

05,07

## Влияние внешнего поля на фазовые состояния спинового нематика с одноионной анизотропией „легкая ось“

© О.А. Космачев, Е.О. Фадеева, Ю.А. Фридман, Е.А. Ярыгина

Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского,  
Симферополь, Республика Крым, Россия

E-mail: yuriifridman@gmail.com

Поступила в Редакцию 11 июля 2025 г.

В окончательной редакции 20 июля 2025 г.

Принята к публикации 22 июля 2025 г.

В работе исследовано влияние внешнего магнитного поля на фазовые состояния спинового нематика с одноионной анизотропией „легкая ось“ во внешнем магнитном поле. Рассмотрен случай преобладающего биквадратичного обменного взаимодействия. Система исследована в двух возможных геометриях: поле параллельно оси анизотропии, и поле перпендикулярно оси анизотропии. Показано, что в обоих случаях в системе реализуется осевая нематическая фаза, но значения полей перехода осевой нематик-парамагнитное состояние различно.

**Ключевые слова:** спиновый нематик; одноионная анизотропия „легкая ось“; внешнее поле; квадрупольный эллипсоид.

DOI: 10.61011/FTT.2025.08.61322.185-25

### 1. Введение

Состояние спинового нематика является одним из наиболее необычных состояний магнитоупорядоченных структур. Стандартное магнитное упорядочение связано с нарушением симметрии относительно обращения времени [1,2], тогда как в спиновом нематике спонтанное нарушение вращательной симметрии определяется мультипольными средними, т.е. разноузельными (или одноузельными) спиновыми корреляторами [3–22]. Обычно свойства спиновых нематиков исследуются в случае отсутствия внешнего поля. При этом, возникает вопрос: а будет ли устойчива нематическая фаза при включении внешнего магнитного поля? Влияние магнитного поля на устойчивость нематических состояний активно исследуется в магнетиках со спином магнитного иона  $S = 1/2$ , в которых нематическое состояние характеризуется разноузельными спиновыми средними [23–34]. Однако влияние магнитного поля на фазовые состояния негейзенберговского магнетика с биквадратичным обменным взаимодействием приводит к новым, необычным результатам. Так, в работе [35] было показано, что как в изотропном, так и в спиновом нематике с одноионной анизотропией, реализуется устойчивое нематическое состояние. При этом внешнее магнитное поле оказывает существенное влияние на геометрический образ этого состояния в спиновом пространстве. Так, в отсутствие внешнего поля геометрическим образом нематического состояния в спиновом пространстве является одноосный эллипсоид (бесконечно тонкий диск), тогда как включение поля трансформирует квадрупольный эллипсоид в двухосный эллипсоид. Кроме того, в работе [36] было показано, что в ферромагнетике с большим биквадра-

тическим обменным взаимодействием и одноионной анизотропией типа „легкая плоскость“, наличие внешнего магнитного поля, перпендикулярного базисной плоскости, приводит к реализации „угловой“ нематической фазы, в которой квадрупольные двухосные эллипсоиды ориентированы под некоторым углом к оси квантования, т.е приводят к реализации нового фазового состояния — „угловой“ нематической фазе. Возникновение такого состояния связано с наличием легкоплоскостной анизотропии, приводящей к эффекту квантового сокращения спина [37], и внешнего магнитного поля. Возникает вопрос: будет ли энергетически выгодна реализация такой „угловой“ нематической фазы в легкоосном негейзенберговском ферромагнетике, находящемся во внешнем поле, ортогональном легкой оси?

Таким образом, целью данной работы является исследование фазовых состояний негейзенберговского ферромагнетика с большим биквадратичным обменным взаимодействием, и одноионной анизотропией типа „легкая ось“, находящемся во внешнем магнитном поле.

