05,10

Нелинейная инерционная динамика намагниченности антиферромагнетиков и динамический магнитный гистерезис

© А.С. Титов[1], Н.В. Чукашев[1], С.В. Титов[2]

[1] Московский физико-технический институт,
Долгопрудный, Россия
[2] Фрязинский филиал института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
Фрязино, Россия

E-mail: titov.as@phystech.edu

Поступила в Редакцию 23 июля 2025 г.
В окончательной редакции 20 августа 2025 г.
Принята к публикации 30 августа 2025 г.

Исследован нелинейный отклик намагниченности антиферромагнитных наночастиц, находящихся под действием переменного магнитного поля крайне высокой частоты. Рассмотрен случай одноосной магнитной анизотропии подрешеток антиферромагнетиков с наложенным вдоль легкой оси внешним постоянным полем. Решение инерционного уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта методом последовательных приближений позволило получить аналитические выражения для компонент тензора нелинейной магнитной восприимчивости второго и третьего порядков. Рассчитан динамический магнитный гистерезис на крайне высоких частотах в области нутационного резонанса. Показано, что как нелинейная восприимчивость, так и форма петли гистерезиса в THz области частот существенно зависят от частоты переменного поля, а также от времени инерционной релаксации. Продемонстрировано, что такие нелинейные эффекты, как удвоение частоты и появление слабых субгармонических резонансных пиков, наблюдающихся в частотной области антиферромагнитного резонанса, воспроизводятся и в области нутационного резонанса.

Ключевые слова: антиферромагнетик, нутационный резонанс, антиферромагнитный резонанс, уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта, инерционность намагниченности, одноосная магнитная анизотропия, нелинейная восприимчивость, динамический магнитный гистерезис.

DOI: 10.61011/FTT.2025.09.61621.211-25

1. Введение

В современных технологиях все более широкое применение находят антиферромагнетики (АФМ), являющиеся предметом исследования в таком важном направлении как антиферромагнитная спинтроника [1–6]. АФМ — это магнитные материалы, в которых средний магнитный момент либо равен нулю, либо достаточно мал по сравнению с магнитными моментами, присутствующими внутри этих материалов [7]. Изучение динамики намагниченности АФМ имеет также важное значение для развития спинтроники, магноники и других областей науки, техники и биомедицины [8–10]. АФМ могут быть изоляторами, металлами, полуметаллами или полупроводниками и значительно более распространены, чем ферромагнетики (ФМ), которые преимущественно являются металлами [11]. АФМ встречаются как естественные, так создаются искусственно. В естественных АФМ небольшая намагниченность может быть результатом наличия слабой асимметрии в геометрии почти коллинеарных намагниченностей спиновых подрешеток АФМ. Так называемые „синтетические“ АФМ, как правило, образуют искусственные материалы со связанными взаимодействием слоями ФМ типа. Антипараллельные намагниченности спиновых подрешеток в АФМ подразумевают нечувствительность к паразитным магнитным полям [12], что является одним из преимуществ этих материалов. Другим полезным свойством АФМ является более быстрая спиновая динамика, чем в ФМ [13]. Так, из-за сильного обменного взаимодействия между спиновыми подрешетками антиферромагнитный резонанс может наблюдаться в терагерцовом частотном диапазоне [14,15], тогда как ферромагнитный резонанс из-за более слабого поля, обусловленного магнитной анизотропией, находится в гигагерцовом диапазоне частот [13,15]. В настоящее время весьма востребованными в новых технологических разработках являются магнитные наноструктуры, обладающие свойством сверхбыстрого перемагничивания. При этом в сверхбыстрых динамических процессах существенную роль играет инерционность намагниченности [16,17].

Теоретические исследования [18–22] показали, что инерционность намагниченности приводит к нутационному движению вектора намагниченности, которое накладывается на его регулярную прецессию вокруг эффективного поля. Нутация намагниченности проявляется в виде нутационного резонанса (НР) в ФМ [22–25] и АФМ [25–27] в терагерцовом (THz) диапазоне частот,

а также в виде нутационных волн [28–30]. Экспериментальное подтверждение инерционной динамики намагниченности представлено в работах [31,32], где описан обусловленный инерционностью намагниченности НР, наблюдаемый в тонких ферромагнитных пленках NiFe, CoFeB и Co на THz частотах. В основе теоретических исследований инерционной динамики намагниченности лежит уравнение Ландау–Лифшица–Гильберта (ЛЛГ), дополненное инерционным членом. На микроскопическом уровне разработан ряд теоретических моделей, приводящих к инерционному уравнению ЛЛГ. Среди них можно отметить исследования, основанные на вычислении корреляции крутящего момента [33], на обобщении модели поверхности Ферми [34], на применении метода анализа электронной структуры [35], на рассмотрении релятивистской спиновой динамики [36,37], и др. Например, в [36] показано, что появление инерционного члена в обобщенном уравнении ЛЛГ является следствием учета релятивистских членов более высокого порядка при рассмотрении спин-орбитального взаимодействия по сравнению с теми, что приводят к затуханию Гильберта.

В случае АФМ для описания динамики намагниченностей его подрешеток используется система взаимосвязанных инерционных уравнений ЛЛГ. Далее для простоты нами рассматриваются АФМ с двумя идентичными подрешетками, для которых инерционные уравнения ЛЛГ имеют вид [25,27]

$$\dot{\mathbf{M}}_i = \gamma[\mathbf{H}_i^{eff} \times \mathbf{M}_i] + \frac{\alpha}{M_0}[\mathbf{M}_i \times \dot{\mathbf{M}}_i] + \frac{\tau}{M_0}[\mathbf{M}_i \times \ddot{\mathbf{M}}_i], \tag{1}$$

где $\mathbf{M}_i$ — намагниченность i-ой подрешетки ($i = 1, 2$), γ — гиромагнитное отношение, α — безразмерный параметр затухания, τ — время инерционной релаксации, $M_0 = |\mathbf{M}_i|$ — абсолютная величина векторов намагниченностей идентичных подрешеток идеального АФМ, которая не меняется в процессе движения. Эффективное поле каждой из подрешеток $\mathbf{H}_i^{eff}$ представляет собой совокупность нескольких полей. Наряду с внешними магнитными постоянным $\mathbf{H}_0$ и переменным $\mathbf{H}_{ac}$ полями и внутренним полем $\mathbf{H}_K$, обусловленным магнитной анизотропией, оно включает в себя также поле $\mathbf{H}_\Lambda$, обусловленное обменным взаимодействием между подрешетками, а именно

$$\mathbf{H}_i^{eff} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{ac} + \mathbf{H}_K^i + \mathbf{H}_\Lambda^i.$$

Если величина внешнего переменного поля мала $h = H_{ac}/H_K \ll 1$, где $H_{ac} = |\mathbf{H}_{ac}|$ и H_K — максимальное значение поля анизотропии $\mathbf{H}_K$, уравнение (1) можно решить с помощью теории линейного отклика, исходящей из линейной зависимости между величиной переменного поля и суммарной намагниченностью АФМ $\mathbf{M}(t)$ и позволяющей получить выражения для тензора линейной магнитной восприимчивости АФМ [27]. В сильных переменных полях линейная зависимость между полем и намагниченностью не выполняется в силу нелинейности инерционного уравнения ЛЛГ. В этом случае в стационарном отклике намагниченности на переменное поле возникают колебания не только с частотой поля, как в линейном случае, но и появляются гармоники основной частоты, а также наблюдается ряд других нелинейных эффектов [7,38]. При значительных амплитудах внешнего поля учет нелинейных эффектов необходим для более точных расчетов компонент тензора восприимчивости АФМ, петли и площади динамического магнитного гистерезиса (ДМГ), индуцированного полем двулучепреломления, и в ряде других приложений [38–46], где наряду с амплитудой важную роль играет частота внешнего переменного поля. Определенный интерес вызывает также случай наложения на сильное переменное поле постоянного поля и возможность с его помощью менять характеристики отклика и проявление других эффектов [47].

