

11,12

Модифицированный метод Монте-Карло с алгоритмом термостата для модельных ортоникелатов

© В.С. Рюмшин¹, Ю.Д. Панов¹, В.А. Улитко¹, А.С. Москвин^{1,2}

¹ Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Россия

² Институт физики металлов УрО РАН, Екатеринбург, Россия

E-mail: vitaliy.rumshin@urfu.ru

Поступила в Редакцию 6 марта 2025 г.

В окончательной редакции 6 марта 2025 г.

Принята к публикации 5 мая 2025 г.

Приведены результаты численного моделирования в рамках модифицированного метода Монте-Карло с алгоритмом термостата для псевдоспиновой модели редкоземельных ортоникелатов. Построены температурные фазовые диаграммы для различных степеней заполнения и при различных параметрах модели, исследовано влияние локальных корреляций на критические температуры модельного никелата. Показана возможность детектирования фазово неоднородных состояний. Результаты численного моделирования показывают хорошее качественное согласие с аналитическими результатами в методе среднего поля.

Ключевые слова: редкоземельные ортоникелаты, метод Монте-Карло, приближение среднего поля.

DOI: 10.61011/FTT.2025.07.61199.28NN-25

1. Введение

Ортоникелаты $RNiO_3$ (R — редкоземельный элемент или Y) демонстрируют многообразие физических свойств, таких как переход металл-изолятор, необычное поведение проводимости, неколлинеарные магнитные структуры и т.д. Эти соединения представляют большой интерес как с фундаментальной, так и с прикладной точки зрения и являются объектом интенсивных экспериментальных и теоретических исследований уже много лет [1–4]. Никелаты принадлежат к большому семейству ян-теллеровских магнетиков, однако снятие орбитального вырождения в них происходит за счет анти-ян-теллеровского диспропорционирования, что является экспериментально доказанным фактом [5,6]. Этот же механизм связывают с переходом металл-изолятор, который также сопровождается структурным фазовым переходом в никелатах за исключением $LaNiO_3$, который остается металлическим.

Ранее в рамках приближения среднего поля, а также классического метода Монте-Карло (МК) с кинематическим учетом постоянства концентрации бозонов, нами был исследован двумерный аналог зарядово диспропорционированной фазы редкоземельных никелатов $RNiO_3$ с локальным базисом в виде квартета состояний, состоящим из синглета Ni^{4+} и триплета Ni^{2+} [7,8]. В настоящей работе обсуждаются результаты моделирования с помощью алгоритма термостата в рамках метода МК для трехмерного модельного ортоникелата с локальным базисом из октета состояний различных зарядовых состояний октаэдра NiO_6 . В частности, мы исследуем влияние локальных зарядовых корреляций на

поведение чистых фаз, для которых отличен от нуля только один параметр порядка. Кроме того, как и в приближении среднего поля и моделировании классическим МК, наблюдается тенденция к фазовому расслоению, а также наличие областей неустойчивости фазы антиферромагнитного изолятора и бозонной сверхтекучей жидкости.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 кратко сформулирована используемая модель и приведены некоторые основные результаты приближения среднего поля. В разделе 3 описан модифицированный алгоритм термостата метода МК, и в разделе 4 приводятся результаты численного моделирования и их сравнение с результатами среднего поля. Краткие выводы сформулированы в разделе 5.

2. Модель и приближение среднего поля

В работах [9,10] для описания электронной структуры и фазовых диаграмм ортоникелатов предложена обобщенная модель эффективных зарядовых триплетов, в которой низкоэнергетическое состояние неискаженных октаэдров NiO_6 образовано зарядовым триплетом $[NiO_6]^{10-,9-,8-}$ (номинально $Ni^{2+,3+,4+}$) с различными спиновыми и орбитальными основными состояниями. Волновую функцию октаэдра обозначим $|\Sigma M; \Gamma \gamma; S m\rangle$ где ΣM — зарядовый псевдоспин и его проекция, $\Gamma \gamma$ — орбитальное состояние (Γ — неприводимое представление точечной группы O_h и его строка), $S m$ — величина и проекция обычного спина. Состояние $[NiO_6]^{8-}$ — синглет $|11; A_{1g}1; 00\rangle$, $[NiO_6]^{9-}$ — спин-орбитальный

квартет $|10; E_g 0; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle$, $|10; E_g 2; \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\rangle$, $[\text{NiO}_6]^{10-}$ — спиновый триплет $|1-1; A_{2g} 1; 10\rangle$, $|1-1; A_{2g} 1; 1 \pm 1\rangle$.