### 2. Негейзенберговский анизотропный ферромагнетик в продольном магнитном поле

В качестве исследуемой модели рассмотрим ферромагнетик со спином магнитного иона  $S = 1$ , в обменном гамильтониане которого учитывается как гейзенберговский обмен, так и биквадратичный. Кроме того, исследуемая система обладает одноионной анизотропией типа „легкая ось“, и находится во внешнем магнитном поле, параллельном оси легкого намагничения. Гамильтониан такого ферромагнетика можно представить следующим

образом:

$$\mathcal{H} = -H \sum_n S_n^z - \beta \sum_n (S_n^z)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} \left[ J(n-n') (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) + K(n-n') (\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^2 \right], \quad (1)$$

где  $J, K$  — константы билинейного и биквадратичного обменных взаимодействий,  $\beta > 0$  — константа одноионной анизотропии типа „легкая ось“,  $H$  — внешнее поле в энергетических единицах. В дальнейшем будем рассматривать только случай большого биквадратичного взаимодействия  $K > J$ , а также предполагается, что рассмотрение проводится при низких температурах, т.е.  $T \rightarrow 0$ .

Прежде чем рассматривать влияние внешнего поля на состояние анизотропного спинового нематика, рассмотрим поведение системы при  $H = 0$  [14]. Как было показано в работах [12, 16, 17, 19–21], в случае большого биквадратичного обмена в системе реализуется нематическое состояние, описываемое следующими параметрами порядка:

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha, \quad q_2^0 = 3\langle (S^z)^2 \rangle - S(S+1), \\ q_2^2 = \langle (S^x)^2 \rangle - \langle (S^y)^2 \rangle = \sin 2\alpha,$$

где  $\alpha$  — параметр обобщенного  $u-v$  преобразования [38], который в случае отсутствия внешнего поля может принимать значение  $\pm\pi/4$ . Таким образом, в рассматриваемом случае параметры порядка, определяющие нематическое состояние, имеют следующий вид:

$$\langle S^z \rangle = 0, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 = \pm 1. \quad (2)$$

Из соотношений (2) следует, что

$$\langle (S^z)^2 \rangle = 1, \quad \langle (S^x)^2 \rangle = 1, \quad \langle (S^y)^2 \rangle = 0,$$

если  $\alpha = \pi/4$ ; или

$$\langle (S^z)^2 \rangle = 1, \quad \langle (S^x)^2 \rangle = 0, \quad \langle (S^y)^2 \rangle = 1,$$

если  $\alpha = -\pi/4$ . Таким образом, геометрический образ в спиновом пространстве нематического состояния анизотропного спинового нематика с анизотропией „легкая ось“ является одноосный эллипсоид (бесконечно тонкий диск), ориентированный либо в плоскости  $ZOX$  ( $\alpha = \pi/4$ ), либо в плоскости  $ZOY$  ( $\alpha = -\pi/4$ ). При этом, энергия основного состояния в обоих случаях одинакова и равна

$$E_{gs} = -\frac{K_0}{3} - \beta,$$

а векторы основного состояния имеют вид:

$$|\psi_{gs}\rangle = \frac{|1\rangle + |-1\rangle}{\sqrt{2}} (\alpha = \pi/4);$$

$$|\psi_{gs}\rangle = \frac{|1\rangle - |-1\rangle}{\sqrt{2}} (\alpha = -\pi/4).$$

Следовательно, нематическое состояние при  $H = 0$  является вырожденным по ориентации квадрупольных эллипсоидов в спиновом пространстве относительно оси легкого намагничения, т.е. оси  $OZ$ .

При включении внешнего поля, параллельного оси анизотропии, возникает ненулевой магнитный момент, т.е.  $\langle S^z \rangle \neq 0$ , причем величина его меньше номинального значения спина магнитного иона. Энергия основного состояния в этом случае равна:

$$E_{gs} = -\frac{K_0}{3} - \beta - H \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (K_0 - J_0) \cos^2 2\alpha, \quad (3)$$

а параметры порядка, при этом, принимают вид:

$$\langle S^z \rangle = \cos 2\alpha, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 = \sin 2\alpha, \quad (4)$$

где

$$\langle (S^x)^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 + \sin 2\alpha); \\ \langle (S^y)^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 - \sin 2\alpha); \quad \langle (S^z)^2 \rangle = 1. \quad (5)$$

Поскольку мы рассматриваем поведение системы при низких температурах ( $T \rightarrow 0$ ), то выражение для энергии основного состояния (3) определяет плотность свободной энергии исследуемого магнетика. Анализ плотности свободной энергии показывает, что

$$\cos 2\alpha = \langle S^z \rangle = \frac{H}{K_0 - J_0},$$

т.е. при полях меньше критического ( $H_c < K_0 - J_0$ ) в спиновом нематике с легкоосной одноионной анизотропией реализуется так называемый осевой нематик, геометрическим образом которого в спиновом пространстве, как следует из соотношений (5), является двухосный эллипсоид, главная ось которого параллельна оси  $OZ$ , т.е. параллельна как направлению внешнего поля, так и оси легкого намагничения.