Возникновение НР в THz области спектра приводит к появлению ДМГ на этих частотах. Хотя нелинейные эффекты и ДМГ в неинерционном режиме изучены достаточно хорошо, в том числе и в условиях теплового шума [44–54], в инерционном режиме на частотах в области НР подобные исследования проводились лишь для ферромагнитных частиц [38]. Данная работа посвящена исследованию нелинейной восприимчивости и ДМГ АФМ на крайне высоких частотах в области НР. Нелинейные поправки к линейной части восприимчивости АФМ вычисляются путем решения инерционного уравнения ЛЛГ методом последовательных приближений с сохранением членов второго и третьего порядка. Анализируется также влияние инерционности, величины постоянного поля и частоты переменного поля на магнитную восприимчивость и на ДМГ в THz области частот.

2. Динамика намагниченности АФМ в сильном переменном поле

Эффективное магнитное поле i-ой подрешетки в уравнении (1) определяется как

$$\mathbf{H}_i^{eff}(t) = -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, t)}{\partial \mathbf{M}_i}, \tag{2}$$

где μ_0 — магнитная постоянная, $V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, t)$ — плотность магнитной энергии АФМ [7]. Для простоты далее мы рассматриваем АФМ с подрешетками, обладающими одноосной магнитной анизотропией. В этом случае функция $V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, t)$ имеет вид

$$V(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, t) = \frac{\Lambda}{M_0^2}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 - \sum_{i=1,2}\left(K\frac{(\mathbf{M}_i\mathbf{e}_Y)^2}{M_0^2} + \mu_0 H_0(\mathbf{e}_Y\mathbf{M}_i) + \mu_0 H_{ac}e^{i\omega t}(\mathbf{e}_Z\mathbf{M}_i)\right), \tag{3}$$

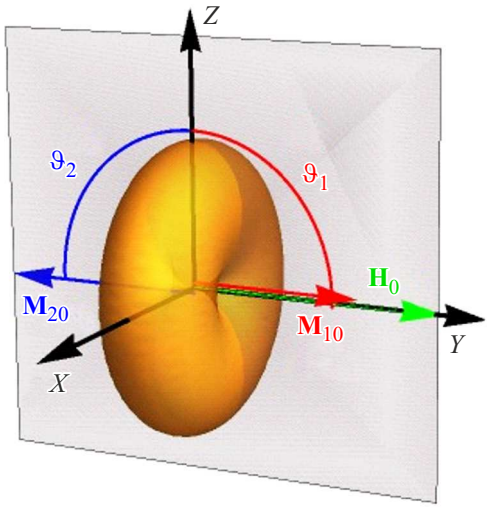

Рис. 1. Геометрия задачи: легкая ось внутреннего потенциала направлена вдоль оси Y, а внешние постоянное и переменное поля задаются как $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_Y$ и $\mathbf{H}_{ac}(t) = H_{ac}e^{i\omega t}\mathbf{e}_Z$.

где H_0 — величина постоянного магнитного поля, H_{ac} — амплитуда переменного поля, ω — частота переменного поля, Λ — параметр обменного взаимодействия между подрешетками, K — константа одноосной магнитной анизотропии подрешеток, $\mathbf{e}_X$, $\mathbf{e}_Y$ и $\mathbf{e}_Z$ — единичные вектора вдоль осей X, Y и Z. Геометрия задачи показана на рис. 1, где оси симметрии (легкие оси) подрешеток и постоянное поле $\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_Y$ ориентированы вдоль оси Y, а переменное поле направлено поперек легких осей $\mathbf{H}_{ac}(t) = H_{ac}e^{i\omega t}\mathbf{e}_Z$. Трехмерная поверхность, изображенная на рис. 1, определяется как поверхность постоянного значения функции

$$F(\vartheta, \varphi) = \bar{V}(\vartheta, \pi - \vartheta, \varphi, \pi + \varphi) - \bar{V}(\vartheta_1^0, \vartheta_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0),$$

где функция $\bar{V}$ определяется выражением (3) без учета переменного поля. Далее мы рассматриваем случай относительно небольшого постоянного поля, а именно $0 < H_0 < \sqrt{2(K+\Lambda)/(\mu_0 M_0)}$, при котором положения минимумов функции $\bar{V}$ задаются углами $\vartheta_1^0 = \vartheta_2^0 = \pi/2$, $\varphi_1^0 = \pi/2$ и $\varphi_2^0 = 3\pi/2$ [27].

Поскольку ориентация каждого из векторов $\mathbf{M}_i$ однозначно определяется парой сферических координат (ϑ_i, φ_i), то с учетом выражения (2) уравнение (1) может быть представлено в сферических координатах в виде системы четырех скалярных уравнений [5]

$$\tau\ddot{\vartheta}_i + \alpha\dot{\vartheta}_i - \dot{\varphi}_i \sin\vartheta_i - \tau\dot{\varphi}_i^2 \cos\vartheta_i \sin\vartheta_i + \partial_{\vartheta_i} U = 0, \quad (4)$$

$$\tau\ddot{\varphi}_i \sin\vartheta_i + \alpha\dot{\varphi}_i \sin\vartheta_i + \dot{\vartheta}_i + 2\tau\dot{\vartheta}_i\dot{\varphi}_i \cos\vartheta_i + \csc\vartheta_i \partial_{\varphi_i} U = 0, \quad (5)$$

где $U \equiv \gamma V/\mu_0 M_0$ — нормированная плотность магнитной энергии (3) и $i = 1, 2$. Функцию U удобно записать в виде суммы двух членов $U = \bar{U} + \tilde{U}e^{i\omega t}$, где

$$\tilde{U} = -\omega_{ac} \sum_{i=1,2} \cos\vartheta_i \quad (6)$$

— плотность зеемановской энергии, обусловленной взаимодействием намагниченностей подрешеток с внешним переменным полем, а функция $\bar{U}$ включает в себя все остальные виды потенциальных энергий и задается как

$$\bar{U} = \omega_\Lambda\big(\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + \cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2\big) - \sum_{i=1,2}\left(\frac{\omega_K}{2}\sin^2\vartheta_i \sin^2\varphi_i + \omega_0 \sin\vartheta_i \sin\varphi_i\right). \quad (7)$$

Параметры $\omega_\Lambda = \gamma H_\Lambda = \gamma\Lambda/(\mu_0 M_0)$, $\omega_K = \gamma H_K = 2\gamma K/(\mu_0 M_0)$, $\omega_0 = \gamma H_0$ и $\omega_{ac} = \gamma H_{ac}$ в выражениях (6) и (7) имеют размерность частоты и связаны, соответственно, с обменным взаимодействием, магнитной анизотропией и зеемановским взаимодействием с внешними постоянным и переменным магнитными полями.

Временну́ю эволюцию угловых координат $\vartheta_i = \vartheta_i(t)$ и $\varphi_i = \varphi_i(t)$, удовлетворяющих системе уравнений (4) и (5), можно представить в виде суперпозиций колебаний с частотами $k\omega$ и амплитудами $(\vartheta_i^k, \varphi_i^k)$ около положений равновесия $(\vartheta_i^0, \varphi_i^0)$, определяемых минимумами функции $\bar{U}$. Соответственно, решение системы уравнений (4) и (5) удобно представить в виде рядов Фурье

$$\vartheta_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vartheta_i^k e^{ik\omega t}, \quad \varphi_i(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_i^k e^{ik\omega t}, \quad (8)$$

где мы ограничиваемся рассмотрением только членов с $k \le 3$ из-за быстро возрастающей сложности аналитических выражений для амплитуд $(\vartheta_i^k, \varphi_i^k)$ с ростом индекса k. Поскольку значения углов $\vartheta_i(t)$ и $\varphi_i(t)$ действительны, коэффициенты Фурье в выражениях (8) должны удовлетворять условиям $\vartheta_i^k = (\vartheta_i^{-k})^*$ и $\varphi_i^k = (\varphi_i^{-k})^*$.