Оставляя только локальные (U) и нелокальные (V) зарядовые корреляции, парный перенос (t) и билинейный изотропный сверхобмен (J) и ограничиваясь взаимодействием с ближайшими соседями, запишем упрощенный гамильтониан модели:

$$\hat{H} = \frac{U}{2} \sum_i \hat{\Sigma}_{z,i}^2 - t \sum_{\langle ij \rangle m} (\hat{B}_{m,i}^+ \hat{B}_{m,j} + \hat{B}_{m,j}^+ \hat{B}_{m,i}) + V \sum_{\langle ij \rangle} \hat{\Sigma}_{z,i} \hat{\Sigma}_{z,j} + J \sum_{\langle ij \rangle} \hat{\mathbf{S}}_i \hat{\mathbf{S}}_j. \quad (1)$$

В гамильтониане (1) $\hat{\Sigma}_z$ — оператор псевдоспина, $\hat{\mathbf{S}}$ — оператор спина $S = 1$, а операторы рождения и уничтожения спин-триплетного бозона, $\hat{B}_{m,i}^+$ и $\hat{B}_{m,i}$ соответственно, являются аналогом операторов рождения и уничтожения в модели локальных (hard-core) бозонов [11]. Далее удобно перейти к декартовым компонентам для операторов $\hat{B}_{m,i}^+$ и $\hat{B}_{m,i}$ с помощью соотношений $\hat{B}_{m,i}^+ = \hat{B}_{xi}^m + i\hat{B}_{yi}^m$, и тогда соответствующее слагаемое примет вид

$$\hat{B}_{m,i}^+ \hat{B}_{m,j} + \hat{B}_{m,j}^+ \hat{B}_{m,i} = 2(\hat{B}_{xi}^m \hat{B}_{xj}^m + \hat{B}_{yi}^m \hat{B}_{yj}^m) = 2\hat{\mathbf{B}}_i^m \hat{\mathbf{B}}_j^m. \quad (2)$$

Воспользуемся неравенством Боголюбова для оценки большого термодинамического потенциала:

$$\Omega \leq \tilde{\Omega} = \Psi_0 + \langle \hat{H} - \hat{H}_0 - \mu \sum_i \hat{\Sigma}_{z,i} \rangle_0, \quad (3)$$

где Ψ_0 — свободная энергия идеальной системы и статистическое усреднение во втором слагаемом также проводится по состояниям идеальной системы. Слагаемое с химическим потенциалом μ позволяет учесть условие сохранения числа e_g -электронов в системе, которое мы запишем виде

$$-\Delta n = \frac{1}{N} \sum_i \langle \hat{\Sigma}_{z,i} \rangle. \quad (4)$$

Величина $\Delta n = 0$ при однородном заполнении решетки e_g -электронами соответствует состояниям узлов Ni^{3+} , а $\Delta n = -1$ и $+1$ — состояниям Ni^{4+} и Ni^{2+} .

Введем подрешетки A и B по типу шахматной доски, и выберем гамильтониан идеальной системы $\hat{H}_0$, в котором взаимодействие кластера с окружением описывается с помощью молекулярных полей, действующих на этот кластер, в следующем виде:

$$\hat{H}_0 = \sum_i \hat{H}_{0,i}, \quad (5)$$

$$\hat{H}_{0,i} = \frac{U}{2} \sum_i \hat{\Sigma}_{z,i}^2 - \varphi_{\lambda(i)} \hat{\Sigma}_{z,i} - \sum_m \mathbf{f}_{\lambda(i)}^m \hat{\mathbf{B}}_{m,i} - \mathbf{g}_{\lambda(i)} \hat{\mathbf{S}}_i. \quad (6)$$

