

01

Квазипериодические резонансы и сценарий Ландау-Хопфа

© А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова

Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,
410019 Саратов, Россия
e-mail: sedovayv@yandex.ru

Поступило в Редакцию 25 марта 2025 г.

В окончательной редакции 4 июня 2025 г.

Принято к публикации 4 июня 2025 г.

С помощью ансамбля дискретных осцилляторов ван дер Поля-Дуффинга исследовано влияние резонансов на каскад квазипериодических бифуркаций, последовательность которых отвечает сценарию Ландау-Хопфа. При небольших частотных расстройках осцилляторов возникают языки квазипериодических режимов, аналогичные языкам Арнольда, причем в области самых высокочастотных колебаний. При большой частотной расстройке общая картина трансформации режимов по Ландау-Хопфу сохраняется, но квазипериодическая бифуркация Хопфа в каскаде может замениться на седло-узловую бифуркацию тора. Наблюдаются также узкие области резонансов на базе торов разной размерности. При больших значениях параметра нелинейности по типу осциллятора Дуффинга резонансы могут разрушить высокоразмерные торы в каскаде Ландау-Хопфа.

Ключевые слова: квазипериодичность, резонанс, сценарий Ландау-Хопфа, ляпуновские показатели, бифуркации.

DOI: 10.61011/JTF.2025.11.61590.46-25

Введение

Квазипериодические колебания достаточно распространены в природе и технике. Они могут характеризоваться разным, иногда достаточно большим числом несоизмеримых частот. Такие примеры можно найти в радиофизике и электронике [1–9], в теории контактов Джозефсона [10–12], механике и гидродинамике [13–18], много примеров известно в астрофизике [19,20], а также и в других областях. Квазипериодические колебания с разным числом несоизмеримых частот изучаются также на примерах модельных дискретных систем (отображений), в частности, в [21–25].

С квазипериодическими колебаниями Ландау и Хопф в свое время ассоциировали сценарий возникновения сложной (хаотической) динамики [26,27]. Сценарий предполагает поэтапное увеличение числа несоизмеримых частот за счет подключения новых колебательных мод. Этот процесс происходит через каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа, в результате которых в фазовом пространстве рождаются инвариантные торы все более высокой размерности. Общая дискуссия о таком сценарии обсуждается во многих работах, например, в [14–17,28–30].

Формально сценарий Ландау-Хопфа предполагает бесконечное число квазипериодических бифуркаций. Однако значительный интерес с точки зрения механизмов возникновения сложных колебаний представляют более реалистичные ситуации, когда число бифуркаций сравнительно велико, но конечно. Каскад Ландау-Хопфа может быть оборван за счет разрушения тора с образованием хаоса. На этот момент, как известно,

обратили внимание Рюэль и Такенс [31], что вызвало последующее обсуждение и активную дискуссию. При этом Афраймович и Шильников установили, что разрушиться с образованием хаоса может уже двумерный двухчастотный тор [32]. Однако сейчас известны примеры устойчивых торов достаточно высокой размерности, отвечающих четырех-, пяти- и даже шестичастотным колебаниям [4–6,8–10,18,21,22,24,25].

Каскад квазипериодических бифуркаций может быть ограничен также за счет конечного числа колебательных мод самой системы. Например, в [33] рассмотрен ансамбль пяти автоколебательных осцилляторов ван дер Поля, демонстрирующий пять шагов сценария Ландау-Хопфа. Подчеркнем здесь универсальный характер системы ван дер Поля, описывающей как радиофизический генератор, так и системы самой разнообразной природы, см. [34] и обзор [35]. Интересно, что взаимодействие системы [33] с дополнительной хаотической подсистемой не уменьшает, а увеличивает число квазипериодических бифуркаций и возможную размерность тора [36].

С точки зрения теории колебаний представляется, что еще одним механизмом обрыва каскада бифуркаций по Ландау-Хопфу может служить возникновение синхронизации и отвечающих ей резонансов на высокоразмерных торах. Именно этот аспект мы и рассмотрим в настоящей работе.

Как известно, в простейшем случае двухчастотной квазипериодичности на поверхности отвечающего ей аттрактора в виде инвариантного тора могут возникать резонансные предельные циклы. Этот переход обеспечивается за счет седло-узловой бифуркации предельных циклов. При этом на плоскости параметров возника-

ет структура языков Арнольда, встроенных в область квазипериодичности [34,37,38]. Со временем стало известно, что возможна синхронизация и многочастотных квазипериодических колебаний, когда на поверхности тора высокой размерности рождается тор меньшей размерности. Такой переход происходит через бифуркацию торов [39,40], обусловленную столкновением устойчивого и седлового торов. Ранние примеры для радиофизических генераторов можно найти, например, в [4–6]. При этом на плоскости параметров в ситуации синхронизации многочастотных колебаний может возникать картина, аналогичная системе языков Арнольда, но в виде языков квазипериодических режимов. Она наблюдалась в модельных отображениях [25,41], связанных радиофизических генераторах [8,9,42], системе хищник-жертва [43] и других примерах.

В настоящей работе мы обсудим, как соотносится картина бифуркаций по Ландау-Хопфу с возможными резонансами.

1. Исследуемая система. Случай отсутствия резонансов

В [33,36] в контексте сценария Ландау-Хопфа была предложена система пяти диссипативно связанных неидентичных по управляющим параметрам осцилляторов ван дер Поля. В такой системе при уменьшении величины связи (аналог числа Рэнольдса) последовательно наблюдается пять шагов сценария Ландау-Хопфа. Как известно, для двух связанных осцилляторов ван дер Поля высокие резонансы в отличие от основного слабо выражены, особенно в случае малых значений параметров возбуждения [44,45]. Поэтому мы, во-первых, используем увеличенные по сравнению с [33,36] значения этих параметров. Во-вторых, мы дополним эту модель кубической нелинейностью по типу осциллятора Дуффинга. Физически такая нелинейность отвечает за неизохронность малых колебаний [34]. В случае двух осцилляторов это приводит к возникновению существенно более выраженной системы резонансных языков разного порядка [46].