Подставляя выражения (8) в систему уравнений (4) и (5), учитывая, что $|\vartheta_i^0| \gg |\vartheta_i^1| \gg |\vartheta_i^2| \ldots$ и $|\varphi_i^0| \gg |\varphi_i^1| \gg |\varphi_i^2| \ldots$, и группируя слагаемые при степенях $e^{ik\omega t}$, обладающих одинаковой малостью, можно получить систему уравнений для амплитуд гармоник. Для $k = 1$ эта система имеет вид

$$(\tau\omega^2 - i\omega\alpha)\vartheta_i^1 + i\omega \sin\vartheta_i^0 \varphi_i^1 - \sum_{j=1,2}(\bar{U}_{\vartheta_i\vartheta_j}\vartheta_j^1 + \bar{U}_{\vartheta_i\varphi_j}\varphi_j^1) = \tilde{U}_{\vartheta_i}, \quad (9)$$

$$-i\omega \sin\vartheta_i^0 \vartheta_i^1 + (\tau\omega^2 - i\omega\alpha)\sin^2\vartheta_i^0 \varphi_i^1 - \sum_{j=1,2}(\bar{U}_{\varphi_i\vartheta_j}\vartheta_j^1 + \bar{U}_{\varphi_i\varphi_j}\varphi_j^1) = \tilde{U}_{\varphi_i}. \quad (10)$$

Здесь учтено, что $\bar{U}_{\vartheta_i}\big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = 0$ и $\bar{U}_{\varphi_i}\big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = 0$, но $\bar{U}_{\vartheta_i}\big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = 0$ и $\bar{U}_{\varphi_i}\big|_{\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{\theta}_0} = 0$, где $\boldsymbol{\theta}_0 = (\vartheta_1^0, \vartheta_2^0, \varphi_1^0, \varphi_2^0)$ —

положение минимума функции $\bar{U}$ и $\boldsymbol{\theta}(t) = \big(\vartheta_1(t), \vartheta_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$.

Уравнения (9) и (10) удобно представить в матричной форме

$$(\tau\omega^2\mathbf{I} - i\omega\mathbf{D} - \mathbf{U})\boldsymbol{\theta}_1 = \mathbf{F}_1, \tag{11}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица,

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \alpha & -\sin\vartheta_1^0 & 0 & 0 \\ \sin^{-1}\vartheta_1^0 & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\sin\vartheta_2^0 \\ 0 & 0 & \sin^{-1}\vartheta_2^0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{12}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \bar{U}_{\vartheta_1\vartheta_1} & \bar{U}_{\vartheta_1\varphi_1} & \bar{U}_{\vartheta_1\vartheta_2} & \bar{U}_{\vartheta_1\varphi_2} \\ \dfrac{\bar{U}_{\varphi_1\vartheta_1}}{\sin^2\vartheta_1^0} & \dfrac{\bar{U}_{\varphi_1\varphi_1}}{\sin^2\vartheta_1^0} & \dfrac{\bar{U}_{\varphi_1\vartheta_2}}{\sin^2\vartheta_1^0} & \dfrac{\bar{U}_{\varphi_1\varphi_2}}{\sin^2\vartheta_1^0} \\ \bar{U}_{\vartheta_2\vartheta_1} & \bar{U}_{\vartheta_2\varphi_1} & \bar{U}_{\vartheta_2\vartheta_2} & \bar{U}_{\vartheta_2\varphi_2} \\ \dfrac{\bar{U}_{\varphi_2\vartheta_1}}{\sin^2\vartheta_2^0} & \dfrac{\bar{U}_{\varphi_2\varphi_1}}{\sin^2\vartheta_2^0} & \dfrac{\bar{U}_{\varphi_2\vartheta_2}}{\sin^2\vartheta_2^0} & \dfrac{\bar{U}_{\varphi_2\varphi_2}}{\sin^2\vartheta_2^0} \end{pmatrix} \tag{13}$$

— системные матрицы,

$$\mathbf{F}_1 = \begin{pmatrix} \tilde{U}_{\vartheta_1} \\ \sin^{-2}\vartheta_1^0\tilde{U}_{\varphi_1} \\ \tilde{U}_{\vartheta_2} \\ \sin^{-2}\vartheta_2^0\tilde{U}_{\varphi_2} \end{pmatrix} \tag{14}$$

— свободный вектор, а

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \begin{pmatrix} \vartheta_1^1 \\ \varphi_1^1 \\ \vartheta_2^1 \\ \varphi_2^1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

— вектор искомых амплитуд в разложениях (8).

Аналогично получаются матричные уравнения для векторов $\boldsymbol{\theta}_k$, которые в общем виде записываются как

$$(\tau k^2\omega^2\mathbf{I} - ik\omega\mathbf{D} - \mathbf{U})\boldsymbol{\theta}_k = \mathbf{F}_k. \tag{16}$$

Выражения для свободных векторов $\mathbf{F}_k$ при $k = 2$ и $k = 3$ приведенны в Приложении. Формальное решение уравнения (16) имеет вид

$$\boldsymbol{\theta}_k = (\tau k^2\omega^2\mathbf{I} - ik\omega\mathbf{D} - \mathbf{U})^{-1}\mathbf{F}_k. \tag{17}$$

3. Компоненты тензора магнитной восприимчивости АФМ

Вектора $\boldsymbol{\theta}_k$ из уравнения (17) позволяют рассчитать компоненты тензора восприимчивостей $\hat{\chi}^{(k)} = \hat{\chi}'^{(k)}(\omega) - i\hat{\chi}''^{(k)}(\omega)$ n-го порядка, которые являются коэффициентами в разложении декартовых компонент вектора намагниченности M_x, M_Y и M_Z по степеням $e^{ik\omega t}$

$$M_X(t) = M_0\sum_{i=1,2}\sin\left(\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_i^k e^{ik\omega t}\right)\cos\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_i^k e^{ik\omega t}\right)$$
$$= M_X^C + \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{XZ}^{(k)}(\omega)H_{ac}^k e^{ik\omega t}, \tag{18}$$

$$M_Y(t) = M_0\sum_{i=1,2}\sin\left(\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_i^k e^{ik\omega t}\right)\sin\left(\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_i^k e^{ik\omega t}\right)$$
$$= M_Y^C + \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{YZ}^{(k)}(\omega)H_{ac}^k e^{ik\omega t}, \tag{19}$$

$$M_Z(t) = M_0\sum_{i=1,2}\cos\left(\sum_{k=0}^{\infty}\vartheta_i^k e^{ik\omega t}\right)$$
$$= M_Z^C + \sum_{k=1}^{\infty}\chi_{ZZ}^{(k)}(\omega)H_{ac}^k e^{ik\omega t}, \tag{20}$$

где M_X^C, M_Y^C и M_Z^C — не зависящие от времени части вектора $\mathbf{M}$, определяемые как

$$M_X^C = M_0\sum_{i=1,2}\sin\vartheta_i^0\cos\varphi_i^0, \tag{21}$$

$$M_Y^C = M_0\sum_{i=1,2}\sin\vartheta_i^0\sin\varphi_i^0, \tag{22}$$

$$M_Z^C = M_0\sum_{i=1,2}\cos\vartheta_i^0. \tag{23}$$

Выражая $\chi_{GZ}^{(1)}(\omega)$ $(G = X, Y, Z)$ через элементы вектора $\boldsymbol{\theta}_1$ с помощью формул (18)–(20), получаем в линейном приближении следующие выражения

$$\chi_{XZ}^{(1)}(\omega)H_{ac} = M_0\sum_{i=1,2}(\vartheta_i^1\cos\vartheta_i^0\cos\varphi_i^0 - \varphi_i^1\sin\vartheta_i^0\sin\varphi_i^0), \tag{24}$$

$$\chi_{YZ}^{(1)}(\omega)H_{ac} = M_0\sum_{i=1,2}(\vartheta_i^1\cos\vartheta_i^0\sin\varphi_i^0 + \varphi_i^1\sin\vartheta_i^0\cos\varphi_i^0), \tag{25}$$

$$\chi_{ZZ}^{(1)}(\omega)H_{ac} = -M_0\sum_{i=1,2}\vartheta_i^1\sin\vartheta_i^0. \tag{26}$$