Здесь индекс $\lambda(i) = A$ или B , если узел i принадлежит подрешетке A или B . Молекулярные поля φ_λ , $\mathbf{f}_\lambda^m$, $\mathbf{g}_\lambda$ являются вариационными параметрами для минимизации оценки большого термодинамического потенциала:

$$\frac{2\tilde{\Omega}}{N} = \sum_\lambda \psi_{0\lambda} - 2zt \sum_m \mathbf{B}_A^m \mathbf{B}_B^m + zV \Sigma_A \Sigma_B + zJS_A \mathbf{S}_B + \sum_\lambda (\psi_\lambda - \mu) \Sigma_\lambda + \sum_{\lambda,m} \mathbf{f}_\lambda^m \mathbf{B}_\lambda^m + \sum_\lambda \mathbf{g}_\lambda^m \mathbf{S}_\lambda. \quad (7)$$

Здесь z — координационное число (для простой кубической решетки $z = 6$),

$$\psi_{0\lambda(i)} = -\frac{1}{\beta} \ln(e^{-\beta \hat{H}_{0,i}}), \quad (8)$$

$$\Sigma_\lambda = -\frac{\partial \psi_{0\lambda}}{\partial \psi_\lambda}, \quad \mathbf{B}_\lambda^m = -\frac{\partial \psi_{0\lambda}}{\partial \mathbf{f}_\lambda^m}, \quad \mathbf{S}_\lambda = -\frac{\partial \psi_{0\lambda}}{\partial \mathbf{g}_\lambda}, \quad (9)$$

где $\beta = 1/(k_B T)$, и мы полагаем $k_B = 1$.

Необходимое условие минимума для $\tilde{\Omega}$ приводит к уравнениям для молекулярных полей:

$$\varphi_\lambda = \mu - zV \Sigma_{\bar{\lambda}}, \quad \mathbf{f}_\lambda^m = 2zt \mathbf{B}_{\bar{\lambda}}^m, \quad \mathbf{g}_\lambda = -JS_{\bar{\lambda}}, \quad (10)$$

где $\bar{\lambda}$ — означает подрешетку, дополнительную к λ . Для получения зависимостей термодинамических параметров от Δn необходимо исключить химический потенциал с помощью уравнения

$$\Sigma_A + \Sigma_B = -2\Delta n. \quad (11)$$

Для высокотемпературной неупорядоченной (NO) фазы минимум $\tilde{\Omega}$ достигается при $\varphi_\lambda = \mathbf{f}_\lambda^m = \mathbf{g}_\lambda = 0$. Условие потери устойчивости минимума NO фазы позволяет найти критическую температуру фазового перехода 2-го рода.

Явные аналитические выражения для величин в формуле (9) возможно получить в некоторых частных случаях. Зарядово-упорядоченную (CO) фазу с параметром порядка $l = (\Sigma_A - \Sigma_B)/2$ определяет частное решение вида

$$\varphi_A \neq \varphi_B, \quad \mathbf{f}_\lambda^m = 0, \quad \mathbf{g}_\lambda = 0. \quad (12)$$

В этом случае

$$\psi_{0\lambda} = -\frac{1}{\beta} \ln[4 + e^{-\beta U/2} (e^{\beta \varphi_\lambda} + 3e^{-\beta \varphi_\lambda})], \quad (13)$$

$$\Sigma_\lambda(\varphi_\lambda) = \frac{e^{\beta \varphi_\lambda} - 3e^{-\beta \varphi_\lambda}}{4e^{\beta U/2} + e^{\beta \varphi_\lambda} + 3e^{-\beta \varphi_\lambda}}, \quad (14)$$

$$\mathbf{B}_\lambda^m = 0, \quad \mathbf{S}_\lambda = 0. \quad (15)$$

Уравнение для критической температуры T_{CO}

$$zV \Sigma'_\lambda(\varphi) = 1 \quad (16)$$

при условии $\Sigma_\lambda(\varphi) = -\Delta n$ позволяет построить зависимость $T_{CO}(\Delta n)$.

