07

Гомогенная нуклеация и диффузионный рост наночастицы при ультразвуковом воздействии

© С.Ш. Рехвиашвили

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН,
Нальчик, Россия

E-mail: rsergo@mail.ru

Поступила в Редакцию 19 сентября 2025 г.
В окончательной редакции 28 сентября 2025 г.
Принята к публикации 29 сентября 2025 г.

Предложена теоретическая модель гомогенной нуклеации и роста отдельного зародыша (наночастицы) в жидкофазной среде под воздействием ультразвука. Модель сочетает термодинамический подход, позволяющий вычислять работу образования зародыша и его критический радиус в нестационарном поле давления, с кинетическим описанием диффузионного массопереноса и роста индивидуальной наночастицы под действием акустических колебаний. Предложенный подход позволяет установить связь между интенсивностью ультразвукового воздействия и характеристиками формирования наночастицы, а также может служить основой для построения статистического распределения наночастиц по размерам.

Ключевые слова: гомогенная нуклеация, ультразвуковая обработка, критический радиус зародыша, диффузионный рост, акустические колебания, наночастица, термодинамическая модель, кинетическая модель.

DOI: 10.61011/FTT.2025.09.61625.258-25

1. Введение

Создание наночастиц с заданными размерными и морфологическими свойствами является фундаментальной задачей современного материаловедения и востребовано в катализе, медицине и электронике [1,2]. Одним из методов управления процессами нуклеации и роста нанообъектов является обработка жидкофазных сред ультразвуковыми волнами (УЗВ). Здесь ультразвуковое воздействие может осуществляться в двух основных режимах [1–5]: 1) кавитационный, связанный с образованием и схлопыванием газовых пузырьков, создающих экстремальные локальные условия (температуры до 5000 K, давления до 1000 atm, скорости охлаждения свыше 10^9 K/s); 2) некавитационный, при котором низкоамплитудные колебания вызывают периодические изменения давления и пересыщения среды без формирования пузырьков. В настоящей работе исследуется влияние малых ультразвуковых колебаний на гомогенную нуклеацию и рост наночастиц.

В отличие от традиционных подходов, основанных на использовании стабилизаторов или кинетических ловушек для контроля размеров наночастиц, низкоамплитудные ультразвуковые колебания воздействуют на ранние стадии формирования новой фазы посредством модуляции термодинамических и кинетических параметров среды [5–9]. Экспериментальные исследования показывают, что ультразвуковая обработка может приводить к формированию монодисперсных наносистем [2,6], однако теоретическое описание процессов в некавитационном режиме остается недостаточно разработанным. Обработка твердых аморфных сплавов также сопровождается образованием наночастиц, что связывают с наличием свободного объема [10]. Различные исследования показывают [4,9,13], что классические теории гомогенной нуклеации [11,12], рассчитанные на равновесные условия, недостаточны для корректного описания процессов, так как не учитывают быстрые колебания давления, существенно влияющие на термодинамические характеристики системы.

В настоящей работе рассматривается образование наночастицы в жидкофазной среде под действием ультразвуковых колебаний. Предлагается теоретическая модель гомогенной нуклеации и последующего диффузионного роста зародыша, объединяющая термодинамический и кинетический подходы. Термодинамическая часть модели описывает образование критического зародыша новой фазы в нестационарном поле давления. На ее основе вычисляются работа нуклеации и эффективный критический радиус зародыша, усредненные по периоду колебаний. Кинетическая часть модели описывает диффузионный рост зародыша в сферической геометрии с медленно движущейся границей. Особое внимание уделено соотношению между временем нуклеации, временем диффузии и периодом колебаний, а также условию устойчивого роста наночастицы в быстро осциллирующем акустическом поле.