При полях, больших  $H_c$ , параметры порядка принимают следующий вид:

$$\langle S^z \rangle = 1, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 = 0,$$

и магнетик переходит в парамагнитное состояние.

### 3. Негейзенберговский анизотропный ферромагнетик в поперечном магнитном поле

Рассмотрим теперь поведение легкоосного спинового нематика в поперечном внешнем поле, перпендикулярном оси легкого намагничения. Для определенности будем предполагать, что магнитное поле параллельно оси  $OZ$ , а легкоосная анизотропия ориентирована по оси  $OX$ . Как и ранее предполагается, что спин

магнитного иона  $S = 1$ , температуры низкие, а константа биквадратичного обменного взаимодействия превосходит константу билинейного обмена, т. е.  $K > J$ . Гамильтониан магнетика, в этом случае, имеет вид:

$$\mathcal{H} = -H \sum_n S_n^z - \beta \sum_n (S_n^x)^2 - \frac{1}{2} \sum_{n_1 \neq n_2} [J(n-n')(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'}) + K(n-n')(\mathbf{S}_n \mathbf{S}_{n'})^2]. \quad (6)$$

Включение внешнего поля приведет к возникновению ненулевого магнитного момента, ориентация и величина которого будут определяться конкуренцией внешнего поля и материальных параметров системы, в частности — одноионной анизотропии. Можно ожидать, что в такой геометрии возможна реализация так называемой „угловой“ нематической фазы, как это наблюдается в легкоплоскостном спиновом нематике (см., например, [36]). Следовательно, можно предположить, что возникающий под действием магнитного поля магнитный момент ориентирован под некоторым углом  $\theta$  к оси  $OZ$ . Для определенности будем считать, что магнитный момент лежит в плоскости  $ZOX$ . С помощью унитарного преобразования

$$\mathcal{H}(\theta) = U \mathcal{H} U^+, \quad U(\theta) = \prod_n \exp[i\theta S_n^y]$$

перейдем в собственную систему координат на каждом узле, в которой ось  $OZ$  совпадает с направлением среднего магнитного момента. В собственной системе координат энергия основного состояния, совпадающая в случае низких температур с плотностью свободной энергии, имеет вид:

$$E_{gr,st} = -H \cos \theta \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (K_0 - J_0) \cos^2 2\alpha + \frac{\beta}{2} \cos^2 \theta (1 - \sin 2\alpha). \quad (7)$$

Здесь, как и ранее,  $\alpha$  — параметр  $u-v$  преобразования.

Минимизируя плотность свободной энергии (7) по параметрам  $\theta$  и  $\alpha$  получим связь этих параметров с материальными параметрами магнетика:

$$\cos \theta = \frac{H}{\beta} \frac{\cos 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}, \quad \sin 2\alpha = -\frac{H^2}{2\beta(K_0 - J_0)}. \quad (8)$$

Используя соотношения (8), а также учитывая, что в собственной системе координат  $\cos 2\alpha = \langle S \rangle$ , получим

$$\langle S^z \rangle = \left( \frac{\beta}{H} + \frac{H}{2(K_0 - J_0)} \right) \cos \theta. \quad (9)$$

Из анализа выражения (9) следует, что среднее значение магнитного момента убывает с ростом величины магнитного поля, поскольку первое слагаемое убывает с ростом

поля как гипербола (при фиксированных  $\beta, \theta$ ), а второе — растет как линейная функция. Такое поведение среднего значения магнитного момента свидетельствует о том, что в данном случае, в отличие от легкоплоскостного нематика [36], „угловая“ нематическая фаза не реализуется, а возникает осевая нематическая фаза, в которой ненулевой магнитный момент параллелен внешнему полю, а параметры порядка определяются соотношениями (4). При этом, средний магнитный момент с ростом поля растет, а квадрупольный эллипсоид, как следует из явного вида одноузельных корреляторов

$$\langle (S^z)^2 \rangle = 1, \\ \langle (S^y)^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 - \sin 2\alpha), \quad \langle (S^x)^2 \rangle = \frac{1}{2} (1 + \sin 2\alpha),$$

трансформируется в двухосный эллипсоид, главная ось которого ориентирована по магнитному полю.

