

03

## Развитие неустойчивости заряженного пузырька с растворимым в жидкости газом

© В.В. Коледин,<sup>1</sup> И.К. Гималтдинов<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет),  
628616 Нижневартовск, Россия

<sup>2</sup> Уфимский государственный нефтяной технический университет,  
450062 Уфа, Россия  
e-mail: vikoled@mail.ru, iljas\_g@mail.ru

Поступило в Редакцию 16 апреля 2025 г

В окончательной редакции 23 июня 2025 г.

Принято к публикации 30 июня 2025 г.

Рассмотрена проблема устойчивости заряженного газового пузырька, содержащего газ, растворимый в жидкости. Получено условие устойчивости системы „газовый пузырек—жидкость“. Проведен линейный анализ, на основе которого изучено влияние эффектов радиальной инерции, вязкости жидкости и процесса диффузии на развитие процесса неустойчивости.

**Ключевые слова:** неустойчивость, заряженный пузырек, инкремент, линейный анализ, диоксид углерода.

DOI: 10.61011/JTF.2025.11.61593.51-25

### Введение

Исследование устойчивости пузырьков в жидкости представляет интерес не только с теоретической, но и с практической точки зрения, поскольку связано со многими технологическими приложениями, такими как, например, флотация, кавитация, теплообмен при кипении, подводная акустика, барботаж и т.д. [1].

Изучению устойчивости пузырьков с различным составом газовой фазы посвящены работы [2–5].

В работе [2] показано, что пузырьки растворимого в жидкости газа, совершающие малые радиально-симметричные колебания в акустическом поле, неустойчивы по амплитуде. Получено выражение для инкремента, характеризующего темп развития неустойчивости.

Исследованию диффузионной устойчивости газовых пузырьков в одно- и двухфракционном кластере при воздействии на них акустического поля посвящена работа [3]. В этой работе для однофракционного кластера численно получены диапазоны значений начальных концентраций газа в жидкости, при которых пузырьки, вследствие диффузионных процессов, протекающих между ним и окружающей жидкостью, стремятся к одному из двух равновесных состояний. Установлено, что двухфракционный кластер стремится стать однофракционным.

Устойчивости перегретой жидкости, содержащей зародыши нерастворимого газа, посвящена работа [4]. Определены критические условия для массы газовых зародышей, их радиусов и объемных концентраций в случае устойчивого состояния системы жидкость—парогазовые зародыши. Построена теория спонтанных решений, описывающая выход перегретой пузырьковой парогазожидкостной системы из неустойчивого состояния. На основе

таких решений изучена динамика перехода перегретой жидкости в устойчивое состояние.

Изучению кипения перегретой жидкости, содержащей паровой пузырек (или систему паровых пузырьков), посвящена работа [5]. В этой работе установлено, что состояние смеси жидкости с пузырьками неустойчиво вследствие действия капиллярных сил. Построены линейные и нелинейные решения, описывающие выход системы из неустойчивого состояния, а также неограниченный рост одиночного пузырька и переход в устойчивое парогазожидкостное состояние при наличии в исходном состоянии распределенных по объему пузырьков.

Пузырьки газа играют отрицательную роль в диэлектрической прочности изолирующих жидкостей. В зависимости от их формы и локализованного электрического поля пузырьки могут значительно снизить диэлектрическую прочность изолирующей жидкости.

Отметим работы, в которых исследуются вопросы устойчивости заряженных пузырьков, [6–10].

В работе [6] выводится дисперсионное уравнение для капиллярных движений в вязкой жидкости, окружающей сферический пузырек, несущий поверхностный заряд, способный привести к неустойчивости границы раздела. Находятся критические условия такой неустойчивости. Решение задачи проводится в рамках метода скаляризации в сферической системе координат.

Равновесные состояния заряженного сферического пузыря в диэлектрической жидкости исследуются на устойчивость по отношению к виртуальным центрально-симметричным изменениям его объема на основе анализа нелинейного уравнения, описывающего радиальные колебания такого пузыря, в окрестности особых точек [7]. Показано, что из двух возможных равновесных состояний пузыря устойчиво лишь одно. Найдены

границы областей значений физических параметров, разделяющих устойчивые и неустойчивые состояния. Выяснилось, что наличие на пузыре электрического заряда приводит к расширению областей значений физических параметров, в которых существуют равновесные состояния пузыря.

В статье [8] показано, что экспериментально обнаруженные пузырьки наноразмера в водной среде возникают спонтанно за счет минимизации энергии Гиббса, учитывающей электростатическую составляющую, газожидкостной дисперсной системы. Повышенное давление газа внутри нанопузырька постепенно выравнивается (согласно закону Генри) с атмосферным давлением воздуха, растворенного в воде. Радиус пузырька в некоторой степени уменьшается, и пузырек переходит в стабильное состояние.