2. Гомогенная нуклеация наночастиц

Гомогенная нуклеация представляет собой процесс самопроизвольного образования зародышей новой фазы в пересыщенной среде (в нашем случае это жидкофазная среда) без участия посторонних поверхностей или при-

месных центров [11,12]. Классическая теория нуклеации рассматривает этот процесс как результат конкуренции между выигрышем в объемной свободной энергии и затратами на формирование межфазной границы. Для сферического зародыша радиуса R изменение свободной энергии Гиббса записывается в виде

$$\Delta G = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta g + 4\pi R^2 \sigma, \tag{1}$$

где Δg — изменение удельной свободной энергии при фазовом переходе (J/m^3), σ — поверхностное натяжение на границе раздела фаз. Баланс вкладов в (1) определяет энергетический барьер. При малых радиусах доминирует поверхностный вклад, препятствующий росту, тогда как при больших радиусах преобладает объемная составляющая.

В условиях ультразвукового воздействия классическая теория требует модификации. Нестационарное акустическое поле вызывает периодические колебания давления, что приводит к осцилляции термодинамических параметров. Обобщим выражение (1) с учетом акустического воздействия в виде

$$\Delta G(R,t) = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta g + 4\pi R^2 \sigma + \Delta G_a(R,t), \tag{2}$$

где $\Delta G_a(R,t)$ — описывает вклад акустического давления. В приближении однородного давления в объеме зародыша имеем

$$\Delta G_a(R,t) = \frac{4}{3}\pi R^3 \Delta p \sin(\omega t), \tag{3}$$

где Δp — амплитуда колебаний давления, ω — круговая частота ультразвука. Условие экстремума

$$\left(\frac{\partial \Delta G(R,t)}{\partial R}\right)_{R=R_c(t)} = 0$$

с учетом (2) и (3) дает

$$R_c(t) = \frac{2\sigma}{|\Delta g + \Delta p \sin(\omega t)|}, \tag{4}$$

$$\Delta G_c(t) = \frac{16\pi\sigma^3}{3\big(\Delta g + \Delta p \sin(\omega t)\big)^2}. \tag{5}$$

Следует подчеркнуть, что выражения (4) и (5) не определяют критический радиус и барьер нуклеации в классическом смысле, так как они зависят от времени и задают мгновенное состояние системы в акустическом поле. При $|\Delta p| \ll |\Delta g|$ такие „мгновенные критические радиусы“ можно рассматривать как квазистатические аналоги классических величин. Это справедливо при высоких частотах УЗВ, когда система не успевает следить за быстрыми колебаниями давления и реагирует только на их усредненное влияние. При низких частотах нуклеацию можно описывать как квазистатическую задачу с „мгновенными“ параметрами. В промежуточном случае требуется более строгий нестационарный анализ на основе уравнения Зельдовича [14–16] с учетом влияния ультразвука.

Из (4) и (5) следует, что наиболее благоприятными для нуклеации оказываются фазы с положительным давлением, когда знаменатели в (4) и (5) достигают наибольших значений. Отрицательные давления (растяжение жидкости), возникающие в фазе разрежения акустической волны, снижают пересыщение. В результате критический радиус увеличивается, и вероятность образования зародыша уменьшается. Физический предел отрицательного давления, однако, ограничен пределом прочности жидкости. Хотя запись (4) и (5) формально допускает отрицательные значения давления, на практике стабильный рост зародыша возможен только до достижения этого предела.

Перейдем к расчету средних значений критического радиуса и работы нуклеации. Так как эффективное пересыщение среды быстро осциллирует во времени, определим усредненные по периоду акустических колебаний критические параметры

$$\langle R_c \rangle = \frac{\int_0^{2\pi/\omega} R_c(t) f(t) dt}{\int_0^{2\pi/\omega} f(t) dt}, \tag{6}$$

$$\langle \Delta G_c \rangle = \frac{\int_0^{2\pi/\omega} \Delta G_c(t) f(t) dt}{\int_0^{2\pi/\omega} f(t) dt}, \tag{7}$$

где верхние пределы интегрирования отвечают периоду колебаний. Функция $f(t)$ задает вероятность образования зародыша

$$f(t) = \exp\left(-\frac{\Delta G_c(t)}{k_B T}\right) = \exp\left(-\frac{16\pi\sigma^3}{3k_B T\big(\Delta g + \Delta p \sin(\omega t)\big)^2}\right), \tag{8}$$