С целью упрощения анализа мы также используем дискретную версию системы. Она получается путем замены в исходных уравнениях производных по времени конечными разностями. Подобный прием был предложен еще в ранних работах по нелинейной физике [47–49]. Сейчас он получил широкое распространение в самых разных областях: радиофизике, динамике популяций, нейродинамике, теории генных сетей, а также при описании базовых моделей теории колебаний и нелинейной динамики (ряд конкретных примеров можно найти в обзорной части [25]). Причем, если использовать малое значение параметра дискретизации, то устройство областей в пространстве параметров будет очень близко к системе-прототипу с непрерывным временем. В то же время анализ дискретной системы гораздо проще.

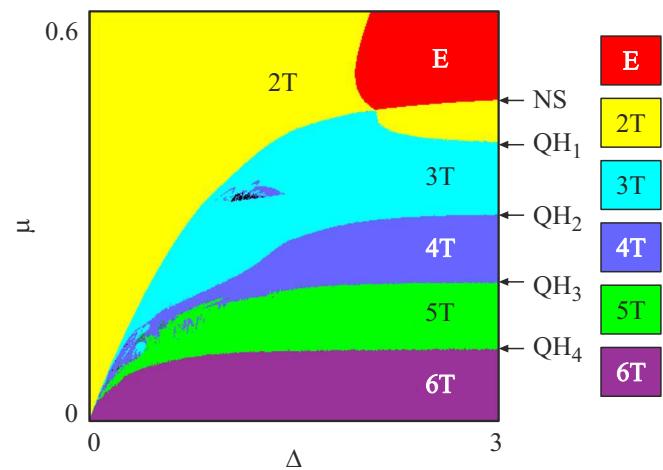


Рис. 1. Карта ляпуновских показателей ансамбля пяти дискретных осцилляторов ван де Поля (1) для $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$, $\varepsilon = 0.1$. Параметр кубической нелинейности $\beta = 0$.

С учетом данных замечаний исследуемая система имеет вид

$$\begin{aligned} x_{i,n+1} &= x_{i,n} + \varepsilon y_{i,n+1}, \\ y_{i,n+1} &= y_{i,n} + \varepsilon(\lambda_i - x_{i,n}^2)y_{i,n} - \varepsilon(1 + \Delta_{i-1})x_{i,n} \\ &\quad - \varepsilon\beta x_{i,n}^3 - \varepsilon \frac{\mu}{4} \sum_{j=1}^5 (y_{i,n} - y_{j,n}) \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $x_{i,n}$, $y_{i,n}$ — переменные (координата и скорость) i -го осциллятора, λ_i — параметр его возбуждения, β — параметр дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга, μ — величина диссипативной связи. Величины $\Delta_{i-1} = \Delta(i-1)/4$ — частотные расстройки осцилляторов относительно первого, частота которого принята за единицу. В данном случае взаимные расстройки осцилляторов управляются единственным параметром Δ . Кроме того, n — номер итерации, ε — параметр дискретизации.

Вслед за [33,36] положим сначала $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.2$, $\lambda_3 = 0.3$, $\lambda_4 = 0.4$, $\lambda_5 = 0.5$. Здесь и далее будем использовать маленькое значение $\varepsilon = 0.1$. Для последующего обсуждения представим сначала случай отсутствия дополнительной нелинейности $\beta = 0$. На рис. 1 показана соответствующая карта ляпуновских показателей на плоскости частотная расстройка-величина связи (Δ , μ). На этой карте разными цветами обозначены области с разным характером динамики в соответствии с сигнатурой спектра показателей Ляпунова Λ_n , как указано в таблице. В этой таблице приведены шесть существенных показателей, остальные всегда отрицательные. Расшифровка цветовой палитры показана справа от рисунка.

При уменьшении величины связи μ вдоль правого обреза карты при частотной расстройке $\Delta = 3$ сначала наблюдается состояние равновесия E . Затем в результате бифуркации Неймарка-Сакера NS от него отделяется

Типы режимов и спектр показателей Ляпунова для отображения

Обозначение	Тип режима	Тип аттрактора в отображении	Спектр показателей Ляпунова
E	Состояние равновесия (Equilibrium)	Неподвижная точка	$\Lambda_{1,2,3,4,5,6} < 0$
2T	Двухчастотный квазипериодический	Инвариантная кривая	$\Lambda_1 = 0, \Lambda_{2,3,4,5,6} < 0$
3T	Трехчастотный квазипериодический	Двумерный тор	$\Lambda_{1,2} = 0, \Lambda_{3,4,5,6} < 0$
4T	Четырехчастотный квазипериодический	Трехмерный тор	$\Lambda_{1,2,3} = 0, \Lambda_{4,5,6} < 0$
5T	Пятичастотный квазипериодический	Четырехмерный тор	$\Lambda_{1,2,3,4} = 0, \Lambda_{5,6} < 0$
6T	Шестичастотный квазипериодический	Пятимерный тор	$\Lambda_{1,2,3,4,5} = 0, \Lambda_6 < 0$
C	Хаос	Хаотический аттрактор	$\Lambda_1 > 0, \Lambda_{2,3,4,5,6} < 0$
H	Гиперхаос	Гиперхаотический аттрактор	$\Lambda_{1,2} > 0, \Lambda_{3,4,5,6} < 0$