В статье [9] на основе теоретического анализа описан механизм стабильности заряженных объемных нанопузырьков. Сильное притяжение отрицательных зарядов к поверхности нанопузыря приводит к накоплению заряда, в результате чего энергия электрического поля создает локальный минимум для свободной энергии, необходимой для образования пузырька, что приводит к термодинамической метастабильности заряженных нанопузырей. Избыточные поверхностные заряды механически создают зависящую от размера силу, которая уравнивает давление Лапласа и действует как восстанавливающая сила, когда нанопузырь термодинамически отклоняется от своего равновесного состояния. С помощью этого механизма отрицательной обратной связи обсуждена стабильность нанопузыря в зависимости от поверхностного заряда и перенасыщения газом. Сравнено теоретическое предсказание с экспериментальными наблюдениями и обнаружено хорошее соответствие.

В работе [10] развиты теоретические представления о существовании в чистой воде и водных растворах электролитов, находящихся в равновесии с внешней газовой средой, стабильных газовых пузырьков — бабстонов. Предложена теоретическая модель адсорбции ионов на поверхности воды, на ее основе дано количественное описание возникающего двойного электрического слоя. Эти результаты позволили провести и термодинамическое описание бабстонной структуры в системе „вода—внешняя газовая среда“. Показано, что возникновение такой структуры при определенных значениях температуры и концентрации растворенных примесных ионов является фазовым переходом первого рода. В рассматриваемой задаче установлена уникальная роль гелия как внешней газовой среды: в этом случае бабстонная структура не возникает ни при каких начальных концентрациях ионов, а растворимость самого гелия возрастает с увеличением температуры. Рассмотрен механизм образования экспериментально наблюдаемых бабстонных кластеров.

Отметим монографическую работу [11]. В ней указано, что нанопузырьки, наполненные воздухом или различными чистыми газами, сохраняются в воде в течение нескольких недель и месяцев. Наноземля, состоящая из капель масла в воде, также удивительно устойчива к коагуляции и может существовать до нескольких недель, даже если они не покрыты поверхностно-активными веществами. Обратная система, состоящая из нанокapлей воды в масле, также доступна для изучения и применения. Пустоты в наномасштабе образуются при моделировании воды под сильным натяжением и стабильны в течение всего времени моделирования. Стабильность этих нанообъектов в конечном итоге определяется структурой их поверхностей на молекулярном уровне. Однако термодинамическая теория также может дать некоторое представление об этом. Поэтому мы рассматриваем сферические газовые нанопузырьки, несмешивающиеся жидкие нанокapли и нанополости, образующиеся в воде при отрицательном давлении, на одном уровне и проводим единый термодинамический анализ этих систем. Во всех случаях механическое равновесие (локальный максимум или минимум свободной энергии) выражается уравнением Лапласа, а термодинамическая стабильность (локальный минимум свободной энергии) следует из зависимости поверхностного натяжения от радиуса. Все они были бы нестабильны, если бы их поверхностное натяжение было постоянным. Данные из литературы позволяют построить численные примеры для полостей и газовых нанопузырьков. Спектроскопические данные приводятся в подтверждение того, что структура воды на границе раздела газовых нанопузырьков и капель воды в нефти отличается от их аналогов на плоской поверхности. Считалось, что наблюдаемая долговечность нанопузырьков, в частности, нарушает фундаментальные принципы диффузии и растворимости. Внимательный взгляд на уравнение Лапласа и его вывод показывает, почему это широко распространенное мнение неверно.

Исследованию капиллярных колебаний и устойчивости заряженного пузырька в вязкой несжимаемой диэлектрической жидкости по отношению к бесконечно малым искажениям объема и формы посвящена работа [12]. В ней определены области физических параметров, при которых наблюдается неустойчивость центрально-симметричных радиальных и осесимметричных поверхностных движений пузырька. Получены аналитические асимптотические выражения для декрементов затухания осесимметричных капиллярных колебаний пузырька в приближениях малой и большой вязкости.

В настоящей работе рассматривается неустойчивость одиночного заряженного пузырька в насыщенной углекислым газом воде, когда пузырек в исходном состоянии находится в динамическом и термическом равновесии. Анализируется влияние радиальной инерции, вязкости жидкости и диффузии, влияющих на неустойчивость пузырька.

## 1. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть в жидкости при температуре  $T_0$  и давлении  $p_0$  находится газовый пузырек радиусом  $a_0$ , на поверхности которого равномерно распределен заряд  $Q_0$ . Будем полагать, что жидкость является диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ , также будем считать, что система „газовый пузырек–жидкость“ находится в динамическом и термическом равновесии. Исходя из этого предположения, можем записать следующее соотношение:

$$p_{g0} + p_{el0} = p_0 + \frac{2\sigma}{a_0}, \quad (1)$$

где  $p_{g0}$ ,  $p_{el0}$  — исходное парциальное давление пара в пузырьке и сила давления электрического поля,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости.