Энергия основного состояния в этой фазе равна:

$$E_{gr,st} = -H \cos 2\alpha + \frac{1}{2} (K_0 - J_0) \cos^2 2\alpha + \frac{\beta}{2} (1 - \sin 2\alpha). \quad (10)$$

а волновой вектор основного состояния имеет вид:  $|\psi_{gr,st}\rangle = \cos \alpha |1\rangle + \sin \alpha |-1\rangle$ .

Поскольку мы рассматриваем систему при низких температурах, то энергия основного состояния (при  $T \rightarrow 0$ ) определяет плотность свободной энергии, минимизация которой по параметру позволяет получить следующее уравнение на этот параметр:

$$H \sin 2\alpha - (K_0 - J_0) \sin 2\alpha \cos 2\alpha + \frac{\beta}{2} \cos 2\alpha = 0.$$

После несложных математических преобразований это уравнение можно привести к виду:

$$\left( \frac{H}{K_0 - J_0} \right)^{2/3} + \left( \frac{\beta}{2(K_0 - J_0)} \right)^{2/3} = 1. \quad (11)$$

Уравнение (11) в общем случае описывает замкнутую кривую (астроиду) в переменных

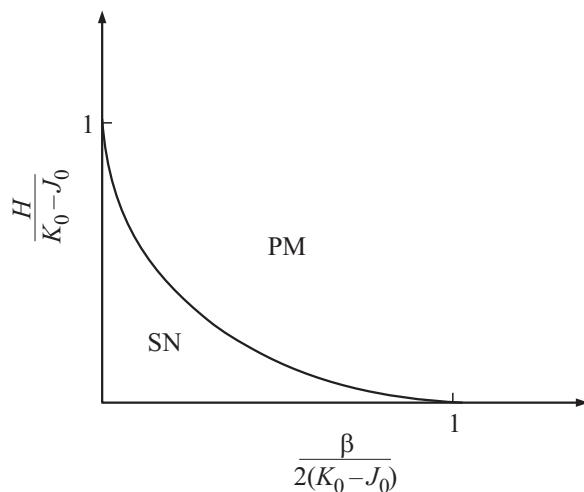
$$\frac{H}{K_0 - J_0}, \quad \frac{\beta}{2(K_0 - J_0)}$$

(см. [1]). В рассматриваемом случае уравнение (11) описывает лишь часть астроиды, поскольку все параметры, входящие в (11) положительны, т. е. это часть астроиды, лежащая в первом квадранте. Кроме того, уравнение (11) позволяет определить поле перехода между осевой нематической фазой, характеризуемое параметрами порядка (4), и парамагнитным состоянием, характеризуемым параметрами порядка

$$\langle S^z \rangle = 1, \quad q_2^0 = 1, \quad q_2^2 = 0.$$

Величина критического поля определяется следующим образом:

$$H_c = (K_0 - J_0) \left[ 1 - \left( \frac{\beta}{2(K_0 - J_0)} \right)^{2/3} \right]^{3/2}.$$



Фазовая диаграмма спинового нематика с анизотропией „легкая ось“ в поперечном магнитном поле.

Таким образом, при  $H < H_c$  реализуется осевое нематическое состояние, а при  $H > H_c$  — парамагнитная фаза. Графически это можно представить следующим образом (см. рисунок).

#### 4. Заключение

В чем же причина столь разительного отличия, казалось бы, очень близких моделей: спиновый нематик с анизотропией „легкая плоскость“ в поперечном поле, и спиновый нематик с анизотропией „легкая ось“, также в поперечном поле?