Здесь зависимость от частоты ω содержится в элементах вектора $\boldsymbol{\theta}_1$ (см. уравнение (17)). Уравнения (17) и (24)–(26) позволяют произвести численный расчет компонент тензора линейной восприимчивости. Результаты расчета действительной и мнимой частей $\chi_{ZZ}^{(1)}(\omega)$ показаны на рис. 2 для следующих значений параметров: $\alpha = 0.01$, $\omega_K\tau = 0.005$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$ и $\omega_0/\omega_K = 0.1, 1.5, 3$. В слабом внешнем поле наблюдается прецессия суммарной намагниченности подрешеток АФМ, как единого вектора,

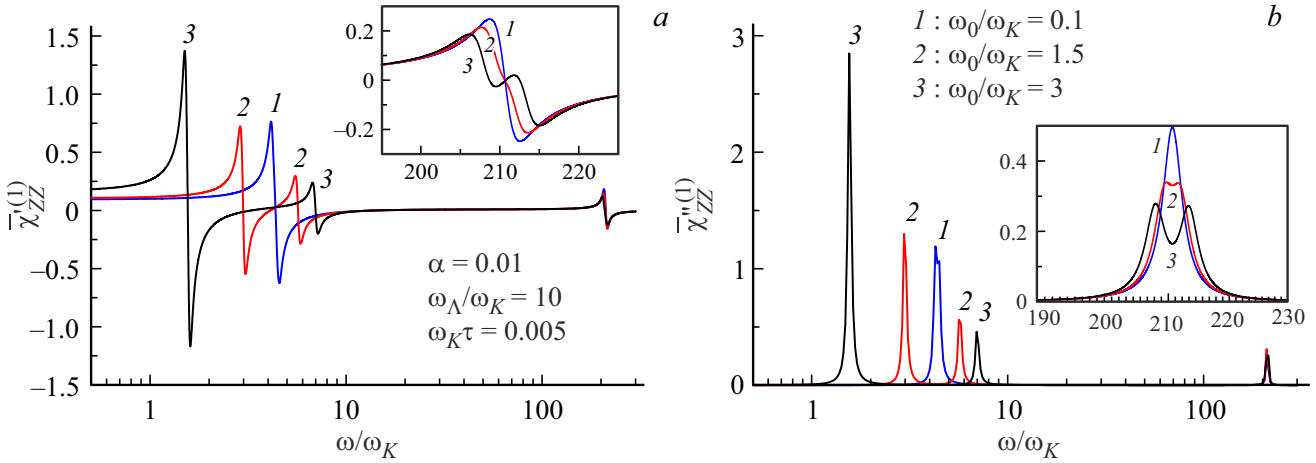

Рис. 2. Действительная $\bar{\chi}'^{(1)}_{ZZ}$ (a) и мнимая $\bar{\chi}''^{(1)}_{ZZ}$ (b) части компоненты нормированного тензора линейной восприимчивости $\bar{\chi}^{(1)}_{ZZ} = \chi^{(1)}_{ZZ} H_K/M_0$ (уравнение (24)) в зависимости от частоты ω/ω_K при $\alpha = 0.01$, $\omega_K\tau = 0.005$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$ и различных значениях ω_0/ω_K.

что приводит к возникновению только одного резонансного пика, как в области антиферромагнитного, так и в области нутационного резонансов (кривая *1* на рис. 2, b). При увеличении внешнего поля в обоих областях появляются два резонансных пика. Частоты антиферромагнитных резонансов можно оценить как $\omega^p_\pm \sim \sqrt{\omega_K(2\omega_\Lambda + \omega_K)} \pm \omega_0$ [27]. Частоты более слабых НР оцениваются как $\omega^n_\pm \sim \tau^{-1} + \omega_K + \omega_\Lambda \pm \omega_0$ [27]. С уменьшением величины внешнего поля H_0 частотное разделение между пиками сокращается, и они сливаются при $H_0 = 0$. Данные результаты находятся в соответствиями с результатами работ [26,27]. Следует отметить, что для $\chi^{(1)}_{YZ}(\omega)$ получается нулевое значение. Аналогичный результат получается при расчетах нелинейной восприимчивости ФМ [38] и приводит к важному эффекту удвоения частоты сигнала, который мы опишем на примере расчета нелинейной восприимчивости второго порядка.

Выражая компоненты тензора нелинейной восприимчивости второго порядка $\chi^{(2)}_{GZ}(\omega)$ ($G = X, Y, Z$) через элементы векторов $\boldsymbol{\theta}_1$ и $\boldsymbol{\theta}_2$ с помощью формул (18)–(20), получаем следующие выражения

$$\chi^{(2)}_{XZ}(\omega)H^2_{ac} = M_0 \sum_{i=1,2}\Bigg(\vartheta^2_i \cos\vartheta^0_i \cos\varphi^0_i - \varphi^2_i \sin\vartheta^0_i \sin\varphi - \frac{(\vartheta^1_i)^2 + (\varphi^1_i)^2}{2}\sin\vartheta^0_i \cos\varphi^0_i - \vartheta^1_i\varphi^1_i \cos\vartheta^0_i \sin\varphi^0_i\Bigg), \tag{27}$$

$$\chi^{(2)}_{YZ}(\omega)H^2_{ac} = M_0 \sum_{i=1,2}\Bigg(\vartheta^2_i \cos\vartheta^0_i \sin\varphi^0_i + \varphi^2_i \sin\vartheta^0_i \cos\varphi^0_i - \frac{(\vartheta^1_i)^2 + (\varphi^1_i)^2}{2}\sin\vartheta^0_i \sin\varphi^0_i + \vartheta^1_i\varphi^1_i \cos\vartheta^0_i \cos\varphi^0_i\Bigg), \tag{28}$$

$$\chi^{(2)}_{ZZ}(\omega)H^2_{ac} = M_0 \sum_{i=1,2}\Bigg(-\frac{(\vartheta^1_i)^2}{2}\cos\vartheta^0_i - \vartheta^2_i \sin\vartheta^0_i\Bigg). \tag{29}$$

Решение уравнения (17) при $k = 1, 2$ и подстановка этого решения в формулы (27)–(29) позволяют произвести численный расчет компонент тензора восприимчивости второго порядка. Расчеты показывают, что здесь наблюдается обратная картина по сравнению с линейной восприимчивостью, а именно $\chi^{(2)}_{ZZ}(\omega) = 0$, тогда как $\chi^{(2)}_{YZ}(\omega) \neq 0$. Таким образом, стационарный отклик намагниченности вдоль легкой оси подрешеток АФМ на переменное поле с частотой ω наблюдается с удвоенной частотой 2ω, а именно $M_Y(t) - M^C_X = \chi^{(2)}_{YZ}(\omega)H^2_{ac}e^{i2\omega t} + \ldots$. Это явление хорошо изучено для ФМ и АФМ на частотах вблизи ферромагнитного и антиферромагнитного резонансов [7]. Важно отметить, что здесь мы отмечаем наличие этого эффекта в АФМ на частотах вблизи НР. В данном случае наблюдается прямая аналогия с этим же эффектом, описанным нами ранее в ФМ на крайне высоких частотах [38]. Аналогия связана со схожей геометрией задачи, а именно в слабом внешнем постоянном поле, направленном вдоль легкой оси подрешеток, расположение минимумов функции плотности магнитной энергии (без учета переменного поля) подрешеток ферромагнитного типа соответствуют расположению минимумов этой функции в ФМ при том же направлении постоянного поля. С увеличением величины постоянного поля расположение минимумов функции плотности магнитной энергии АФМ меняется, что обуславливает различные состояния АФМ в зависимости от величины и направления внешнего постоянного поля [7,27]. Проявление нелинейных эффектов в других состояниях АФМ требует отдельных исследований.