Газ внутри пузырьков будем считать растворимым. Давление газа будем считать однородным и подчиняющимся уравнению Клапейрона–Менделеева:

$$p_{g0} = \rho_g^0 R_g T_0,$$

где  $\rho_g^0$  — исходная плотность газа,  $R_g$  — приведенная газовая постоянная.

В дальнейшем описании задачи нижними индексами ( $l$ ) и ( $g$ ) обозначим параметры жидкости и газа; дополнительный нижний индекс соответствует начальному состоянию равновесия; индекс ( $el$ ) относится к параметрам, обозначающим действие электрического поля заряда на поверхности пузырька.

Рассмотрим радиально-симметричное движение системы в окрестности равновесного состояния, определяемого уравнением (1).

Для изучения динамики „выхода“ электрически заряженного газового пузырька из состояния равновесия приведем основные уравнения, описывающие радиальные движения пузырька в несжимаемой жидкости ( $\rho_l^0 = \text{const}$  — плотность жидкости).

Уравнение пульсационного движения пузырька — уравнение Рэлея–Лэмба имеет вид [13]:

$$\begin{aligned} \rho_l^0 \left( a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 + \frac{4v_l^{(\mu)}\dot{a}}{a} \right) \\ = p_g + p_{el} - p_l - \frac{2\sigma}{a}. \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая гипотезу гомобаричности, можно получить уравнение для изменения давления газа в следующем виде [14]:

$$\frac{dp_g}{dt} = -3\frac{p_g}{a}\frac{da}{dt} + 3\frac{p_g}{a}\frac{\rho_l^0}{\rho_g^0}D_l \left( \frac{\partial g}{\partial r} \right)_a. \quad (3)$$

Параметры  $v_l^{(\mu)}$ ,  $D_l$  и  $g$  — кинематическая вязкость жидкости, коэффициент диффузии и массовая концентрация газа в жидкости.

В уравнении (3) нижний индекс  $a$  для градиента концентрации газа соответствует границе пузырька. Второе слагаемое в (3) отвечает за интенсивность растворения газа, лимитируемой процессом диффузии газа из жидкости в пузырек вблизи межфазной поверхности.

Для определения интенсивности массообмена запишем уравнение диффузии в жидкости [13]:

$$\frac{\partial g}{\partial t} + w_l \frac{\partial g}{\partial r} = D_l \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right), \quad (4)$$

где  $w_l = \frac{a^2}{r^2}\dot{a}$  — радиальная скорость жидкости.

Граничные условия для уравнения диффузии (4) в жидкости имеют вид

$$g = g_a \text{ при } r = a \text{ и } g = g_0 \text{ при } r = \infty. \quad (5)$$

Здесь  $g_a$  — концентрация газа на поверхности пузырька, которая связана с давлением газа по закону Генри:

$$g_a = Gp_g. \quad (6)$$

Исходное давление сил электрического поля пузырька примем в следующем виде [7]:

$$p_{el0} = \frac{kQ_0^2}{8\pi\epsilon a_0^4}, \quad (7)$$

где  $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$  — коэффициент пропорциональности,  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12}$  F/m — электрическая постоянная.

Полагаем, что выполняется закон сохранения заряда на поверхности пузырька:

$$Q = Q_0. \quad (8)$$

Исходя из этого предположения получим связь текущего давления с исходным:

$$p_{el} = p_{el0} \left( \frac{a_0}{a} \right)^4. \quad (9)$$

## 2. Линейный анализ

Пусть давление в жидкости  $p_l$  постоянно и равно исходному значению  $p_0$  ( $p_l = p_0$ ). Рассмотрим малые отклонения радиуса пузырька от исходного значения, которые повлекут за собой изменение остальных параметров. Выражения для радиуса, давления газа, давления силы электрического поля заряда на поверхности пузырька, плотности и концентрации газа представим в виде:

$$a = a_0 + a', \quad p_g = p_{g0} + p'_g, \quad p_{el} = p_{el0} + p'_{el},$$

$$\rho_g = \rho_{g0} + \rho'_g, \quad g = g_0 + g',$$

где параметры со штрихами — малые отклонения параметров от равновесного состояния, являющиеся величинами первого порядка малости [15].

Линеаризуя систему уравнений (2)–(9) около состояния равновесия (пренебрегая величинами второго

порядка малости, например, произведением параметров со штрихами), получим

$$\rho_l^0 \left( a_0 \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} + 4 \frac{v_l^{(\mu)}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} \right) = p_g + p_{el} + \frac{2\sigma}{a_0^2} a, \quad \frac{\partial a}{\partial t} = w, \quad (10)$$

$$\frac{\partial p_g}{\partial t} = -3 \frac{p_{g0}}{a_0} \frac{\partial a}{\partial t} + 3 \frac{p_{g0}}{a_0} \frac{\rho_l^0}{\rho_{g0}} D_l \left( \frac{\partial g}{\partial r} \right)_{a_0}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = D_l \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial g}{\partial r} \right)_{a_0}, \quad (a_0 < r < \infty), \quad (12)$$

$$g = g_a \text{ при } r = a_0 \text{ и } g = 0 \text{ при } r = \infty, \quad (13)$$

$$g_a = G p_g, \quad (14)$$

$$p_{el} = -4 p_{el0} \frac{a}{a_0}. \quad (15)$$

В полученных уравнениях и далее знак штрих, обозначающий возмущения параметров, опущен.