где k_B — постоянная Больцмана, T — температура. Отметим, что распределение (8) используется не как строго равновесное, а как мгновенный вес вероятности образования зародыша. Это приближение оправдано, если период колебаний давления значительно меньше времени формирования критического зародыша, так что система реагирует лишь на среднее возмущение. Усреднения по периоду акустических колебаний в данном случае соответствуют стандартной процедуре исключения быстрых переменных в статистической физике и кинетике химических реакций. Интегралы в (6) и (7) с учетом (8) не могут быть выражены через известные элементарные функции. Для их вычисления будем пользоваться численными методами. Для удобства численных расчетов формулы (6) и (7) преобразуются к

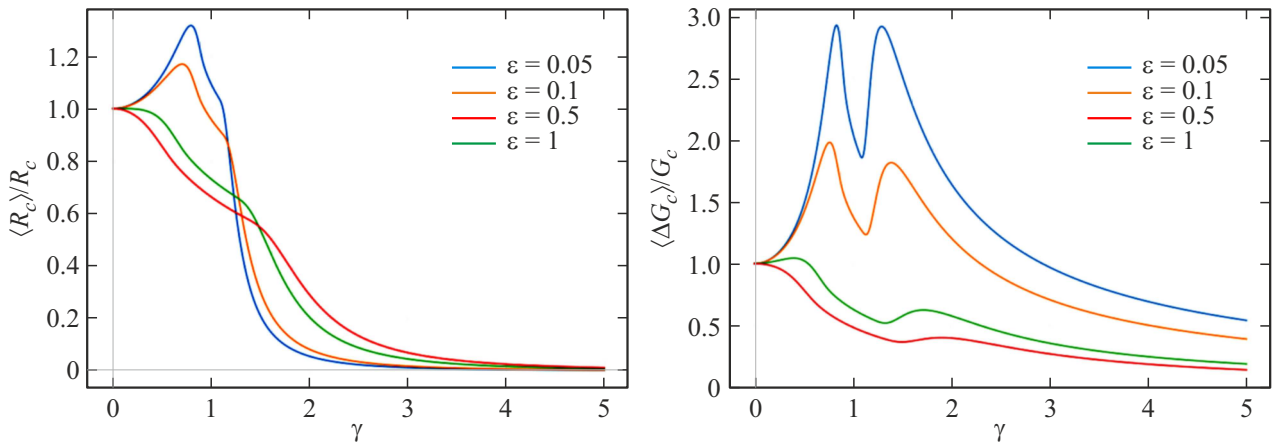

Рис. 1. Усредненные критический радиус и энергия образования зародыша как функции амплитуды модуляции давления при разных значениях параметра ε (относительная высота барьера нуклеации).

безразмерной форме

$$\frac{\langle R_c\rangle}{R_c} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{(1+\gamma\sin x)^2}\right)}{1+\gamma\sin x}\,dx \times \left(\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{(1+\gamma\sin x)^2}\right)dx\right)^{-1}, \quad (9)$$

$$\frac{\langle G_c\rangle}{\Delta G_c} = \int\limits_0^{2\pi} \frac{\exp\left(-\frac{\varepsilon}{(1+\gamma\sin x)^2}\right)}{(1+\gamma\sin x)^2}\,dx \times \left(\int\limits_0^{2\pi} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{(1+\gamma\sin x)^2}\right)dx\right)^{-1}, \quad (10)$$

$$\varepsilon = \frac{16\pi\sigma^3}{3k_{\mathrm{B}}T(\Delta g)^2}, \quad \gamma = \frac{\Delta p}{\Delta g},$$

где ε и γ задают безразмерные значения энергетического барьера и амплитуды ультразвуковых колебаний, R_c и ΔG_c — радиус критического зародыша и барьер нуклеации при $\Delta p = 0$.

Для вычисления интегралов в (9) и (10) использовался метод интегрирования по сетке (квадратура Гаусса–Кронрода), в котором числитель и знаменатель вычислялись отдельно, а затем определялось усредненное значение делением. Такая процедура обеспечивает точное приближение интегралов для гладких функций при достаточно малом шаге дискретизации.