Для антиферромагнитной (AFM) фазы с параметром порядка $L = (S_{z,A} - S_{z,B})/2$ рассмотрим частное решение

$$\varphi_\lambda = \varphi, \quad \mathbf{f}_\lambda^m = 0, \quad \mathbf{g}_\lambda = (0, 0, g_\lambda). \quad (17)$$

Тогда $\mathbf{S}_\lambda = (0, 0, S_{z,\lambda})$, $\mathbf{B}_\lambda^m = 0$,

$$\psi_{0\lambda} = -\frac{1}{\beta} \ln \{ 4 + e^{-\beta U/2} [e^{\beta\varphi} + (1 + 2ch(\beta g_\lambda))e^{-\beta\varphi}] \}, \quad (18)$$

$$\Sigma_\lambda(\varphi, g_\lambda) = \frac{e^{\beta\varphi} - [1 + 2ch(\beta g_\lambda)]e^{-\beta\varphi}}{4e^{\beta U/2} + e^{\beta\varphi} - [1 + 2ch(\beta g_\lambda)]e^{-\beta\varphi}}, \quad (19)$$

$$S_{z,\lambda}(\varphi, g_\lambda) = \frac{2sh(\beta g_\lambda)e^{-\beta\varphi}}{4e^{\beta U/2} + e^{\beta\varphi} + [1 + 2ch(\beta g_\lambda)]e^{-\beta\varphi}}. \quad (20)$$

Соответствующее уравнение для критической температуры T_{AFM} имеет вид

$$zJ \frac{\partial S_{z,\lambda}(\varphi, 0)}{\partial g_\lambda} = 1. \quad (21)$$

Для фазы, которую по аналогии с моделью локальных (hard-core) бозонов [11] можно назвать фазой сверхтекучей бозе-жидкости (BS) с параметром порядка $\mathbf{B}_\lambda^m \neq 0$, можно рассмотреть решения

$$\varphi_\lambda = \varphi, \quad \mathbf{f}_\lambda^m = (f^m, 0), \quad \mathbf{g}_\lambda = 0. \quad (22)$$

В этом случае $\mathbf{S}_\lambda = 0$, $\mathbf{B}_\lambda^m = (B_\lambda^m, 0)$,

$$\psi_{0\lambda} = -\frac{1}{\beta} \ln \{ 4 + 2e^{-\beta U/2} [e^{-\beta\varphi} + ch(\beta\xi)] \}, \quad (23)$$

где $\xi(\varphi, f) = \sqrt{\varphi^2 + \frac{1}{4}f^2}$, $f^2 = \Sigma_m(f^m)^2$,

$$\Sigma_\lambda(\varphi, f) = \frac{\varphi sh(\beta\xi) - \xi e^{-\beta\varphi}}{\xi[2e^{\beta U/2} + e^{-\beta\varphi} + ch(\beta\xi)]}, \quad (24)$$

$$B_\lambda^m(\varphi, f) = \frac{f^m sh(\beta\xi)}{4\xi[2e^{\beta U/2} + e^{-\beta\varphi} + ch(\beta\xi)]}. \quad (25)$$

Уравнение для критической температуры T_{BS} имеет вид

$$2zt \frac{\partial B_\lambda^m(\varphi, 0)}{\partial f} = 1. \quad (26)$$

3. Алгоритм термостата метода Монте-Карло

Для численного моделирования мы используем алгоритм термостата метода МК [12]. По сравнению с классическим вариантом, основанном на алгоритме Метрополиса и предполагающего непрерывное изменение наблюдаемых или состояния на узлах системы [7], квантовый характер изменения состояния в элементарном шаге МК в используемом нами варианте алгоритма термостата устраняет расходимость теплоемкости при низких температурах. К недостаткам алгоритма термостата можно отнести высокую трудоемкость элементарного шага МК, связанную с необходимостью решения

задачи на собственные значения для гамильтониана на узле.

Опишем кратко алгоритм термостата для модели (1). Запишем волновую функцию системы в виде произведения волновых функций на узлах:

$$|\Psi\rangle = \prod_c |\psi_c\rangle, \quad |\psi_c\rangle = \sum_{M\Gamma\gamma S_m} a_{M\Gamma\gamma m}^c |1M; \Gamma\gamma; S_m\rangle. \quad (27)$$

Построим гамильтониан узла c , усредняя по состояниям всех узлов $c' \neq c$:

$$\hat{H}_c = \langle \tilde{\Psi}_c | \hat{H} | \Psi_c \rangle, \quad |\Psi_c\rangle = \prod_{c' \neq c} |\psi_{c'}\rangle. \quad (28)$$