Решение системы (10)–(15) будем искать в виде

$$a = A_a e^{\lambda t}, \quad p_g = A_p e^{\lambda t}, \quad g = A_g(r) e^{\lambda t}. \quad (16)$$

Отметим, что при таком виде решений, величина, обратная  $\lambda$ , показывает, за какое время амплитуда возмущений увеличивается в  $e$  раз ( $\tau = 1/\lambda$ ).

Из уравнения диффузии (12) на основе (13), (14) для амплитуды концентрации газа вокруг пузырька имеем

$$A_g(r) = A_p G \frac{a_0}{r} \exp \left( Y \left( 1 - \frac{r}{a_0} \right) \right), \quad Y = a_0 k = \sqrt{a_0^2 \lambda / D_l}. \quad (17)$$

Из уравнения (15) амплитуда давления сил электрического поля имеет вид

$$A_{el} = -4 \frac{p_{el0}}{a_0} A_a. \quad (18)$$

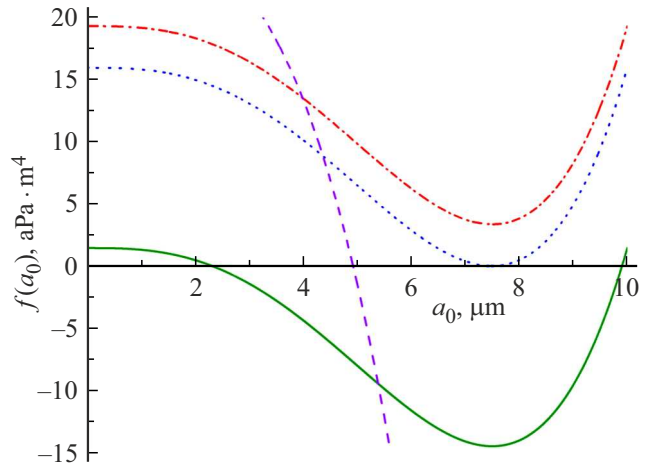
Используя это решение на основе уравнений (10), (11) из условия существования нетривиального решения вида (16), получаем уравнение для определения  $\lambda$ :

$$\psi(\lambda) = \rho_l^0 \lambda^2 a_0^2 + 4 \rho_l^0 \lambda v_l^{(\mu)} + \frac{3 p_{g0} Y^2}{Y^2 + 3 O_s (1 + Y)} + 4 p_{el0} - \frac{2\sigma}{a_0} = 0, \quad (19)$$

где  $O_s$  — число Оствальда, показывающее значение объема газа, которое может раствориться в единице объема жидкости [16].

Уравнение (19) имеет положительный корень  $\lambda$ , если выполняется условие

$$p_{el0} < \frac{\sigma}{2a_0}, \quad (20)$$



**Рис. 1.** Зависимость функции  $f(a_0)$  от начального радиуса  $a_0$ , для различных значений зарядов пузырьков: 1-й случай — штриховая линия, 2-й случай — штрихпунктирная, 3-й случай — точечная, 4-й случай — сплошная.

следовательно, пузырек при выполнении этого условия неустойчив.

Если давление сил электрического поля заряда не удовлетворяет условию (20), то состояние пузырька является устойчивым. При этом значение корня, называемое инкрементом, определяет скорость развития неустойчивости на начальной линейной стадии. Существование положительного корня означает, что выражения вида (16) представляют собой спонтанные решения [17], для которых исходное состояние равновесия достигается при  $t \rightarrow -\infty$ .

В случае отсутствия заряда на пузырьке ( $Q_0 = 0$ ,  $p_{el0} = 0$ ) из условия (1) можно найти значение радиуса пузырька при заданных значениях давления жидкости  $p_0$ :

$$a_0^{(M)} = \frac{2\sigma}{p_{g0} - p_0}. \quad (21)$$

Из условия механического равновесия (1) следует, что в случае наличия заряда на поверхности пузырька ( $Q_0 > 0$ ,  $p_{el0} > 0$ ) радиус  $a_0$  всегда меньше значения, определяемого выражением (21) ( $a_0 < a_0^{(M)}$ ). Определим нижнее предельное значение радиуса пузырьков в равновесном состоянии в случае, когда пузырек неустойчив, т.е. выполняется условие (20). Очевидно, для этого радиуса, помимо (1), должно выполняться условие

$$p_{el0} = \frac{\sigma}{2a_0}. \quad (22)$$

Исключая из (1), (22)  $p_{el0}$ , находим выражение для минимального радиуса  $a_0^{(m)}$  в виде

$$a_0^{(m)} = \frac{3}{4} a_0^{(M)} = \frac{3\sigma}{2(p_{g0} - p_0)}. \quad (23)$$