Чтобы понять возникающие различия в поведении магнетиков с одноионной анизотропией „легкая ось“ и „легкая плоскость“ во внешнем магнитном поле, обратимся к рассмотрению ситуации в отсутствие внешнего поля. Как показано в [36], при  $H = 0$  и большом биквадратичном обменном взаимодействии в магнетике реализуется нематическое состояние с  $\langle S \rangle = 0$ . При этом, одноионная анизотропия типа „легкая плоскость“ ориентирует одноосный квадрупольный эллипсоид (бесконечно тонкий диск) в базисной плоскости, т. е. создает эффективную анизотропию квадрупольных параметров порядка. При включении внешнего магнитного поля, перпендикулярного базисной плоскости, возникает конкуренция между эффективной анизотропией и магнитным полем, что приводит к реализации „угловой“ нематической фазы. В рассматриваемом в данной работе случае, т. е. спинового нематика с анизотропией „легкая ось“, при  $H = 0$  также реализуется нематическое состояние с  $\langle S \rangle = 0$ , но квадрупольный эллипсоид (бесконечно тонкого диска) формируется в плоскости либо  $XOZ$ , либо в плоскости  $ZOY$ . Внешнее поле, включенное перпендикулярно оси анизотропии оказывается лежащим в плоскости одноосного эллипсоида, а это означает, что отсутствует конкуренция между эффективной анизотропией квадрупольных параметров порядка и внешним

полем. Следовательно, при включении внешнего поля, ориентированного параллельно оси  $OZ$ , возникает ненулевой магнитный момент, ориентированный по магнитному полю ( $0 < \langle S^z \rangle < 1$ ), и квадрупольный двухосный эллипсоид ориентируется так, что его главная ось параллельна также оси  $OZ$ . Таким образом, в рассматриваемом нами случае, при  $H \neq 0$  и большом биквадратичном обменном взаимодействии, „угловая“ нематическая фаза не реализуется, а возникает состояние осевого нематика.

Таким образом, можно утверждать, что симметрийные свойства спинового нематика с анизотропией „легкая ось“, и спинового нематика с анизотропией „легкая плоскость“ являются различными.

#### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

#### Список литературы

- [1] L.D. Landau, E.M. Lifshitz. Electrodynamics of Continuous Media, 2nd ed., edited by E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskiy (Nauka, Moscow, 1982).
- [2] A.I. Ahiezer, V.G. Baryakhtar, S.V. Peletminskiy. Spin Waves (Nauka, Moscow, 1967).
- [3] A.F. Andreev, V.I. Marchenko. Sov. Usp. Fiz. Nauk **130**, 39–63 (1980).
- [4] A.F. Andreev, I.A. Grishchuk. Sov. Phys. JETP **60**, 267 (1984).
- [5] L.E. Svidstov, T. Fujita, H. Yamaguchi, S. Kimura, K. Omura, A. Prokofiev, A.I. Smirnov, Z. Honda, M. Hagiwara. JETP letters, **93**, 1, 21 (2011). <https://doi.org/10.1134/S0021364011010073>
- [6] M.E. Zhitomirsky, H. Tsunetsugu. Europhys. Lett. **92**, 37001 (2010).
- [7] P. Chandra, P. Coleman. Phys. Rev. Lett., **66**, 100 (1991). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.66.100>
- [8] A.V. Chubukov. Phys. Rev. B. **44**, 4693 (1991). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.44.4693>
- [9] V.M. Matveev. Sov. Phys.-JETP. **38**, 813 (1974).
- [10] F. Michaud, F. Vernay, F. Mila. Phys. Rev. B. **84**, 184424 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.84.184424>
- [11] B.A. Ivanov, A.K. Kolezhuk. Phys. Rev. B **68**, 052401 (2003). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.68.052401>
- [12] A.M. Perelomov. Sov. Phys. Usp. **20**, 703 (1977).
- [13] N. Papanikolaou. Nucl. Phys. B **305**, 367 (1988).
- [14] Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, Ph.N. Klevets. JMMM **325**, 125 (2013). <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2012.08.027>
- [15] Yu.A. Fridman, O.A. Kosmachev, A.K. Kolezhuk, B.A. Ivanov. Phys. Rev. Lett. **106**, 097202 (2011). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.097202>
- [16] O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman, E.G. Galkina, B.A. Ivanov. JETPh **120**, 2, 281(2015).
- [17] O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman, B.A. Ivanov. JETP Letters, **105**, 7, 453 (2017). <https://doi.org/10.7868/S0370274X17070074>
- [18] E.G. Galkina, B.A. Ivanov, O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman. Low Temp. Phys. **41**, 5, 382 (2015). <https://doi.org/10.1063/1.4921470>
- [19] A. Läuchli, F. Mila, K. Penc. Phys. Rev. Lett. **97**, 087205 (2006). <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.97.087205>