Для модели (1) получим

$$\begin{aligned} \hat{H}_c = & \frac{U}{2} \hat{\Sigma}_z^2 - \mu \hat{\Sigma}_z - t \sum_{c', m} (\langle \hat{B}_m^+ \rangle_{c'} \hat{B}_m + \langle \hat{B}_m \rangle_{c'} \hat{B}_m^+) \\ & + V \sum_{c'} \langle \hat{\Sigma}_z \rangle_{c'} \hat{\Sigma}_z + J \sum_{c'} \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle_{c'} \hat{\mathbf{S}}. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь величины $\langle \hat{A} \rangle_{c'} = \langle \psi_{c'} | \hat{A} | \psi_{c'} \rangle$ выступают в роли внешних полей, действующих на узел c со стороны узла c' , и предполагается суммирование по ближайшим к узлу c соседям. Также добавлено слагаемое с химическим потенциалом, которое позволяет в дальнейшем получить зависимости термодинамических функций от $\Delta\mu$.

Изменение состояния узла реализуем по алгоритму термостата. Для этого на узле решаем задачу на собственные значения:

$$\hat{H}_c |\psi_{c,n}\rangle = \varepsilon_n |\psi_{c,n}\rangle, \quad (30)$$

определяем вероятности состояний и строим функцию распределения:

$$p_n = \frac{e^{-\beta\varepsilon_n}}{\sum_m e^{-\beta\varepsilon_m}}, \quad F(n) = \sum_{m=1}^n p_m, \quad (31)$$

и используя случайную равномерно распределенную на интервале (0,1) величину ξ , определяем номер нового состояния узла c из уравнения:

$$\xi = F(n). \quad (32)$$

Далее, статистику по шагам МК собираем стандартным образом.

4. Сравнение результатов численного моделирования и приближения среднего поля

На рис. 1 приведены критические температуры перехода из неупорядоченной фазы в CO, AFM и BS фазы модельного никелата. Здесь параметр локальных корреляций $U = 0$, что отличается от рассмотренной

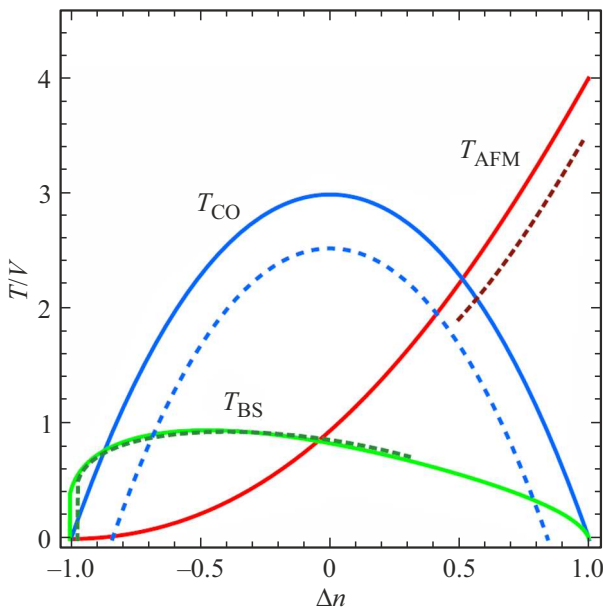


Рис. 1. Зависимости критических температур при $z = 6$, $V = 1$, $J = 1$, $t = 1$, $U = 0$. Сплошные линии — среднее поле, пунктир — моделирование МК.

ранее в работах [7,8] ситуации с $U = -\infty$. Результаты моделирования показывают характерное занижение T_{CO} по сравнению со значением в методе среднего поля. Однако, следует обратить внимание, в отличие от классического метода МК нет уменьшения значений критических температур на порядок. Это связано, по-видимому, с качественно более адекватным характером учета температурных флуктуаций в представленном алгоритме. Обрыв кривых для T_{AFM} при $\Delta n \simeq 0.5$ и T_{BS} при $\Delta n \simeq 0.3$ соответствует началу области неустойчивости этих фаз. Возможность определения границ этой области также является особенностью данного метода: определенные значения Δn оказываются недостижимы при всех задан-

ных значениях химического потенциала μ . Устойчивость этих фаз подробнее будет рассмотрена ниже.

При $U > 0$ (рис. 2, а) T_{CO} начинает плавно уменьшаться. Последовательное увеличение U до 4 (Рис. 2, б) вызывает появление плато вблизи половинного заполнения $\Delta n = 0$, что говорит о возникновении фазового перехода первого рода. Дальнейшее увеличение U до 6 (рис. 2, в) оставляет при половинном заполнении только неупорядоченную фазу.