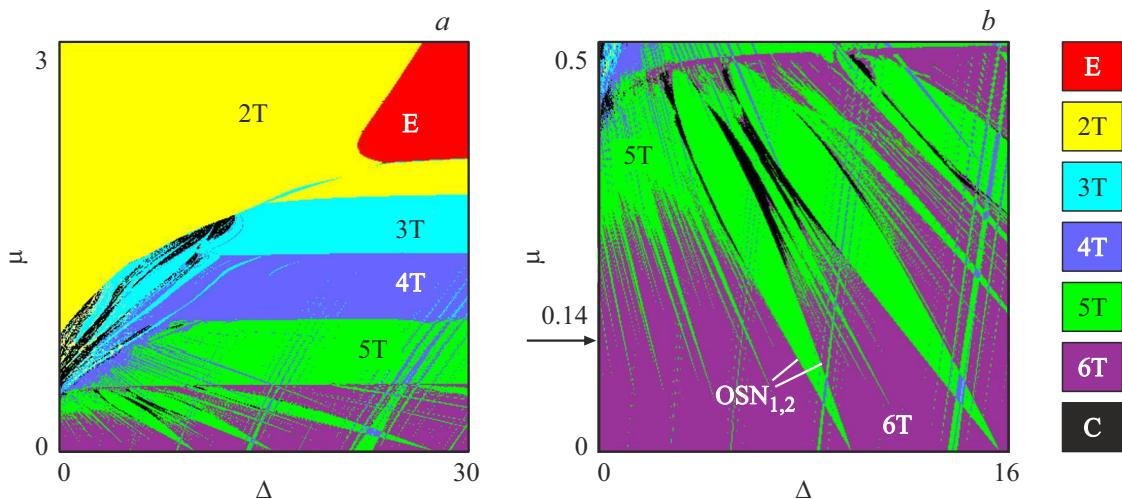


Рис. 2. Карта ляпуновских показателей ансамбля пяти дискретных осцилляторов ван де Поля-Дуффинга для $\beta = 1$ (a) и ее увеличенный фрагмент (b). Стрелкой отмечено значение $\mu = 0.14$, отвечающее графикам на рис. 3. Значения параметров: $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1.5$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = 2.5$, $\varepsilon = 0.1$.

устойчивая инвариантная кривая, что отвечает рождению двухчастотного режима 2T. Затем в точке QH₁ от этой кривой в результате квазипериодической бифуркации Хопфа отделяется двумерный тор и рождается трехчастотный режим 3T. Далее происходит каскад квазипериодических бифуркаций Хопфа QH_{2,3,4} поэтапного рождения четырех-, пяти- и шестичастотных режимов 4T, 5T и 6T. (Как мы отмечали, в силу малости, ε конфигурация областей и характер бифуркаций аналогичны случаю потоковой системы [33], за исключением увеличения на единицу числа возникающих частот, что характерно для дискретных систем.)

Как видно из рис. 1, в случае небольших параметров возбуждения λ и в отсутствии дополнительной нелинейности резонансные режимы (кроме основного резонанса $\Delta = 0$) отсутствуют. При этом при достаточно большой частотной расстройке Δ при уменьшении величины диссипативной связи μ наблюдается пять шагов каскада Ландау-Хопфа.

2. Случай квазипериодических резонансов

Увеличим теперь управляющие параметры так, что $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1.5$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = 2.5$ и выберем по аналогии с [46] значение параметра дополнительной нелинейности $\beta = 1$. Соответствующая ляпуновская карта показана на рис. 2, a. Теперь появляются характерные квазипериодические резонансы. Особенно это заметно для шестичастотной области. Соответствующий увеличенный фрагмент карты показан на рис. 2, b. Можно видеть появление языков, аналогичных традиционным языкам Арнольда, но на базе торов высокой размерности 6T и отвечающих пятичастотным режимам 5T. Наиболее крупные языки имеют острия на оси частотной расстройки Δ . Отменим, что резонансы тем более выражены, чем меньше частотная расстройка Δ осцилляторов.

В области пятичастотных режимов 5T и четырехчастотных 4T резонансы также присутствуют, но менее вы-

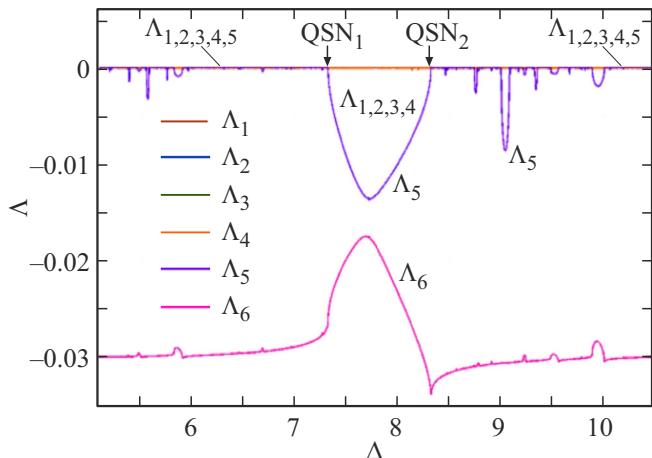


Рис. 3. Графики ляпуновских показателей вдоль линии $\mu = 0.14$. Значения параметров: $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1.5$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = 2.5$, $\varepsilon = 0.1$ и $\beta = 1$. $QSN_{1,2}$ — точки седлоузловых бифуркаций тора.

ражены. В трех- и двухчастотной областях 3T и 2T они практически отсутствуют. Таким образом, резонансы в первую очередь возникают в наиболее высокочастотных областях.