Используя выражения (7), (23), можно получить выражение для критического заряда газового пузырька

$$Q_{cr} = \sqrt{\frac{27\pi\epsilon\sigma^4}{2k(p_{g0} - p_0)^3}}. \quad (24)$$

Подставляя выражение (7) в условие механического равновесия (1), получаем уравнение для определения равновесного радиуса  $a_0$  при заданном значении заряда  $Q_{el0}$  газового пузырька

$$f(a_0) = (p_{g0} - p_0)a_0^4 - 2\sigma a_0^3 + \frac{kQ_0^2}{8\pi\epsilon} = 0. \quad (25)$$

Проанализируем выражение (25). Возможны следующие случаи, которые показаны на рис. 1:

- 1) при  $p_{g0} < p_0$  уравнение имеет один положительный корень при любом значении  $Q_0$ ;
- 2) для случая  $p_{g0} > p_0$  и при  $Q_0 > Q_{cr}$  действительных корней нет;
- 3) Если же  $p_{g0} > p_0$  и при  $Q_0 = Q_{cr}$  уравнение имеет один действительный корень;
- 4) и, наконец, если  $p_{g0} > p_0$  при  $Q_0 < Q_{cr}$  уравнение имеет два действительных корня.

Кроме того, при  $0 < Q_0 < Q_{cr}$  уравнение имеет два положительных корня  $a_0^{(m)} < a_{01} < a_0^{(M)}$  и  $0 < a_{02} < a_0^{(m)}$ , причем при большем значении радиуса  $a_{01}$  „система пузырек–жидкость“ неустойчива для случая положительных корней уравнения (19), а при меньшем значении радиуса  $a_{02}$  устойчива для случая комплексно-сопряженных корней уравнения (19).

Из формулы (24) для критического заряда при параметрах  $\epsilon = 87.9$ ,  $\sigma = 75.64 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}$ ,  $a_0 = 10^{-5} \text{ m}$  получаем значение  $Q_{cr} \approx 2 \text{ pC}$ . В случае, когда заряд пузырька равен нулю ( $Q_0 = 0$ ), максимальное значение равновесного радиуса составляет  $a_0^{(M)} = 10^{-5} \text{ m}$ . Все необходимые значения теплофизических параметров взяты из [18].

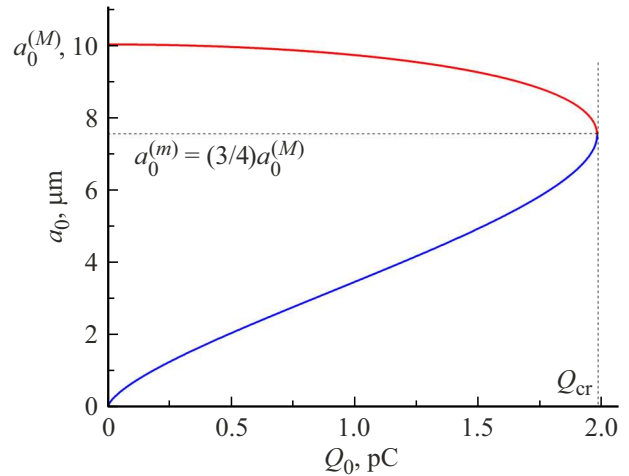
Для заданного значения заряда  $Q_0$  на основе уравнения (25) можно определить значения радиусов, которые соответствуют неустойчивому и устойчивому состоянию равновесия газового пузырька. На рис. 2 представлена зависимость равновесных радиусов газового пузырька от его заряда, находящегося в насыщенной диоксидом углерода воде. Верхней ветви кривой зависимости радиуса от заряда соответствуют действительные значения корней уравнения (19); они же отвечают неустойчивому состоянию равновесия пузырька. Нижней ветви кривой соответствуют комплексно-сопряженные корни уравнения (19), отвечающие устойчивым состояниям пузырьков. Эти корни соответствуют затухающим собственным колебаниям. Верхнюю и нижнюю ветви отделяет горизонтальная линия  $a_0 = a_0^{(m)}$ .