Результаты расчетов приведены на рис. 1. Усредненный критический радиус в целом уменьшается с ростом амплитуды акустического давления, что облегчает преодоление барьера нуклеации. При $\gamma \to 0$ получается асимптотика $\langle R_c\rangle \to 0$. Усредненная работа нуклеации также снижается $\langle G_c\rangle \to 0$, что приводит к росту вероятности образования новых зародышей в зоне действия ультразвуковых колебаний.

Для малых значений безразмерного барьера ε (что соответствует высоким температурам) тепловая энергия системы становится сравнимой с энергетическим барьером нуклеации. В этих условиях поверхностный барьер меньше ограничивает образование зародышей, и весовая функция $f(t)$ остается близкой к единице для большинства фаз колебаний. В результате колебания давления усредняются практически без подавления, что приводит к увеличению среднего критического радиуса по сравнению со стационарным случаем. При $\varepsilon \to 0$ из (9) и (10) получаются точные аналитические выражения

$$\frac{\langle R_c\rangle}{R_c} = \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \geq 1, \quad (11)$$

$$\frac{\langle \Delta G_c\rangle}{\Delta G_c} = \frac{1}{\sqrt{(1-\gamma^2)^3}} \geq 1, \quad (12)$$

где $0 \leq \gamma < 1$. При больших значениях безразмерного барьера ε (что соответствует низким температурам, большим поверхностным натяжениям или малым движущим силам процесса) отрицательный показатель экспоненты весовой функции становится большим по модулю. Это приводит к тому, что весовая функция резко подавляет вклад фаз ультразвуковых колебаний, в которых эффективное пересыщение снижено, то есть, когда знаменатель $(1+\gamma\sin x)^2$ мал. В этих условиях основной вклад в усредненные параметры нуклеации вносят лишь узкие интервалы времени вблизи максимумов давления, где критический радиус минимален, а энергетический барьер существенно снижен. В результате усредненные значения $\langle R_c\rangle$ и $\langle G_c\rangle$ оказываются меньше, чем в стационарном случае, что соответствует эффективному ускорению нуклеации под действием ультразвукового воздействия.

Обращают на себя внимание два максимума на зависимости $\langle \Delta G_c\rangle$ от γ. Их наличие объясняется особенностями подынтегрального выражения (10), связанными с решением уравнения $1+\gamma\sin(x) = 0$ на промежутке

$[0, 2\pi]$. Эти особенности возникают при определенных амплитудах ультразвукового воздействия, когда пересыщение достигает экстремальных значений. Физическая интерпретация этого эффекта заключается в том, что в фазе разрежения акустическое поле уменьшает пересыщение, повышая энергетический барьер нуклеации и ухудшая условия образования зародышей. Напротив, в фазе сжатия пересыщение увеличивается, снижая барьер. Максимумы становятся заметными для малых значений $\varepsilon \ll 1$, что соответствует высоким температурам, когда экспоненциальная зависимость вероятности нуклеации становится менее резкой. При этом особенности подынтегральной функции проявляются ярче из-за ослабления экспоненциального подавления вклада фаз с пониженным пересыщением. Именно поэтому пики характерны для интеграла (10), где чувствительность энергии активации к модуляции пересыщения усиливается квадратичной зависимостью.

3. Диффузионный рост наночастиц

После образования критических зародышей дальнейшая эволюция системы определяется ростом наночастиц за счет переноса вещества из окружающей среды к их поверхности. Основным механизмом здесь является диффузия атомов или мономеров.

Следует отметить, что для стандартного ультразвука (частоты 20–100 kHz) период колебаний на несколько порядков меньше характерного времени нуклеации. В такой ситуации процесс образования и роста зародышей не способен реагировать на мгновенные флуктуации давления, поэтому динамика системы определяется усредненным воздействием ультразвука. Иными словами, при теоретическом описании требуется использовать эффективный барьер, усредненный по периоду ультразвуковых колебаний.