Компоненты тензора нелинейной восприимчивости третьего порядка $\chi^{(3)}_{GZ}(\omega)$ ($G = X, Y, Z$) получаются

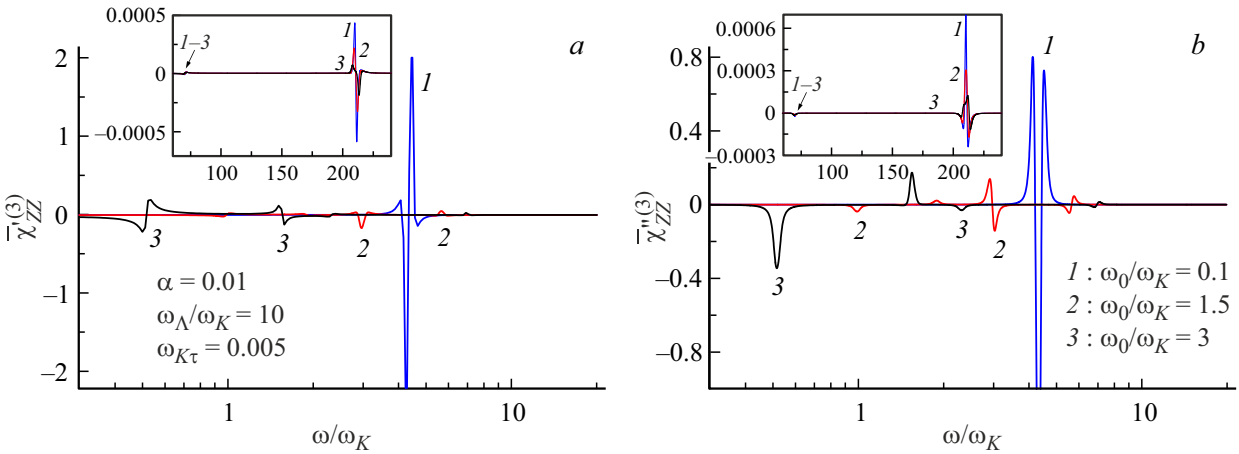

Рис. 3. Действительная $\bar{\chi}'^{(3)}_{ZZ}$ (a) и мнимая $\bar{\chi}''^{(3)}_{ZZ}$ (b) компоненты нормированного тензора восприимчивости в третьего порядка $\bar{\chi}^{(3)}_{ZZ} = \chi^{(3)}_{ZZ} H_K^3/M_0$ (уравнение (24)) в зависимости от частоты ω/ω_K при $\alpha = 0.01$, $\omega_K\tau = 0.005$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$ и различных значениях ω_0/ω_K.

из уравнений (17) и (24)–(26) при $k = 3$, а именно

$$\chi^{(3)}_{XZ}(\omega)H^3_{ac} = M_0 \sum_{i=1,2} \Big[-(\vartheta_i^2\varphi_i^1 + \vartheta_i^1\varphi_i^2)\cos\vartheta_i^0 \sin\varphi_i^0 - (\vartheta_i^1\vartheta_i^2 + \varphi_i^1\varphi_i^2)\sin\vartheta_i^0\cos\varphi_i^0 + \left(\vartheta_i^3 - \frac{(\vartheta_i^1)^3}{6} - \frac{1}{2}\vartheta_i^1(\varphi_i^1)^2\right)\cos\vartheta_i^0\cos\varphi_i^0 - \left(\varphi_i^3 - \frac{(\varphi_i^1)^3}{6} - \frac{1}{2}(\vartheta_i^1)^2\varphi_i^1\right)\sin\vartheta_i^0\sin\varphi_i^0 \Big], \tag{30}$$

$$\chi^{(3)}_{YZ}(\omega)H^3_{ac} = M_0 \sum_{i=1,2} \Big[-(\vartheta_i^1\vartheta_i^2 + \varphi_i^1\varphi_i^2)\sin\vartheta_i^0\sin\varphi_i^0 + (\vartheta_i^2\varphi_i^2 + \vartheta_i^1\varphi_i^2)\cos\vartheta_i^0\cos\varphi_i^0 + \left(\vartheta_i^3 - \frac{(\vartheta_i^1)^3}{6} - \frac{1}{2}\vartheta_i^1(\varphi_i^1)^2\right)\cos\vartheta_i^0\sin\varphi_i^0 + \left(\varphi_i^3 - \frac{(\varphi_i^1)^3}{6} - \frac{1}{2}(\vartheta_i^1)^2\varphi_i^1\right)\sin\vartheta_i^0\cos\varphi_i^0 \Big], \tag{31}$$

$$\chi^{(3)}_{ZZ}(\omega)H^3_{ac} = M_0 \sum_{i=1,2} \left(\left(\frac{(\vartheta_i^1)^3}{6} - \vartheta_i^3 \right) \sin\vartheta_i^0 - \vartheta_i^1\vartheta_i^2\cos\vartheta_i^0 \right). \tag{32}$$

Частотные зависимости действительной и мнимой частей $\chi^{(3)}_{ZZ}(\omega)$ при $\alpha = 0.01$, $\omega_K\tau = 0.005$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$ и $\omega_0/\omega_K = 0.1, 1.5, 3$ приведены на рис. 3.

Заметим, что $\chi^{(3)}_{XX}(\omega)$ содержит дополнительную субгармонику НР при $\omega = \omega_{NR}/3$ (см. вкладки на рис. 3). Генерация субгармоник аналогична проявлению субгармоник в нелиненых колебаниях под воздействием внешней переменной силы [55].

4. Динамический магнитный гистерезис на сверхвысоких частотах

Динамический магнитный гистерезис (ДМГ) индуцируется внешним переменным полем и имеет большое практическое значение, поскольку обуславливает нагрев магнитных материалов этим полем [2–4]. Визуально петля ДМГ представляет собой плоскую параметрическую кривую в прямоугольных координатах. По оси абсцисс этих координат удобно отображать нормированную величину внешнего переменного поля $h(t) = \mathrm{Re}[H_{ac}(t)]/H_{ac} = \cos\omega t$, а по оси ординат — нормированную величину декартовой компоненты намагниченности $m(t) = \mathrm{Re}[M_G(t)]/M_0$, где t меняется в пределах периода колебаний $T = 2\pi/\omega$, а индекс $G = X, Y, Z$ характеризует рассматриваемую компоненту вектора намагниченности $\mathbf{M}$. Площадь петли ДМГ связана с энергией, поглощаемой материалом за период T, тогда как форма, наклон и положение геометрического центра петли зависят как от величины внешнего постоянного поля, так и от величины и частоты внешнего переменного поля [38,47]. Тогда как ДМГ хорошо изучен как в низкочастотной части спектров магнитных материалов, так и в области ферромагнитных и антиферромагнитных резонансов [38,47,56], на крайне высоких частотах он практически не исследовался. Так в работе [38] приведены данные о ДМГ в ферромагнитных наночастицах на частотах в области НР. Здесь мы приводим результаты расчета ДМГ на крайне высоких частотах для антиферромагнитных частиц.

Уравнение (18) позволяет получить изображение петли гистерезиса для $G = X$, показанной на рис. 4–7. На рис. 4 варьируется частота переменного поля ω в области НР. Наглядно видно, что по мере удаления от частоты НР $\omega_{NR} \sim \tau^{-1}$ происходит схлопывание петли, что обусловлено уменьшением поглощения электромагнитной энергии вдали от резонансной линии, и

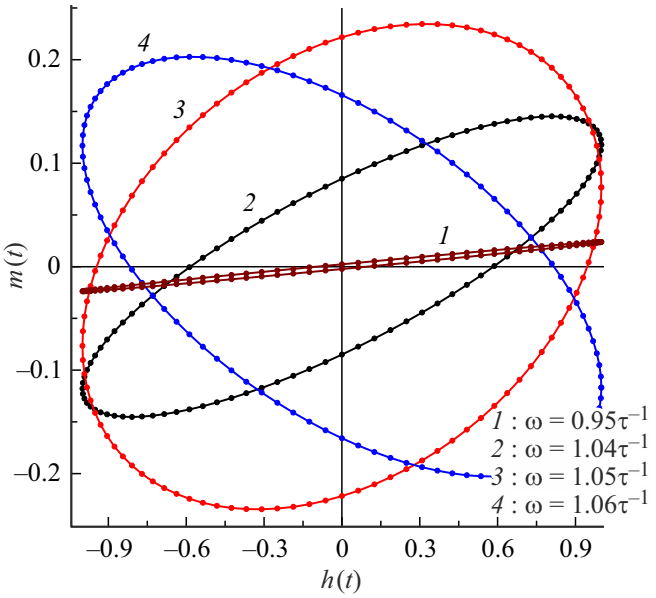

Рис. 4. ДМГ при $\alpha = 0.01$, $\omega_K\tau = 0.005$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$, $\omega_0/\omega_K = 0.1$, $\omega_{ac}/\omega_K = 0.5$ и различных значениях частоты переменного поля ω (область НР).