На рис. 3 представлена зависимость инкремента (положительного корня уравнения (19)), соответствующего верхней ветви зависимости, представленной на рис. 2, от заряда газового пузырька. В левой части уравнения (19)

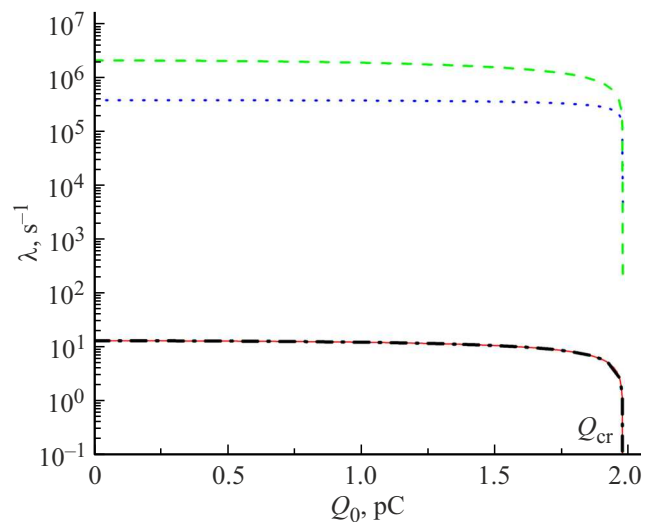
первое, второе и третье слагаемые учитывают влияние радиальной инерции, вязкости жидкости и диффузии газа на развитие неустойчивости на линейной стадии, когда радиус пузырька равен равновесному значению.

В том случае, когда развитие неустойчивости ограничивается радиальной инерцией, т.е. в уравнении (24) опускаются второе и третье слагаемые, связанные с вязкостью и диффузией, для величины инкремента имеем

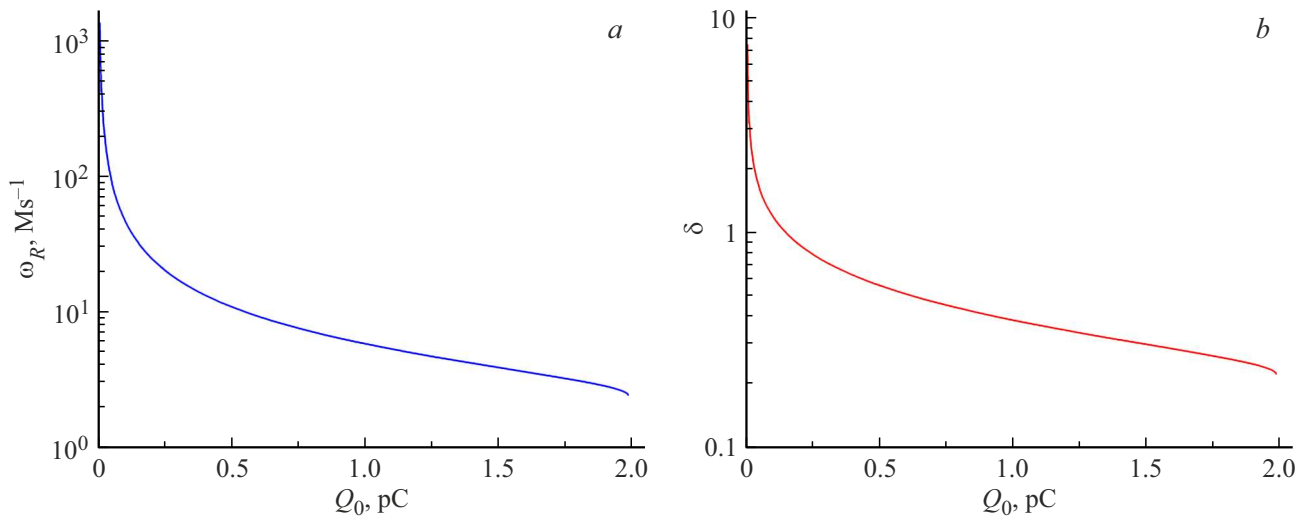
$$\lambda^{(R)} = \sqrt{\frac{2\sigma/a_0 - 4p_{el0}}{\rho_l^0 a_0^2}}. \quad (26)$$



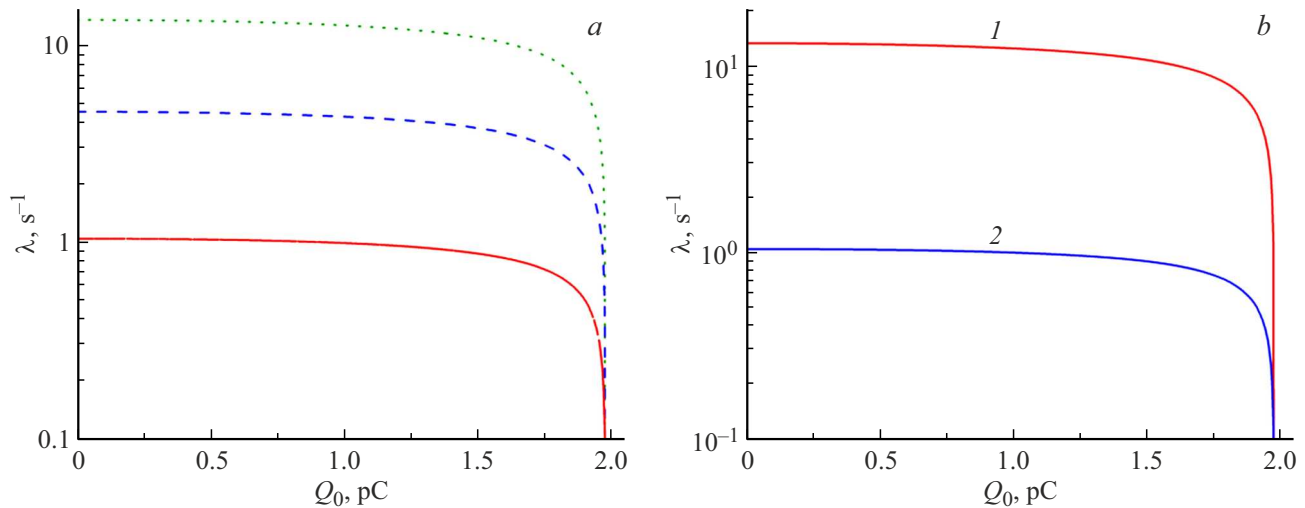
**Рис. 2.** Зависимость равновесного радиуса от заряда пузырька при  $p_0 = 0.1 \text{ МПа}$ ,  $T_0 = 273 \text{ К}$ ,  $O_s = 1.7$ .