Еще одна из особенностей картины на рис. 2, b — появление хаоса С в области перекрытия пятичастотных языков. На рис. 1 хаос отсутствовал. Также в диапазоне $0 < \Delta < 10$ на рис. 2, a можно видеть, что хаос теперь возможен в области локализации трехчастотных языков 3T — они погружены в область хаоса. Однако в целом области хаоса имеют малый размер.

Резонансную природу квазипериодических языков иллюстрирует рис. 3. На нем показаны графики ляпуновских показателей вдоль отрезка горизонтальной линии $\mu = 0.14$ в диапазоне $5.1 < \Delta < 10.5$, пересекающего один из наиболее крупных языков и несколько мелких. Это значение связи отмечено стрелкой на рис. 2, b. На графиках вне резонансных областей наблюдается шестичастотный режим 6T с нулевыми показателями $\Lambda_{1,2,3,4,5} = 0$. Внутри — равны нулю показатели $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$, а пятый Λ_5 отрицательный, так что реализуется пятичастотный режим 5T. При этом шестой показатель Λ_6 тоже отрицательный, причем вблизи границ языка нигде не совпадает с Λ_5 . Согласно [39, 40], это есть признак квазипериодической седло-узловой бифуркации тора. Такие бифуркации для самого крупного языка отмечены стрелками на рис. 3 и обозначены $QSN_{1,2}$. Также соответствующие границы языка отмечены на плоскости параметров рис. 2, b. Таким образом, мы действительно наблюдаем резонансные режимы. Их характерная особенность — „провалы“ соответствующего показателя (в данном случае Λ_5) на графиках в отрицательную область.

На карте рис. 2, a при больших частотных расстройках порядка $\Delta = 30$ ширина резонансных языков заметно

уменьшается, и при вариации связи μ снова возникает чередование областей, характерное для каскада Ландау-Хопфа. При этом, однако, требуемая величина частотной расстройки Δ возрастает в десять раз по сравнению с рис. 1. Таким образом, чтобы влияние резонансов было не очень существенным, требуется большая взаимная расстройка осцилляторов по частоте. Но даже в этом случае возникают некоторые особенности. Обсудим наблюдаемую картину и эти особенности подробнее.

Для этого обратимся к графикам ляпуновских показателей в зависимости от величины связи μ при $\Delta = 30$ (правый обрез карты на рис. 2, a) в диапазоне $0 < \mu < 2$, показанном на рис. 4. Можно видеть наличие характерных областей, где доминируют режимы NT с соответствующим количеством нулевых показателей и несоизмеримых частот. Для удобства восприятия их области обозначены на рисунке символами в кружочках. Обсудим наблюдаемые бифуркации.

В правой части рисунка показатель $\Lambda_1 = 0$, а остальные — отрицательные. В соответствии с таблицей наблюдается двухчастотный режим 2T с аттрактором в виде инвариантной кривой. При приближении к точке QH_1 второй и третий показатели равны друг другу: $\Lambda_2 = \Lambda_3$. Они отрицательные и возрастают с уменьшением связи. Непосредственно в точке QH_1 оба показателя обращаются в нуль, причем далее показатель Λ_2 остается нулевым, так что теперь $\Lambda_{1,2} = 0$, а показатель Λ_3 уходит в отрицательную область. В соответствии с [39] условие $\Lambda_2 = \Lambda_3$ отвечает квазипериодической бифуркации Хопфа QH_1 , когда из инвариантной кривой мягким образом рождается двумерный тор, отвечающий трехчастотному режиму 3T.

Аналогично при приближении к точке QH_2 выполняется условие $\Lambda_3 = \Lambda_4 < 0$, так что наблюдается квазипериодическая бифуркация Хопфа рождения трехмерного тора, соответствующая переходу от трехчастотного ре-

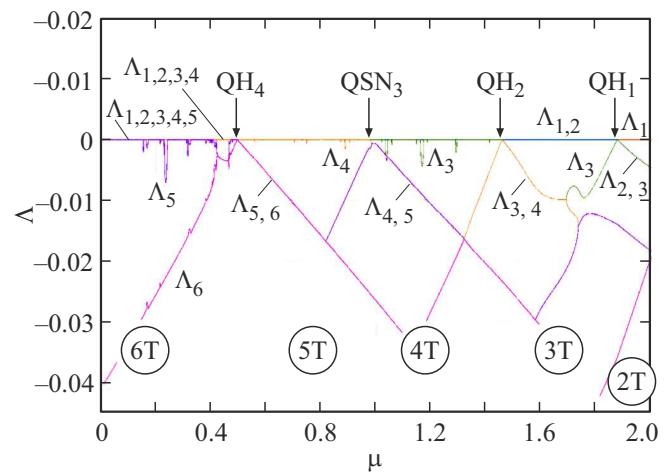


Рис. 4. Графики ляпуновских показателей в зависимости от величины связи μ вдоль линии $\Delta = 30$ для $\beta = 1$. Значения остальных параметров: $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1.5$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = 2.5$, $\varepsilon = 0.1$.