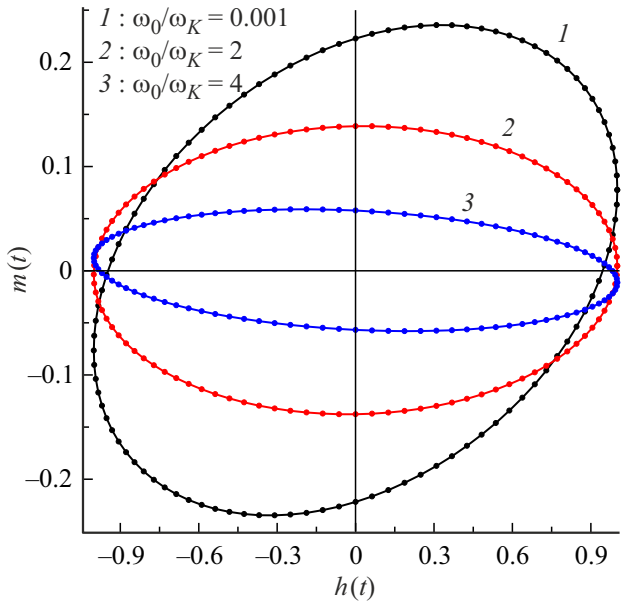

Рис. 5. ДМГ при $\alpha = 0.01$, $\omega_K\tau = 0.005$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$, $\omega\tau = 1.05$, $\omega_{ac}/\omega_K = 0.5$ и различных значениях частоты ω_0.

как следствие — уменьшением площади петли ДМГ. Вдали от резонансной линии петля ДМГ вырождается в отрезок.

Роль постоянного поля наглядно показано на рис. 5, где варьируемым параметром является величина внешнего постоянного поля. С увеличение величины внешнего поля наблюдается смещение максимума поглощения (см. рис. 2). По мере того, как частота, на которой наблюдается ДМГ, удаляется от максимума поглощения, площадь петли уменьшается. Этот эффект аналогичен эффекту на рис. 4, с той лишь разницей, что там расстояние от несущей частоты и резонансной частоты изменяется варьированием несущей частоты, а здесь — варьированием резонансной частоты с помощью внешнего поля. Зависимости частот НР в АФМ от внешнего поля описаны в [27].

На рис. 6 показано влияние изменения параметра затухания на форму ДМГ. Поскольку параметр затухания определяет полуширину линии поглощения, то его увеличение ведет к увеличению поглощения на частоте, близкой к резонансной. Как следствие, увеличивается площадь петли ДМГ. Однако, с увеличе-

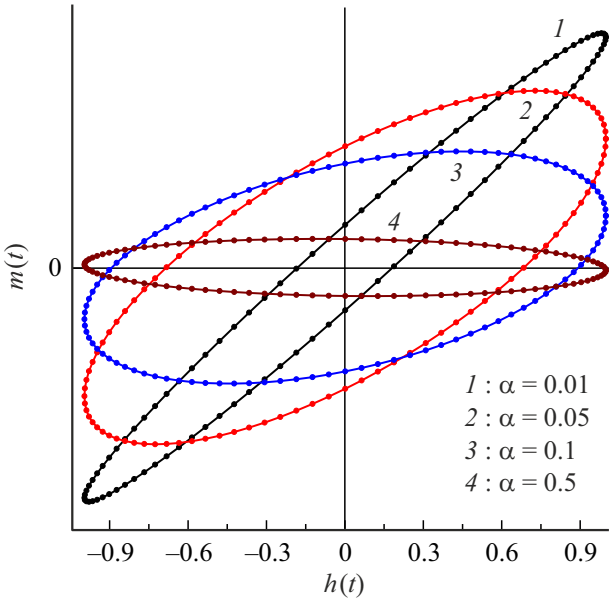

Рис. 6. ДМГ при $\omega\tau = 1$, $\omega_K\tau = 0.05$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$, $\omega_0/\omega_K = 1$, $\omega_{ac}/\omega_K = 0.5$ и различных значениях параметра α.

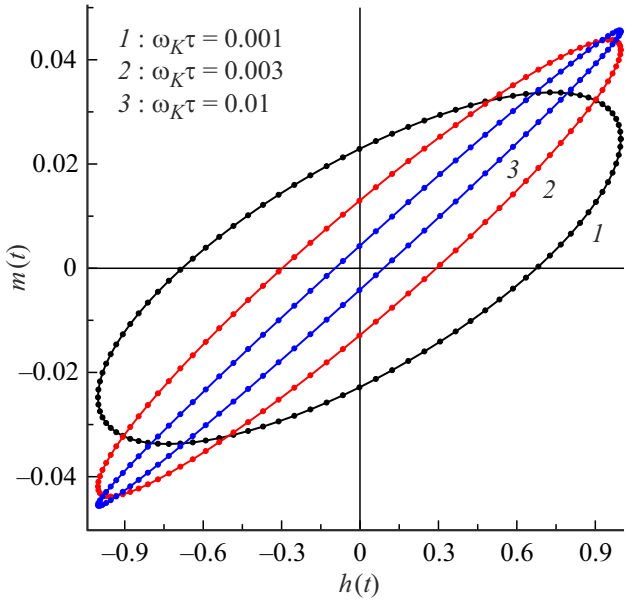

Рис. 7. ДМГ при $\alpha = 0.01$, $\omega\tau = 1$, $\omega_\Lambda/\omega_K = 10$, $\omega_0/\omega_K = 1$, $\omega_{ac}/\omega_K = 0.5$ и различных значениях инерционного времени τ.

нием полуширины линии уменьшается ее амплитуда. При заметном уменьшении поглощения, площадь петли опять уменьшается, что демонстрируется на рис. 6. Наконец, на рис. 7 представлена зависимость ДМГ от времени инерционной релаксации. Этот параметр определяет частоту НР $\omega_{NR} \sim \tau^{-1}$, поэтому с уменьшением τ увеличивается ω_{NR} и происходит увеличение расстояния от зондирующей и резонансной частотами. Такой же эффект как на рис. 5, только теперь он вызван изменением резонансной частоты не внешним полем, а изменением времени инерционной релаксации. С удалением от резонанса поглощение падает и площадь петли ДМГ уменьшается.

В слабых внешних постоянных полях, направленных вдоль легкой оси подрешеток АФМ, позиции минимумов функций плотности магнитной энергии подрешеток АФМ расположены аналогично минимумам функций плотности магнитной энергии ФМ. В этом случае площадь и наклон петли ДМГ АФМ можно оценить по формулам, приведенным в работе [38] (см. также [47]) для ФМ.