На рис. 3 представлена зависимость T_{CO} при $\Delta n = 0$ в переменных $T - V$. Результаты вычислений в рамках метода среднего поля, уравнение (16), предсказывают линейную зависимость $T_{CO}(V)$, в то время как моделирование МК дает ожидаемо заниженный результат. Как и в среднем поле, фазовый переход второго рода наблюдается при $V/U > 0.5$, а фазовый переход первого рода в диапазоне $0.25 < V/U < 0.4$.

На рис. 4 показано постепенное уменьшение T_{BS} при увеличении U до 4, при котором происходит существенное подавление BS фазы. Пунктирными линиями показаны границы областей термодинамической устойчивости, которые сходятся при $\Delta n \simeq 0.6$ при понижении температуры для ситуаций с $U = 0, 1$ и 2. В случае $U = 2$ BS фаза разбивается на 2 части, каждая из которых, в свою очередь, имеет области неустойчивости. При $U = 4$ остается лишь небольшой островок BS фазы в интервале $-1 < \Delta n < 0.7$. Далее BS фаза становится неустойчивой, что означает появление неупорядоченной фазы либо области фазового расслоения. Аналогичная ситуация наблюдается и для AFM фазы (рис. 5) ее существование возможно в интервале $0.5 < \Delta n < 1$. Эти результаты согласуются с тем, что было получено в рамках среднего поля и моделирования классическим МК [7].

Одна из возможных фазовых диаграмм модельного никелата приведена на рис. 6. Здесь можно отчетливо наблюдать появление двух областей фазового расслоения: CO+BS в диапазоне $-0.6 < \Delta n < 0$ и CO+AFM в диапазоне $0 < \Delta n < 0.9$. Между ними последовательно

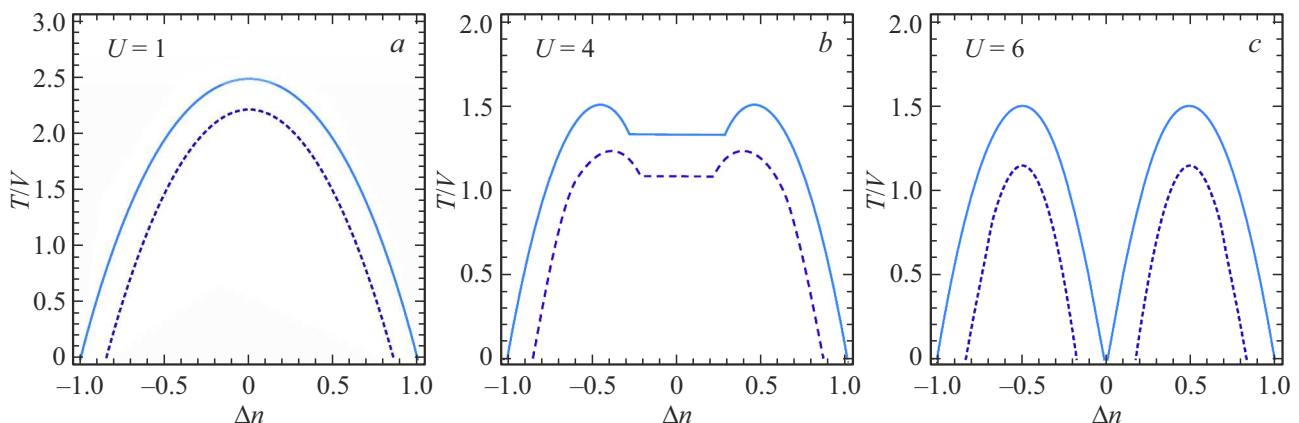


Рис. 2. Зависимости критических температур NO-CO при $V = 1$, $J = 0$, $t = 0$. Сплошные линии — среднее поле, пунктир — моделирование МК.

расположены BS, CO и AFM фазы. Результаты показывают, что для основного состояния, также как и в приближении среднего поля, BS и AFM фазы реализуются вблизи малых и больших значений n , а CO фаза существует при конечных температурах для данных параметров модели.