Математически моделирование диффузионного роста сводится к решению начально-краевой задачи с подвижной границей $R(t)$ (т. н. задача Стефана [17]). В этом случае концентрационное поле и скорость роста описываются уравнениями:

$$\frac{\partial C(r,t)}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial C}{\partial r}\right), \tag{13}$$

$$n_V \frac{dR(t)}{dt} = D\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_{r=R(t)}, \tag{14}$$

$$C(R,t) = C_0 \exp\left[\frac{V_a}{k_\mathrm{B}T}\left(\frac{2\sigma}{R} + \Delta p \sin(\omega t)\right)\right], \tag{15}$$

$$R(0) = R_c + \Delta R, \quad C(r \to \infty, t) = C_\infty, \tag{16}$$

где $C = C(r,t)$ — концентрация атомов или мономеров (m^{-3}), n_V — средняя объемная концентрация частиц в твердой фазе (m^{-3}), C_0 — равновесная концентрация над плоской поверхностью (m^{-3}), V_a — объем, приходящийся на один атом или мономер ($V_a = V_m/N_A$), D — коэффициент диффузии, $\Delta R > 0$ — некоторое малое отклонение от равновесного радиуса (флуктуация), требуемое для дальнейшего роста [14], C_∞ — концентрация в объеме жидкофазной среды (m^{-3}).

Задача (13)–(16) чрезвычайно сложна для аналитического решения и численного анализа из-за присутствия подвижной границы и быстрых ультразвуковых колебаний. Для исключения их влияния формулу Гиббса–Томсона (15) необходимо усреднить по периоду этих колебаний:

$$\langle C(R)\rangle = \frac{C_0\omega}{2\pi}\exp\left(\frac{2\sigma V_a}{k_\mathrm{B}TR}\right)\int_0^{2\pi/\omega}\exp\left(\frac{V_a\Delta p\sin(\omega t)}{k_\mathrm{B}T}\right)dt$$

$$= C_0^* \exp\left(\frac{2\sigma V_a}{k_\mathrm{B}TR}\right), \tag{17}$$

$$C_0^* = C_0 I_0\left(\frac{V_a\Delta p}{k_\mathrm{B}T}\right), \tag{18}$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка. Так как за один период акустических колебаний радиус $R(t)$ изменяется незначительно, его можно вынести из-под знака усредняющего интеграла. Таким образом, влияние ультразвука сводится к замене в формуле Гиббса–Томсона (15) исходной концентрации C_∞ на ее эффективное значение C_∞^*; физически это означает, что действие УЗВ эквивалентно повышению концентрации атомов или мономеров в объеме среды. Еще одно упрощение заключается в применении приближения почти неподвижной границы $R \approx \mathrm{const}$. Это соответствует квазистационарной аппроксимации, которая справедлива, если время роста мало по сравнению с характерным временем диффузии. В этом случае решение уравнения (13) записывается в виде

$$C(r,t) = C_\infty + \left[\langle C(R)\rangle - C_\infty\right]\frac{R}{r}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{Dt}}\right), \tag{19}$$

где $\mathrm{erfc}(x)$ — дополнительная функция ошибок. Подставляя (17) и (19) в (14) и вычисляя градиент, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dR(t)}{dt} = \frac{D}{n_V}\left[C_\infty - C_0^*\exp\left(\frac{2\sigma V_a}{k_\mathrm{B}TR}\right)\right]\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi Dt}}\right). \tag{20}$$

Далее перейдем к безразмерным переменным

$$r \to \frac{r}{R_c}, \quad t \to \frac{t}{\tau}, \quad R \to \frac{R}{R_c},$$

где

$$R_c = \frac{2\sigma V_a}{k_\mathrm{B}T\ln(C_\infty/C_0^*)}, \quad \tau = \frac{n_V R_c^2}{DC_0^*}.$$

В итоге получаем безразмерную концентрацию

$$\tilde{C}(r,t) = \frac{C(r,t) - C_\infty}{C_0^* - C_\infty}$$

$$= \frac{1-\beta^{1-1/R}}{1-\beta}\frac{R}{r}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{r-R}{2\sqrt{\frac{t}{\alpha\beta}}}\right), \tag{21}$$