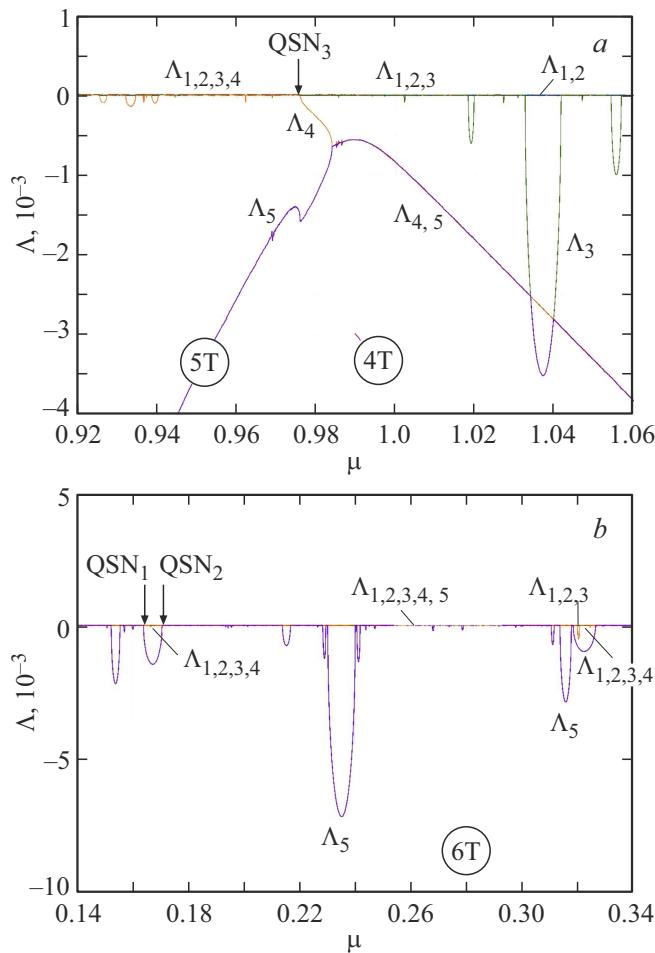


Рис. 5. Увеличенные фрагменты рис. 4: *a* — окрестность точки перехода от четырехчастотного к пятичастотному режиму; *b* — область шестичастотных режимов.

жима 3T к четырехчастотному 4T. При этом резонансы в области двух- и трехчастотных режимов и вблизи точки QH_2 не наблюдаются. Поэтому в данной области реализуются первые этапы каскада Ландау-Хопфа.

Однако далее возникают некоторые особенности. Их иллюстрирует увеличенный фрагмент рисунка в окрестности точки перехода от режима 4T к пятичастотному режиму 5T, показанный на рис. 5, *a*.

При приближении к этой точке справа показатели $\Lambda_{1,2,3} = 0$, а показатели Λ_4 и Λ_5 совпадают. Это характерно для квазипериодической бифуркации Хопфа соответствующего порядка. Однако в непосредственной окрестности точки перехода графики показателей Λ_4 и Λ_5 расходятся. При этом показатель Λ_5 уходит в отрицательную область, а показатель Λ_4 возрастает, обращаясь в нуль в точке QSN_3 . В соответствии с [39,40] такое поведение отвечает седло-узловой бифуркации торов. Таким образом, одна из квазипериодических бифуркаций Хопфа в каскаде Ландау-Хопфа может замениться на седло-узловую бифуркацию. Однако в окрестности точки такой бифуркации сохраняется поведение, характерное

для квазипериодической бифуркации Хопфа. Так, в большом масштабе на рис. 4 вблизи точки QSN_3 поведение показателей визуально характерно именно для квазипериодической бифуркации Хопфа. Такое комбинированное поведение можно объяснить тем, что точка бифуркации Хопфа попала в окрестность некоторого резонанса.

Отмечаем также, что теперь наблюдаются узкие окна резонансов на базе торов разной размерности. На увеличенном рис. 5, *a* можно видеть характерные „провалы“ третьего показателя Λ_3 , отвечающие трехчастотным резонансам на базе четырехчастотного 4T тора. Наиболее крупный из них отмечен символом $\Lambda_{1,2}$, обозначающим нулевое значение этих двух показателей. Имеется несколько менее выраженных резонансов такого типа. Левее точки QSN_3 наблюдается множество очень мелких четырехчастотных резонансов.

Вернемся к рис. 4. При дальнейшем уменьшении связи в соответствии с условием $\Lambda_5 = \Lambda_6$ снова происходит квазипериодическая бифуркация Хопфа QH_4 рождения шестичастотного режима 6T. Можно отметить, что очень близко к точке QH_4 слева от нее наблюдается сравнительно широкий пятичастотный резонанс, отмеченный на рис. 4 стрелкой и подписанный символом $\Lambda_{1,2,3,4}$. В целом резонансы в шестичастотной области наиболее выражены. Их иллюстрирует увеличенный фрагмент графиков на рис. 5, *b*. Можно видеть область шестичастотных режимов с $\Lambda_{1,2,3,4,5} = 0$, в которую встроены пятичастотные резонансы с $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$. Их границами также являются точки седло-узловых бифуркаций торов QSN . Интересную особенность можно видеть для резонансного окна, расположенного в правой части рис. 5, *b*. Внутри него наблюдается (хотя и очень узкая) область с $\Lambda_{1,2,3} = 0$. Таким образом, на поверхности резонансного пятичастотного тора возможен вторичный резонанс с возникновением четырехчастотного тора. На картах рис. 2 им отвечают характерные маленькие острова, лежащие на пересечении пятичастотных языков.

Таким образом, в системе со сценарием Ландау-Хопфа при определенном подборе параметров могут возникать квазипериодические резонансы на базе высокочастотных торов. Однако при достаточно большой частотной расстройке осцилляторов резонансы являются узкими и в целом не разрушают сценарий Ландау-Хопфа.