**Рис. 3.** Зависимость инкрементов неустойчивых равновесных радиусов от заряда пузырька при  $\epsilon = 87.9$ ,  $\sigma = 75.64 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{m}$ ,  $a_0 = 10^{-5} \text{ m}$ ,  $\rho = 1000 \text{ m/s}$ ,  $\nu = 1.787 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $D = 3.53 \cdot 10^{(-9)} \text{ m}^2/\text{s}$ , остальные параметры такие же, как на рис. 2: сплошная линия — общее решение уравнения (19), точечная, штриховая и штрихпунктирная линии — решения уравнения (19) (точечная — с учетом радиальной инерции, штриховая — вязкости, штрихпунктирная — диффузии).



**Рис. 4.** Зависимости собственной частоты колебаний (а) и декремента затухания (b) для устойчивых радиусов от заряда на пузырьках. Параметры расчета такие же, как на рис. 3.



**Рис. 5.** а — зависимость инкрементов неустойчивых радиусов от заряда пузырька. Газ — диоксид углерода, жидкость — вода при  $p_0 = 0.1$  МПа для различных значений числа Оствальда и температур: сплошная линия —  $Os = 0.51$ ,  $T_0 = 323$  К; штриховая —  $Os = 1$ ,  $T_0 = 288$  К; точечная —  $Os = 1.7$ ,  $T_0 = 273$  К. б — зависимость инкрементов неустойчивых радиусов от заряда пузырька для диоксида углерода в воде при  $T_0 = 273$  К,  $Os = 1.7$ . Линии 1 и 2 соответствуют статическим давлениям жидкости  $p_0 = 0.1$  и 1 МПа.

Предполагая, что величина инкремента определяется вязкостью жидкости, получим

$$\lambda^{(\mu)} = \frac{\sigma/a_0 - 2p_{el0}}{2\rho_l^0 v_l^{(\mu)}}. \quad (27)$$

Приведем также формулу для инкремента, когда определяющим фактором в развитии неустойчивости является диффузионный процесс

$$\lambda_D = \frac{D_l}{a_0^2} \left( \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} + A} \right)^2, \quad (28)$$

$$\left( A = 3Os \frac{\Sigma}{1 - \Sigma}, \quad \Sigma = \frac{2\sigma/a_0 - 4p_{el0}}{3p_{g0}} \right).$$

На рис. 3 точечные, штриховые и штрихпунктирные линии получены соответственно по формулам (26), (27) и (28).

Анализ рис. 3 показывает, что величины инкремента, определяемые радиальной инерцией, вязкостью и диффузией, не зависят от величины заряда  $Q_0$  вплоть до  $Q_{cr}$ . При  $Q_0 = Q_{cr}$  значение инкремента  $\lambda \rightarrow 0$  вне зависимости от фактора, влияющего на неустойчивость пузырька, следовательно,  $\tau \rightarrow \infty$ . Это означает, что для того чтобы пузырек, имеющий на своей поверхности заряд  $Q_{cr}$ , стал расти, ему необходимо бесконечно много времени. При таких условиях заряженный пузырек близок к устойчивому состоянию. Наибольшее значение имеет инкремент

для случая, когда неустойчивость пузырька лимитируется вязкостью (штриховая линия, рис. 3). Необходимо отметить, что инкремент, определяемый диффузией (штрихпунктирная линия), совпадает с общим решением уравнения (19) (сплошная линия), т.е. основную роль в развитии неустойчивости оказывает эффект диффузии для любых значений заряда на пузырьке вплоть до  $Q_{cr}$ .