5. Заключение

Исследован нелинейный стационарный отклик на переменное поле намагниченности АФМ, находящегося под комбинированным воздействием переменного и постоянного полей. Область применимости предыдущих исследований нелинейных эффектов в антиферромагнитных наночастицах ограничена использованием уравнения ЛЛГ, которое не учитывает инерционные эффекты и не позволяет воспроизвести НР в спектрах магнитной восприимчивости на крайне высоких частотах. Как показали исследования последних лет [18–32], для изучения сверхбыстрых релаксационных процессов и свойств магнитных материалов, проявляющихся в магнитных полях крайне высокой частоты, где инерционные эффекты играют существенную роль, необходимо использовать обобщенное инерционное уравнение ЛЛГ. Решение методом последовательных приближений инерционных уравнений ЛЛГ, описывающих динамику намагниченностей подрешеток АФМ в приближении их тождественности, позволило вывести аналитические выражения для компонент тензора нелинейной восприимчивости второго и третьего порядка. При этом полученные выражения для линейной части восприимчивости находятся в полном согласии с независимыми исследованиями [26,27]. Ряд нелинейных эффектов, которые хорошо изучены в частотной области АФМ резонанса, такие как появление резонансов на частотах кратных частоте переменного поля, а также возникновение переменной компоненты намагниченности на удвоенной частоте внешнего переменного поля, воспроизводятся в области НР АФМ. Эти нелинейные эффекты обусловлены наличием анизотропии в магнитной среде и нелинейностью уравнения ЛЛГ. Инерционный член, вводимый в уравнение ЛЛГ как феноменологически [18,22], так и выводимый на основе теоретического рассмотрения этого явления на микроскопическом уровне [33–37], приводит к наличию собственных (нутационных) колебаний на крайне высоких частотах. Наличие же диссипативного члена в уравнении ЛЛГ ведет к тому, что собственные колебания намагниченности затухают, а вынужденные колебания имеют конечную амплитуду при совпадении возбуждающей частоты с собственными частотами и конечную ширину резонансных линий. Приведенные расчеты, справедливы для антиферромагнитных наночастиц. Результаты могут быть обобщены для рассмотрения магнитных характеристик тонких антиферромагнитных пленок и объемных антиферромагнетиков в тех случаях, когда специфика задачи позволяет ограничиться использованием выражения для магнитной энергии (3) (например, без учета спиновых волн, неоднородной намагниченности образцов и т. п.).

Рассчитан ДМГ на крайне высоких частотах, соответствующих области НР (см. рис. 4–7). Показано, что нелинейная восприимчивость и форма ДМГ существенно зависят от величин постоянного и переменного полей, а также от динамических параметров намагниченности, например, от времени инерционной релаксации. Результаты могут быть использованы для практических приложений. Например, для моделирования и интерпретации сверхбыстрых процессов переключения [16,17]. Кроме того, через оценку площади гистерезиса можно судить о нагревательных свойствах магнитных наночастиц под действием крайне высокочастотных полей. Наконец, дополнительные резонансы, возникающие в сильных переменных полях на крайне высоких частотах в спектрах АФМ, могут представлять интерес для будущих экспериментальных исследований.

Приложение

Вектор $\mathbf{F}_2$ в уравнении (16) при $k = 2$ имеет вид

$$\mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} a_1 + R_{\vartheta_1} \\ b_1 + R_{\varphi_1} \\ a_2 + R_{\vartheta_2} \\ b_2 + R_{\varphi_2} \end{pmatrix} + \tilde{\mathbf{U}}\boldsymbol{\theta}_1, \tag{33}$$

где элементы a_i, b_i и R_{x_i} задаются как

$$a_i = -\varphi_i^1 \left(i\omega\vartheta_i^1 \cos\vartheta_i^0 - \frac{1}{2}\tau\omega^2\varphi_i^1 \sin 2\vartheta_i^0 \right), \tag{34}$$

$$b_i = -(2\tau\omega^2 - i\omega\alpha)\vartheta_i^1\varphi_i^1 \sin 2\vartheta_i^0 - i\omega(\vartheta_i^1)^2 \cos\vartheta_i^0, \tag{35}$$

$$R_{x_i} = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1,2} \Big(\bar{U}_{x_i\vartheta_j\vartheta_k}\vartheta_j^1\vartheta_k^1 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\varphi_k}\varphi_j^1\varphi_k^1 + \bar{U}_{x_i\vartheta_j\varphi_k}\vartheta_j^1\varphi_k^1 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\vartheta_k}\varphi_j^1\vartheta_k^1 \Big). \tag{36}$$

Матрица $\tilde{\mathbf{U}}$ в уравнении (33) получается из матрицы $\mathbf{U}$ (см. уравнение (13)) путем замены в последней $\bar{U} \to \tilde{U}$.

Вектор $\mathbf{F}_3$ в уравнении (16) при $k = 3$ представляется в виде

$$\mathbf{F}_3 = \begin{pmatrix} c_1 + \tilde{R}_{\varphi_1} + P_{\vartheta_1} \\ d_1 + \tilde{R}_{\varphi_1} + P_{\varphi_1} \\ c_2 + \tilde{R}_{\vartheta_2} + P_{\vartheta_2} \\ d_2 + \tilde{R}_{\varphi_2} + P_{\varphi_2} \end{pmatrix}, \tag{37}$$

где элементы $\tilde{R}_{x_i}$ получаются из элементов R_{x_i} путем замены в последних $\bar{U} \to \tilde{U}$, а элементы c_i, d_i и P_{x_i} задаются как

$$c_i = \tau\omega^2\varphi_i^1(\vartheta_i^1\varphi_i^1\cos 2\vartheta_i^0 + 2\varphi_i^2\sin 2\vartheta_i^0) - i\omega\left[(\vartheta_i^2\varphi_i^1 + 2\vartheta_i^1\varphi_i^2)\cos\vartheta_i^0 - \frac{1}{2}(\vartheta_i^1)^2\varphi_i^1\sin\vartheta_i^0\right], \tag{38}$$

$$d_i = 3i\omega\vartheta_i^1\vartheta_i^2\cos\vartheta_i^0 - \frac{1}{2}i\omega(\vartheta_i^1)^3\sin\vartheta_i^0 - (3\tau\omega^2 - i\omega\alpha) \times \left[(\vartheta_i^1)^2\varphi_i^1\cos 2\vartheta_i^0 + (\vartheta_i^2\varphi_i^1 + 2\vartheta_i^1\varphi_i^2)\sin 2\vartheta_i^0\right], \tag{39}$$

$$P_{x_i} = \sum_{j,k=1,2}\big(\bar{U}_{x_i\vartheta_j\vartheta_k}\vartheta_j^1\vartheta_k^2 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\varphi_k}\varphi_j^1\varphi_k^2 + \bar{U}_{x_i\vartheta_j\varphi_k}\vartheta_j^1\varphi_k^2 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\vartheta_k}\varphi_j^1\vartheta_k^2\big) + \frac{1}{6}\sum_{j,k,l=1,2}\big(\bar{U}_{x_i\vartheta_j\varphi_k\varphi_l}\vartheta_j^1\varphi_k^1\varphi_l^1 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\vartheta_k\varphi_l} \times \varphi_j^1\vartheta_k^1\varphi_l^1 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\varphi_k\vartheta_l}\varphi_j^1\varphi_k^1\vartheta_l^1 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\varphi_k\varphi_l}\varphi_j^1\varphi_k^1\varphi_l^1 + \bar{U}_{x_i\varphi_j\vartheta_k\vartheta_l}\varphi_j^1\vartheta_k^2\vartheta_l^1 + \bar{U}_{x_i\vartheta_j\varphi_k\vartheta_l}\vartheta_j^1\varphi_k^1\vartheta_l^1 + \bar{U}_{x_i\vartheta_j\vartheta_k\varphi_l}\vartheta_j^1\vartheta_k^1\varphi_l^1 + \bar{U}_{x_i\vartheta_j\vartheta_k\vartheta_l}\vartheta_j^1\vartheta_k^1\vartheta_l^1\big). \tag{40}$$

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-22-00119, https://rscf.ru/project/25-22-00119/