3. Случай больших значений параметра нелинейности по типу осциллятора Дуффинга

Увеличим теперь значение параметра дополнительной нелинейности β . Отметим, что нелинейный параметр β с точки зрения колебательных режимов в отдельном осцилляторе отвечает за отклонение формы потенциальной „ямы“ от классической квадратичной. Возникающие колебания становятся неизохронными, т. е. их период зависит от амплитуды. Этот фактор с точки зрения

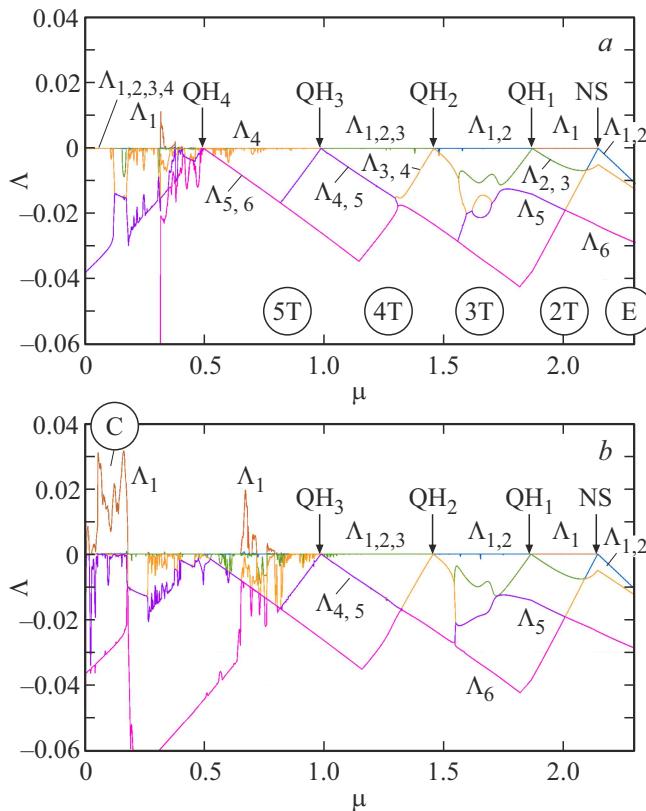


Рис. 6. Графики ляпуновских показателей в зависимости от величины связи μ для $\Delta = 30$: *a* — $\beta = 2$, *b* — $\beta = 3$. Значения остальных параметров: $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 1.5$, $\lambda_4 = 2$, $\lambda_5 = 2.5$, $\varepsilon = 0.1$.

синхронизации приводит к увеличению области синхронизации тем больше, чем больше параметр β , на что указано в [34]. Поэтому в случае больших значений этого параметра можно ожидать как более сильных резонансов, так и разрушения квазипериодических бифуркаций за их счет. Эти эффекты мы и обсудим в разд. 3.

На рис. 6 показаны аналогичные рис. 4 графики ляпуновских показателей в зависимости от величины связи μ для $\beta = 2$ и 3. В случае $\beta = 2$ на рис. 6, *a* наблюдается каскад из бифуркации Неймарка-Сакера (NS) рождения инвариантной кривой из состояния равновесия *E* и квазипериодических бифуркаций Хопфа $QH_{1,2,3}$. В этой области резонансы практически отсутствуют. При приближении к более высокочастотной точке QH_4 справа наблюдается „сгущение“ достаточно выраженных четырехчастотных резонансов. Однако в ее окрестности характерное условие для квазипериодической бифуркации Хопфа $\Lambda_5 = \Lambda_6$ сохраняется. В то же время слева от этой точки шестичастотный режим практически не возникает. Наблюдается нерегулярное чередование окон пяти- и четырехчастотных режимов, и возможны даже узкие области трехчастотного режима и хаоса с $\Lambda_1 > 0$. При дальнейшем уменьшении связи при приближении

к точке $\mu = 0$ реализуется пятичастотный режим с $\Lambda_{1,2,3,4} = 0$.

Перейдем к случаю $\beta = 3$, рис. 6, *b*. Теперь достаточно достоверно наблюдаются только точки NS и $QH_{1,2}$. В окрестности точки QH_3 справа происходит „сгущение“ мелких трехчастотных резонансов, а слева — четырехчастотных. При дальнейшем уменьшении связи снова наблюдается чередование окон режимов разного типа, в основном четырехчастотных и хаоса, но исключая шестичастотные. В отличие от случая рис. 6, *a* при малой связи μ все торы разрушены — возникает достаточно широкое окно хаоса *C*.

На рис. 7 показана ляпуновская карта для случая $\beta = 3$. Ее надо сравнить с рис. 2, *a*. Вдоль правого края карты наблюдается динамика, соответствующая графикам на рис. 6, *b*. В центральной части карты в области двухчастотных режимов 2T и трехчастотных 3T резонансы отсутствуют. В четырехчастотной области 4T присутствуют языки трехчастотных режимов. Ниже, при меньшей связи μ , выраженные языки не наблюдаются, а происходит отчасти нерегулярное чередование режимов. При частотных расстройках $\Delta < 17.7$ восстанавливаются шестичастотные режимы. Интересно проследить характер режимов при малых Δ с ростом величины связи μ . Сначала реализуется шестичастотный режим, который переходит в пятичастотный или четырехчастотный. Они затем разрушаются с образованием хаоса. При этом области хаоса заметно увеличиваются по сравнению с рис. 2, *a*. Еще одна особенность — появление гиперхаоса *H*. При достаточно большой связи квазипериодические колебания восстанавливаются сразу из хаоса, причем в виде двухчастотного режима 2T. Таким образом, большие значения дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга усиливают резонансы и способствуют разрушению синхронизации и возможному разрушению квазипериодических бифуркаций инвариантных торов.