На рис. 4 представлены зависимости собственной частоты колебаний  $\omega_R = \text{Im}(\lambda)$  и логарифмического декремента затухания  $\delta = -2\pi \text{Re}(\lambda)/\text{Im}\lambda$  от заряда газового пузырька. Из рис. 4 следует, что с увеличением заряда на поверхности пузырька собственная частота колебаний и декремент затухания уменьшаются.

На рис. 5, а представлены зависимости инкремента, определяющего темп развития выхода заряженного пузырька с диоксидом углерода, от заряда  $Q_0$ . Точечная, пунктирная и сплошная линии соответствуют решению уравнения (19). Видно, что чем выше температура жидкости, тем пузырек более устойчив. Также из графика следует, что с увеличением числа Оствальда значение критического заряда растет. На рис. 5, б представлены зависимости инкремента неустойчивых радиусов от заряда  $Q_0$  при различных статических давлениях. Линии 1 и 2 получены согласно решению уравнения (10). Линия 2 находится ниже линии 1, это означает, что для температуры  $T_0 = 273$  К чем больше статическое давление жидкости, тем пузырек более устойчив.

## Заключение

В работе показано, что в воде, насыщенной диоксидом углерода, одиночный заряженный пузырек может находиться в динамическом и термическом равновесии, если заряд пузырька меньше критического значения.

Линейный анализ неустойчивости одиночного пузырька в газонасыщенной диоксидом углерода воде показал, что неустойчивость лимитируется в основном эффектом диффузии газа в пузырек.

При заряде пузырька, меньшем критического значения, существует два значения равновесного радиуса. Причем большему значению радиуса соответствует неустойчивое состояние, меньшему — устойчивое.

## Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке госзадания Минобрнауки РФ на тему „Разработка и создание малотоннажных продуктов и реагентов (ингибиторы коррозии и солеотложения, антиоксиданты, биоциды, присадки и др.) для процессов нефтегазохимии и очистки водных сред от загрязнений, замещающих импортные вещества и материалы. Теоретические и экспериментальные подходы (FEUR — 2023–0006)“.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] А.Н. Жаров, С.О. Ширяева. ЭОМ, **6**, 9 (1999).
- [2] Р.Н. Хабеев. ИФЖ, **92** (2), 474 (2019).
- [3] Э.Ш. Насибуллаева, И.Ш. Ахатов. ПМТФ, **48** (4), 40 (2007).
- [4] В.Ш. Шагапов, В.В. Коледин, Н.К. Вахитова. ПМТФ, **54** (5), 64 (2013). [V.Sh. Shagapov, V.V. Koledin, N.K. Vakhitova. J. Appl. Mech. Tech. Phys., **54** (5), 742 (2013). DOI: 10.1134/S0021894413050076]
- [5] В.В. Коледин, В.Ш. Шагапов. ПММ, **77** (5), 754 (2013). [V.V. Koledin, V.Sh. Shagapov. J. Appl. Math. Mech., **77** (5), 541 (2013).]
- [6] А.И. Григорьев, А.Н. Жаров, В.А. Коромыслов, С.О. Ширяева. Изв. РАН. МЖГ, **5**, 204 (1998).
- [7] А.И. Григорьев, А.Н. Жаров. ЖТФ, **70** (4), 8 (2000).
- [8] С.И. Кошоридзе, Ю.К. Левин. Письма в ЖТФ, **45** (1), 61 (2019). [S.I. Koshoridze, Yu.K. Levin. Tech. Phys. Lett., **44** (12), 1245 (2018). DOI: 10.1134/S1063785019010103]
- [9] H. Zhang, Z. Guo, X. Zhang. Soft Matter, **16** (23), 5470 (2020). DOI: 10.1039/d0sm00116
- [10] Н.Ф. Бункин, Ф.В. Бункин. УФН, **186** (7), 799 (2016). DOI: 10.3367/UFN.2016.05.037796. [N.F. Bunkin, F.V. Bunkin. Phys. Usp., **59** (9), 846 (2016). DOI: 10.3367/UFN.2016.05.037796]
- [11] G.S. Manning. Phys Chem. Chem. Phys., **22** (31), 17523 (2020). DOI: 10.1039/d0cp02517h
- [12] А.Н. Жаров, А.И. Григорьев. ЖТФ, **71** (11), 12 (2001).
- [13] Р.И. Нигматулин. Динамика многофазных сред (Наука, М., 1987)
- [14] С.С. Кутателадзе, В.Е. Накоряков. Теплообмен и волны в газожидкостных системах (Наука, Новосибирск, 1984)
- [15] Р.И. Нигматулин. Механика сплошной среды. Кинематика. Динамика. Термодинамика. Статистическая динамика (ГЭОТАР-Медиа, М., 2014)
- [16] А.Ю. Намиот. Растворимость газа в воде (Недра, М., 1991)
- [17] С.К. Жданов, Б.А. Трубников. Квазигазовые неустойчивые среды (Наука, М., 1991)
- [18] Н.Б. Варгафтик. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей (Наука, М., 1972)