [20] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1992). 664 с. (§ 99).
- [21] K.Yu. Golenitskii, N.S. Averkiev. Phys. Rev. A, **111**, 6, 063508 (2025).
- [22] A. Lakhtakia, T.G. Mackay. J. Opt. Soc. Am. B **37**, 8, 2444 (2020).
- [23] K.Yu. Golenitskii. Phys. Rev. B, **110**, 3, 035301 (2024).
- [24] E.E. Narimanov. Phys. Rev. A, **98**, 1, 013818 (2018).
- [25] А.П. Хапалюк. Оптика и спектроскопия **12**, 1, 106 (1962).
- [26] Н.С. Аверкиев, М.И. Дьяконов. Оптика и спектроскопия **68**, 3, 1118 (1990).

Редактор А.Н. Смирнов