Заключение

Влияние квазипериодических резонансов на сценарий Ландау-Хопфа может быть исследовано на примере ансамбля дискретных осцилляторов ван дер Поля при учете дополнительной нелинейности по типу осциллятора Дуффинга. При небольших частотных расстройках осцилляторов возникают языки квазипериодических режимов, аналогичные языкам Арнольда, причем в области самых высокочастотных колебаний. В области перекрытия таких языков возникает хаос. При большой частотной расстройке осцилляторов общая картина трансформации режимов по Ландау-Хопфу сохраняется, но квазипериодическая бифуркация Хопфа в каскаде может замениться на седло-узловую бифуркацию тора в узкой окрестности точки бифуркации. Наблюдаются также узкие области резонансов на базе торов разной размерности, причем на резонансных торах могут возни-

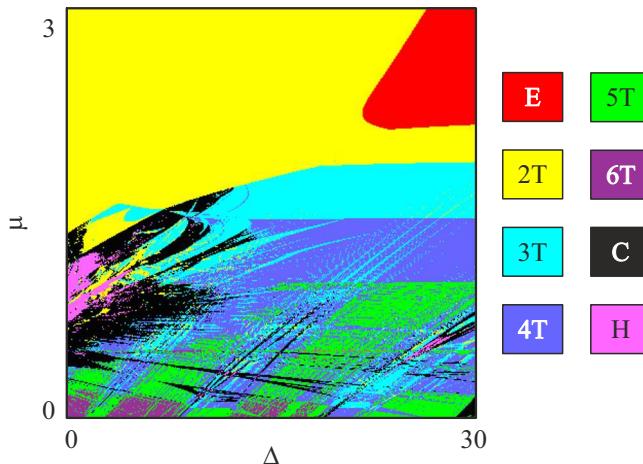


Рис. 7. Карта ляпуновских показателей для $\beta = 3$. Значения остальных параметров аналогичны рис. 2.

вать вторичные резонансы. Для низкоразмерных торов резонансы фактически отсутствуют. При увеличении параметра нелинейности по типу осциллятора Дуффинга резонансы могут разрушить высокоразмерные торы в каскаде Ландау-Хопфа. При этом наблюдается нерегулярное чередование окон торов разной размерности и хаоса. Для этого, однако, требуется достаточно большая нелинейность.

Отметим, что, в силу универсальности подходов нелинейной теории колебаний, полученные результаты могут представлять интерес для различных конкретных областей. Квазипериодические колебания достаточно часто встречаются в радиоэлектронике, радиофизике, астрофизике, лазерной физике, климатологии и др. При этом возможны ситуации, когда наблюдаются многочастотные колебания, характеризующиеся набором несоизмеримых частот. Подобные случаи, однако, мало исследованы. Представляет интерес влияния тех или иных факторов на такие колебания и „силу“ возможных резонансов. Инструментарий и подходы нелинейной теории колебаний и теории динамических систем в этом случае оказываются эффективными. В этом плане универсальным и информативным может служить метод карт ляпуновских показателей.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (FFWZ-2025-0016).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] P.S. Lindsay, A.W. Cumming. *Physica D*, **40** (2), 196 (1989). DOI: 10.1016/0167-2789(89)90063-8
- [2] L. Borkowski, P. Perlikowski, T. Kapitaniak, A. Stefanski. *Phys. Rev. E*, **91** (6), 062906 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevE.91.062906
- [3] I. Manimehan, K. Thamilmaran, P. Philominathan. *Int. J. Bifurcation Chaos*, **21** (7), 1987 (2011). DOI: 10.1142/S0218127411029586
- [4] V. Anishchenko, S. Nikolaev, J. Kurths. *Phys. Rev. E*, **73** (5), 056202 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevE.73.056202
- [5] V.S. Anishchenko, S.M. Nikolaev. *Int. J. Bifurcation Chaos*, **18** (9), 2733 (2008). DOI: 10.1142/S021812740821956
- [6] B.C. Анищенко, С.М. Николаев. *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, **2** (3), 267 (2006). DOI: 10.20537/nd0603001
- [7] N. Inaba, K. Kamiyama, T. Kousaka, T. Endo. *Physica D*, **311**, 17 (2015). DOI: 10.1016/j.physd.2015.08.008
- [8] A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.A. Shchegoleva, N.V. Stankevich. *Physica D*, **398**, 1 (2019). DOI: 10.1016/j.physd.2019.05.014
- [9] А.П. Кузнецов, Ю.В. Седова, Н.В. Станкевич. *Дифференциальные уравнения и процессы управления*, **1**, 54 (2023). DOI: 10.21638/11701/spbu35.2023.105
- [10] A.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, Y.V. Sedova. *J. Appl. Nonlin. Dyn.*, **7** (1), 105 (2018). DOI: 10.5890/JAND.2018.03.009
- [11] N.G. Koudafoke, C.H. Miwadinou, A.V. Monwanou, A.L. Hinvi, J.C. Orou. *J. Dyn. Control*, **8** (3), 779 (2020). DOI: 10.1007/s40435-019-00595-w
- [12] A.E. Botha, Y.M. Shukrinov, J. Tekié, M.R. Kolahchi. *Phys. Rev. E*, **107** (2), 024205 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevE.107.024205
- [13] T. Bakri, Y.A. Kuznetsov, F. Verhulst. *J. Dyn. Differ. Equat.*, **27**, 371 (2015). DOI: 10.1007/s10884-013-9339-9
- [14] A.N. Kulikov. *Differen. Equat.*, **48**, 1258 (2012). DOI: 10.1134/S0012266112090066
- [15] A.N. Kulikov, D.A. Kulikov. *Theor. Mathem. Phys.*, **203** (1), 501 (2020). DOI: 10.1134/S0040577920040066
- [16] N.M. Evstigneev. *Open J. Fluid Dyn.*, **6** (4), 496 (2016). DOI: 10.4236/ojfd.2016.64035
- [17] J. Sánchez Umbría, M. Net. *Phys. Fluids*, **33** (11), 114103 (2021). DOI: 10.1063/5.0064465
- [18] F. Garcia, J. Ogbonna, A. Giesecke, F. Stefani. *F. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, **118**, 107030 (2023). DOI: 10.1016/j.cnsns.2022.107030