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] A.B. Shick, S. Khmelevskyi, O.N. Mryasov, J. Wunderlich, T. Jungwirth. Phys. Rev. B **81**, 212409 (2010).
[2] A.H. MacDonald, M. Tsoi. Phil. Trans. Royal Soc. A **369**, 3098 (2011).
[3] E.V. Gomonay, V.M. Loktev. Low Temp. Phys. **40**, 17 (2014).
[4] T. Jungwirth, X. Marti, P. Wadley, J. Wunderlich. Nat. Nanotech. **11**, 231 (2016).
[5] O. Gomonay, T. Jungwirth, J. Sinova. Phys. Stat. Sol. RRL. **11**, 1700022 (2017).
[6] V. Baltz, A. Manchon, M. Tsoi, T. Moriyama, T. Ono, Y. Tserkovnyak. Rev. Mod. Phys. **90**, 015005 (2018).
[7] А.Г. Гуревич, Г.А. Мелков. Магнитные колебания и волны. Наука, М. (1994).
[8] A.P. Guimaraães. Principles of Nanomagnetism. Springer, Berlin Heidelberg (2009).
[9] Ю.Л. Райхер, В.И. Степанов. ЖЭТФ **134**, 514 (2008).
[10] Q.A. Pankhurst, N.T.K. Thanh, S.K. Jones, J. Dobson. J. Phys. D: Appl. Phys. **42**, 224001 (2009).
[11] P. Němec, M. Fiebig, T. Kampfrath, A.V. Kimel. Nat. Phys. **14**, 229 (2018).
[12] P. Wadley, B. Howells, J. Zelezny, C. Andrews, V. Hills, R.P. Campion, V. Novak, F. Freimuth, Y. Mokrousov, A.W. Rushforth, K.W. Edmonds, B.L. Gallagher, T. Jungwirth. Science **351**, 587 (2016).
[13] A. Kirilyuk, A.V. Kimel, Th. Rasing. Rev. Mod. Phys. **82**, 2731 (2010).
[14] T. Kampfrath, A. Sell, G. Klatt, A. Pashkin, S.F. Mährlein, T. Dekorsy, M. Wolf, M. Fiebig, A. Leitenstorfer, R. Huberet. Nat. Photon. **5**, 31 (2011).
[15] A. Pashkin, A. Sell, T. Kampfrath, R. Huber. New J. Phys. **15**, 065003 (2013).
[16] A. Kimel, B. Ivanov, R. Pisarev, P.A. Usachev, A. Kirilyuk, Th. Rasing. Nature Phys. **5**, 727 (2009).
[17] S. Wienholdt, D. Hinzke, U. Nowak. Phys. Rev. Lett. **108**, 247207 (2012).
[18] M.-C. Ciornei, J.M. Rubí, J.-E. Wegrowe. Phys. Rev. B **83**, 020410(R) (2011).
[19] J.-E. Wegrowe, M.-C. Ciornei. Amer. J. Phys. **80**, 607 (2012).
[20] D. Böttcher, J. Henk. Phys. Rev. B **86**, 020404(R) (2012).
[21] S. Giordano, P.-M. Déjardin. Phys. Rev. B **102**, 214406 (2020).
[22] E. Olive, Y. Lansac, J.-E. Wegrowe. Appl. Phys. Lett. **100**, 192407 (2012).
[23] S.V. Titov, W.J. Dowling, Yu.P. Kalmykov. J. Appl. Phys. **131**, 193901 (2022).
[24] M. Cherkasskii, M. Farle, A. Semisalova. Phys. Rev. B **102**, 184432 (2020).
[25] R. Mondal, L. Rózsa, M. Farle, P.M. Oppeneer, U. Nowak, M. Cherkasskii. J. Magn. Magn. Mater. **579**, 170830 (2023).
[26] R. Mondal, S. Großenbach, L. Rózsa, U. Nowak. Phys. Rev. B **103**, 104404 (2021).
[27] С.В. Титов, А.С. Федоров, А.С. Титов, Н.В. Чукашев. Физика твердого тела, **67** (1), 145, (2025).
[28] A.M. Lomonosov, V.V. Temnov, J.-E. Wegrowe. Phys. Rev. B, **104**, 054425 (2021).
[29] S.V. Titov, W.J. Dowling, Y.P. Kalmykov, M. Cherkasskii. Phys. Rev. B, **105**, 214414 (2022).
[30] R. Mondal, L. Rózsa. Phys. Rev. B **106**, 134422 (2022).
[31] K. Neeraj, N. Awari, S. Kovalev, D. Polley, N.Z. Hagström, S. Arekapudi, A. Semisalova, K. Lenz, B. Green, J.-C. Deinert, I. Ilyakov, M. Chen, M. Bawatna, V. Scalera, M. d'Aquino, C. Serpico, O. Hellwig, J.-E. Wegrowe, M. Gensch, S. Bonetti. Nat. Phys. **17**, 245 (2021).
[32] V. Unikandanunni, R. Medapalli, M. Asa, E. Albisetti, D. Petti, R. Bertacco, E.E. Fullerton, S. Bonetti. Phys. Rev. Lett. **129**, 237201 (2022).
[33] D. Thonig, O. Eriksson, M. Pereiro. Sci. Rep. **7**, 931 (2017).
[34] M. Fähnle, D. Steiauf, C. Illg. Phys. Rev. B **84**, 172403 (2011).
[35] S. Bhattacharjee, L. Nordström, J. Fransson. Phys. Rev. Lett. **108**, 057204 (2012).
[36] R. Mondal, M. Berritta, A.K. Nandy, P.M. Oppeneer. Phys. Rev. B **96**, 024425 (2017).
[37] R. Mondal, M. Berritta, P.M. Oppeneer. J. Phys.: Condens. Matter **30**, 265801 (2018).

[38] S.V. Titov, W.J. Dowling, A.S. Titov, A.S. Fedorov. AIP Advances, **14**, 035216 (2024).
[39] Y.L. Raikher, V.I. Stepanov. Adv. Chem. Phys. **129**, 419 (2004).
[40] T. Bitoh, K. Ohba, M. Takamatsu, T. Shirane, S. Chikazawa. J. Magn. Magn. Mater. **154**, 59 (1996).
[41] P. Jönsson, T. Jonsson, J.L. García-Palacios, P. Svedlindh. J. Magn. Magn. Mater. **222**, 219 (2000).
[42] Y.L. Raikher, V.I. Stepanov, R. Perzynski. Physica B: Condensed Matter. **343**, 262 (2004).
[43] Y.L. Raikher, V.I. Stepanov. J. Magn. Magn. Mater. **300**, e311 (2006).
[44] P.M. Déjardin, Y.P. Kalmykov, B.E. Kashevsky, H.El. Mrabti, I.S. Poperechny, Y.L. Raikher, S.V. Titov. J. Appl. Phys. **107**, 073914 (2010).
[45] B. Ouari, S.V. Titov, H. El Mrabti, Yu.P. Kalmykov. J. Appl. Phys. **113**, 053903 (2013).
[46] Yu.P. Kalmykov, S.V. Titov, W.T. Coffey, M. Zarifakis, W.J. Dowling. Phys. Rev. B **99**, 184414 (2019).
[47] W.T. Coffey, Y.P. Kalmykov. The Langevin Equation. 4th edition. World Scientific. Singapore (2017).
[48] I. Klik, Y.D. Yao. J. Appl. Phys. **89**, 7457 (2001).
[49] H. El Mrabti, P.M. Déjardin, S.V. Titov, Yu.P. Kalmykov. Phys. Rev. B **85**, 094425 (2012).
[50] G.T. Landi. J. Appl. Phys. **111**, 043901 (2012).
[51] G.T. Landi. J. Magn. Magn. Mater. **324**, 466, (2012).
[52] N.A. Usov, Yu.B. Grebenshchikov. J. Appl. Phys. **106**, 023917 (2009).
[53] N.A. Usov. J. Appl. Phys. **107**, 123909 (2010).
[54] G. Bertotti, I.D. Mayergoyz, C. Serpico, M. d'Aquino, R. Bonin. J. Appl. Phys. **105**, 07B712 (2009).
[55] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. том 1. Механика, 4-е изд. Наука, М. (1988).
[56] Yu.P. Kalmykov, B. Ouari, S.V. Titov. J. Appl. Phys. **120**, 053901 (2016).

Редактор Т.Н. Василевская