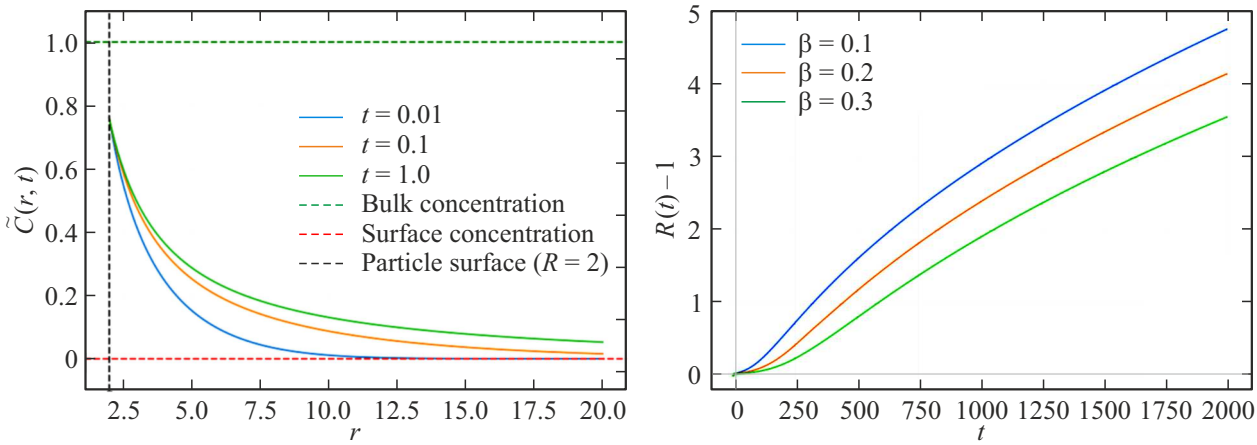

Рис. 2. Эволюция концентрационных профилей и кинетика роста наночастицы.

а также следующую задачу Коши

$$\frac{dR(t)}{dt} = \alpha\left(1 - \beta^{1-1/R}\right)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right), \tag{22}$$

$$R(0) = 1 + \rho, \tag{23}$$

где $\alpha = C_\infty/n_V$, $\beta = C_0^*/C_\infty$ и $\rho = \Delta R/R_c$. Решением задачи (22), (23) являются универсальные кривые роста, которые могут быть масштабированы для любых реальных параметров системы через соответствующие параметры подобия: радиус критического зародыша, коэффициент диффузии, температуру и амплитуду ультразвука.

На рис. 2 показаны результаты расчета по формуле (21) и численного решения задачи (22), (23) при $\alpha = 0.01$ и $\rho = 0.001$. Применялся метод Рунге–Кутты 4–5 порядка с адаптивным шагом (RK45). Из формулы (18) видно, что параметр β, который непосредственно связан с эффективной концентрацией на поверхности наночастицы C_0^*, зависит от амплитуды ультразвуковых колебаний Δp через модифицированную функцию Бесселя нулевого порядка $I_0(x)$. При малых амплитудах ($\Delta p \ll k_\mathrm{B}T/V_a$) справедливо приближение $I_0(x) \approx 1 + x^2/4$, что приводит к квадратичной зависимости $\beta \sim (\Delta p)^2$. При больших амплитудах ($\Delta p \gg k_\mathrm{B}T/V_a$) функция Бесселя ведет себя как $I_0(x) \sim \exp(x)/\sqrt{2\pi x}$, и β растет экспоненциально с Δp. Следовательно, увеличение амплитуды ультразвуковых колебаний приводит к нелинейному увеличению радиуса наночастицы, сначала умеренному (квадратичному) при малых амплитудах, а затем стремительному (экспоненциальному) при больших значениях Δp.

Наконец, отметим, что процесс роста наночастиц оказывается чувствительным к величине первоначального отклонения ρ от равновесного размера $R = 1$. Чем меньше ρ, тем дольше длится этап медленного нарастания, предшествующий активной стадии роста.

4. Заключение

В работе предложена теоретическая модель, описывающая в единых рамках термодинамику гомогенной нуклеации и кинетику последующего диффузионного роста наночастицы в условиях ультразвукового воздействия. Основной вывод работы заключается в том, что ультразвук не только снижает термодинамический барьер зарождения новой фазы, но и оказывает решающее влияние на последующую кинетику роста, причем это влияние наиболее критично именно на начальной стадии, сразу после образования критического зародыша.