- [19] R.A. Remillard, M.P. Muno, J.E. McClintock, J.A. Orosz. *Astrophys. J.*, **580** (2), 1030 (2002). DOI: 10.1086/343791
- [20] A.R. Ingram, S.E. Motta. *New Astronomy Rev.*, **85**, 101524 (2019). DOI: 10.1016/j.newar.2020.101524
- [21] M. Sekikawa, N. Inaba, K. Kamiyama, K. Aihara. *Chaos*, **24** (1), 013137 (2014). DOI: 10.1063/1.4869303
- [22] S. Hidaka, N. Inaba, M. Sekikawa, T. Endo. *Phys. Lett. A*, **379** (7), 664 (2015). DOI: 10.1016/j.physleta.2014.12.022
- [23] K. Kamiyama, N. Inaba, M. Sekikawa, T. Endo. *Physica D*, **289**, 12 (2014). DOI: 10.1016/j.physd.2014.09.001
- [24] A.P. Kuznetsov, Y.V. Sedova. *Int. J. Bifurcation Chaos*, **24** (7), 1430022 (2014). DOI: 10.1142/S0218127414300225
- [25] A.P. Kuznetsov, Y.V. Sedova, N.V. Stankevich. *Int. J. Bifurcation Chaos*, **33** (15), 2330037 (2023). DOI: 10.1142/S0218127423300379
- [26] L.D. Landau. *Dokl. Akad. Nauk USSR.*, **44**, 311 (1944).
- [27] E.A. Hopf. *Commun. Pure Appl. Mathem.*, **1** (4), 303 (1948).
- [28] A.N. Kulikov. *J. Mathem. Sci.*, **262** (6), 809 (2022). DOI: 10.1007/s10958-022-05859-z
- [29] R. Herrero, J. Farjas, F. Pi, G. Orriols. *Chaos*, **32** (2), 023116 (2022). DOI: 10.1063/5.0069878
- [30] R. Herrero, J. Farjas, F. Pi, G. Orriols. *Multiplicity of Time Scales in Complex Systems: Challenges for Sciences and Communication II* (Springer Nature, Switzerland, 2023), p. 463. DOI: 10.1007/16618_2023_69
- [31] D. Ruelle, F. Takens. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25* (1971), 12, p. 1.
- [32] В.С. Афраимович, Л.П. Шильников. В сб.: *Методы качественной теории дифференциальных уравнений* (ГГУ, Горький, 1983), с. 3. [V.S. Afraimovich, L.P. Shilnikov. Amer. Math. Soc. Transl., **149** (2), 201 (1991). DOI: 10.1090/trans2/149/12]
- [33] A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev, L.V. Turukina. *Phys. Lett. A*, **377** (45–48), 45 (2013). DOI: 10.1016/j.physleta.2013.10.013
- [34] A. Pikovsky, M. Rosenblum, J. Kurths. *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences* (Cambridge university press, 2001), DOI: 10.1017/CBO9780511755743
- [35] А.П. Кузнецов, Е. С. Селиверстова, Д.И. Трубецков, Л.В. Тюрюкина. *Известия вузов. ПНД*, **22** (4), 3 (2014). DOI: 10.18500/0869-6632-2014-22-4-3-42
- [36] A.P. Kuznetsov, L.V. Turukina. *Physica D*, **470**, 134425 (2024). DOI: 10.1016/j.physd.2024.134425
- [37] В.И. Арнольд. *Известия АН СССР. Сер. математическая*, **25** (1), 21 (1961).
- [38] V.I. Arnold. *Chaos*, **1** (1), 20 (1991). DOI: 10.1063/1.165812
- [39] R. Vitolo, H. Broer, C. Simó. *Regular Chaotic Dynamics*, **16**, 154 (2011). DOI: 10.1134/S1560354711010060
- [40] M. Komuro, K. Kamiyama, T. Endo, K. Aihara. *Int. J. Bifurcation Chaos*, **26** (7), 1630016 (2016). DOI: 10.1142/S0218127416300160
- [41] R. Vitolo, H. Broer, C. Simó. *Nonlinearity*, **23** (8), 1919 (2010). DOI: 10.1088/0951-7715/23/8/007
- [42] N.V. Stankevich, N.A. Shchegoleva, I.R. Sataev, A.P. Kuznetsov. *J. Comput. Nonlin. Dyn.*, **15** (11), 111001 (2020). DOI: 10.1115/1.4048025
- [43] N.C. Pati. *Chaos*, **34** (8), 083126 (2024). DOI: 10.1063/5.0208457
- [44] A.G. Balanov, N.B. Janson, D.E. Postnov, O. Sosovtseva. *Synchronization: from simple to complex* (Springer, Berlin, Heidelberg, 2009), DOI: 10.1007/978-3-540-72128-4
- [45] A.P. Kuznetsov, J.P. Roman. *Physica D*, **238** (16), 1499 (2009). DOI: 10.1016/j.physd.2009.04.016
- [46] A.P. Kuznetsov, J.P. Roman. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*, **12** (1), 54 (2009).
- [47] Г.М. Заславский, Р.З. Сагдеев, Д.А. Усиков, А.А. Черников. *УФН*, **156** (10), 193 (1988). [G.M. Zaslavskii, R.Z. Sagdeev, D.A. Usikov, A.A. Chernikov. *Soviet Phys. Usp.*, **31** (10), 887 (1988). DOI: 10.1070/PU1988v03n10ABEH005632]
- [48] G.M. Zaslavsky. *The physics of chaos in Hamiltonian systems* (Imperial College Press; Distributed by World Scientific, 2007), DOI: 10.1142/P507
- [49] А.Д. Морозов. *Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах* (РХД, Москва-Ижевск, 2005)