- [20] A. Smerald, N. Shannon. Phys. Rev. B **88**, 184430 (2013).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.88.184430>
- [21] E.L. Nagaev, Magnets with Complex Exchange Interactions [In Russian] (Moscow, Naika, 1988).
- [22] A.A. Zvyagin, V.V. Slavin. Phys. Rev. B. **106**, 054429 (2022).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.106.054429>
- [23] F. Mila. Physics. **10**, 64 (2017).
- [24] R. Nath, A.A. Tsirlin, H. Rosner, C. Geibel. Phys. Rev. B. **78**, 064422 (2008). <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.78.064422>
- [25] M. Yoshida, K. Nawa, H. Ishikawa, M. Takigawa, M. Jeong, S. Krämer, M. Horvatić, C. Berthier, K. Matsui, T. Goto, S. Kimura, T. Sasaki, J. Yamaura, H. Yoshida, Y. Okamoto, Z. Hiroi. Phys. Rev. B. **96**, 180413(R) (2017).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.96.180413>
- [26] A. Orlova, E.L. Green, J.M. Law, D.I. Gorbunov, G. Chanda, S. Krämer, M. Horvatić, R.K. Kremer, J. Wosnitza, G.L.J.A. Rikken. Phys. Rev. Lett. **118**, 247201 (2017).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.118.247201>
- [27] K.Y. Povarov, V.K. Bhartiya, Z. Yan, A. Zheludev. Phys. Rev. B. **99**, 024413 (2019).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.99.024413>
- [28] V.K. Bhartiya, K.Y. Povarov, D. Blosser, S. Bettler, Z. Yan, S. Gvasaliya, S. Raymond, E. Ressouche, K. Beauvois, J. Xu, F. Yokaichiya, A. Zheludev. Phys. Rev. Research. **1**, 033078 (2019). <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033078>
- [29] F. Landolt, S. Bettler, Z. Yan, S. Gvasaliya, A. Zheludev, S. Mishra, I. Sheikin, S. Krämer, M. Horvatić, A. Gazizulina, O. Prokhnenco. Phys. Rev. B. **102**, 094414 (2020).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.102.094414>
- [30] K.M. Ranjith, F. Landolt, S. Raymond, A. Zheludev, M. Horvatić. Phys. Rev. B. **105**, 134429 (2022).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.134429>
- [31] N. Büttgen, K. Nawa, T. Fujita, M. Hagiwara, P. Kuhns, A. Prokofiev, A.P. Reyes, L.E. Svistov, K. Yoshimura, M. Takigawa. Phys. Rev. B **90**, 134401 (2014).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.90.134401>
- [32] D. Flavián, S. Hayashida, L. Huberich, D. Blosser, K.Yu. Povarov, Z. Yan, S. Gvasaliya, A. Zheludev. Phys. Rev. B. **101**, 224408 (2020).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.101.224408>
- [33] J.A.M. Huhtamäki, T.P. Simula, M. Kobayashi, K. Machida. Phys. Rev. A **80**, 051601(R) (2009).  
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.051601>
- [34] O. Morsch, M. Oberthaler. Rev. Mod. Phys. **78**, 179 (2006).  
<https://doi.org/10.1103/RevModPhys.78.179>
- [35] Ya.Yu. Matyunina, O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman. Physics of Metals and Metallography, **125**, 5, 463 (2024).
- [36] O.A. Kosmachev, Yu.A. Fridman, E.A. Yarygina. JMMM, **622**, 172958 (2025). <https://doi.org/10.1016/j.jmmm.2025.172958>
- [37] T. Morija. Phys.Rev. **117**, 3, 635 (1960).
- [38] V.V. Val'kov. Theor. Math. Phys. **76**, 1, 766 (1988).

Редактор Т.Н. Василевская