Показано, что акустическое поле приводит к модификации классических параметров нуклеации. Усреднение критического радиуса и энергии образования зародыша позволило физически адекватно описать процесс зарождения новой фазы в нестационарных условиях. Установлено, что с ростом амплитуды ультразвука средние критический радиус и энергетический барьер уменьшаются, что в реальных экспериментах способствует активизированию процесса нуклеации.

Для начальной стадии роста основным результатом является установление того, что воздействие ультразвука эквивалентно эффективному повышению концентрации атомов или мономеров в объеме жидкофазной среды, что описывается введением параметра C_0^* через модифицированную функцию Бесселя (формулы (17), (18)). Это эффективное повышение концентрации является движущей силой роста. Численное решение полученного уравнения роста (22) продемонстрировало, что увеличение амплитуды ультразвука вызывает нелинейное ускорение роста наночастиц — от квадратичной зависимости при малых амплитудах до экспоненциальной при больших.

Таким образом, предложенный подход позволяет установить прямую количественную связь между интенсивностью ультразвуковой обработки и характеристиками формирующихся наночастиц. Разработанные термодинамическая и кинетическая модели могут служить основой

для прогнозирования результатов сонохимического синтеза наноматериалов. Дальнейшее их развитие связано с учетом конкурентного роста и процессов агломерации под действием акустических течений, а также с численным решением задачи (13)–(16) без каких-либо упрощений.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] K.S. Suslick, G.J. Price. Annu. Rev. Mater. Sci. **29**, 295 (1999). https://doi.org/10.1146/annurev.matsci.29.1.295
[2] J.H. Bang, K.S. Suslick. Adv. Mater. **22**, 1039 (2010). https://doi.org/10.1002/adma.200904093
[3] A. Gedanken. Ultrason. Sonochem. **11**, 47 (2004). https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2004.01.037
[4] H. Xu, B.W. Zeiger, K.S. Suslick. Chem. Soc. Rev. **42**, 2555 (2013). https://doi.org/10.1039/c2cs35282f
[5] M. Ashokkumar. Ultrason. Sonochem. **18**, 864 (2011). https://doi.org/10.1016/j.ultsonch.2010.11.016
[6] K. Okitsu, M. Ashokkumar, F. Grieser. J. Phys. Chem. B **109**, 20673 (2005). https://doi.org/10.1021/jp0549374
[7] H.N. Kim, K.S. Suslick. Crystals **8**, *7*, 280 (2018). https://doi.org/10.3390/cryst8070280
[8] R.A. Salkar, P. Jeevanandam, S.T. Aruna, Y. Koltypin, A. Gedanken. J. Mater. Chem. **9**, 1333 (1999). https://doi.org/10.1039/a900568d
[9] T.J. Mason, J.P. Lorimer. Applied sonochemistry: The uses of power ultrasound in chemistry and processing. Wiley-VCH, Weinheim (2002). 303 p.
[10] В.В. Чиркова, Н.А. Волков, Г.Е. Абросимова. ФТТ **67**, *1*, 56 (2025).
[11] D. Kashchiev. Nucleation: Basic theory with applications. Butterworth Heinemann, Oxford, Boston (2000). 544 p.
[12] N.T.K. Thanh, N. Maclean, S. Mahiddine. Chem. Rev. **114**, *15*, 7610 (2014). https://doi.org/10.1021/cr400544s
[13] В.А. Акуличев, В.Н. Алексеев, В.А. Буланов. Периодические фазовые превращения в жидкостях. Наука. М. (1986). 279 с.
[14] С.А. Кукушкин, А.В. Осипов. УФН **168**, *10*, 1084 (1998). https://doi.org/10.1070/PU1998v041n10ABEH000461
[15] V.V. Slezov. Kinetics of first-order phase transitions. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim (2009). 415 p.
[16] В.Г. Дубровский. Теория формирования эпитаксиальных наноструктур. Физматлит, М. (2009). 350 с.
[17] S.C. Gupta. The classical Stefan problem. Basic concepts, modelling and analysis with quasi-analytical solutions and methods. 2nd edn. Elsevier, Amsterdam (2017). 750 p. https://doi.org/10.1016/C2017-0-02306-6

Редактор А.Н. Смирнов