Сравнение полученных фазовых диаграмм при половинном заполнении $\Delta n = 0.5$ показывает, что результаты моделирования верно предсказывают переход NO-CO на качественном уровне. Однако, при дальнейшем понижении температуры, при определенных параметрах модели, возможно лишь сохранение CO фазы, либо переход в BS фазу.

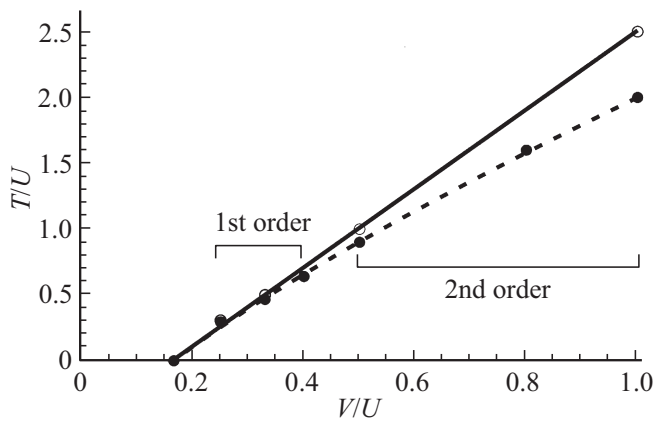


Рис. 3. Зависимость температуры перехода NO-CO от параметра нелокальных корреляций. Сплошная линия — среднее поле, пунктир — моделирование МК.

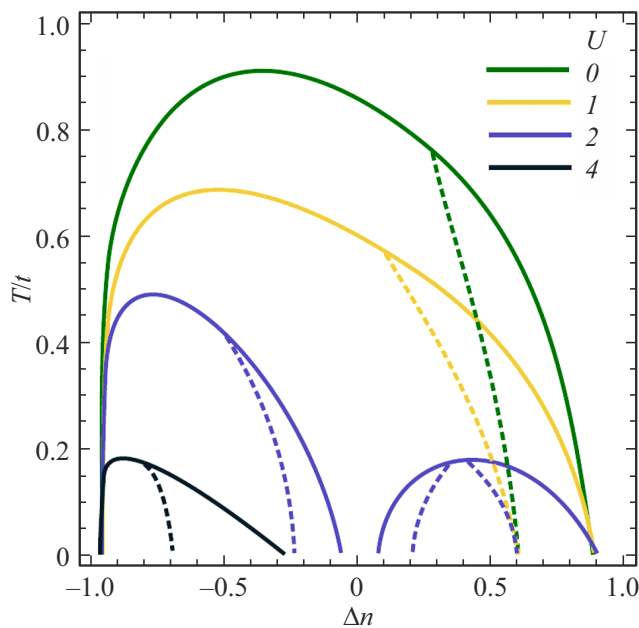


Рис. 4. Зависимости критических температур NO-B. Пунктирные линии показывают границы устойчивости однородной фазы.

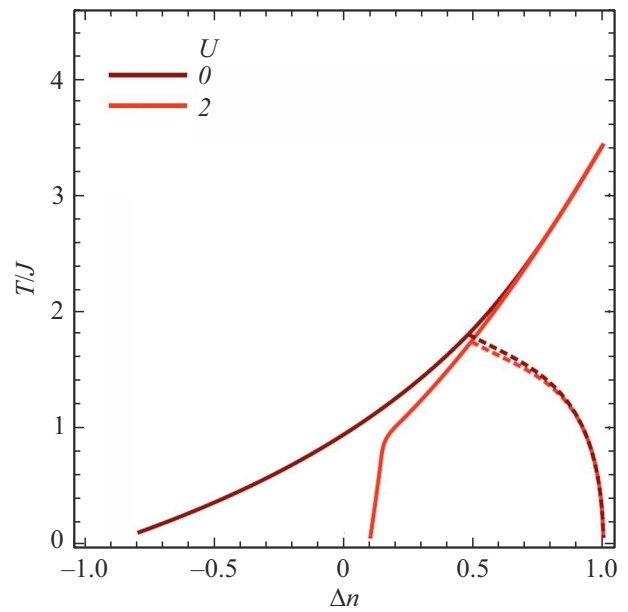


Рис. 5. Зависимости критических температур NO-AFM. Пунктирные линии показывают границы устойчивости однородной фазы.

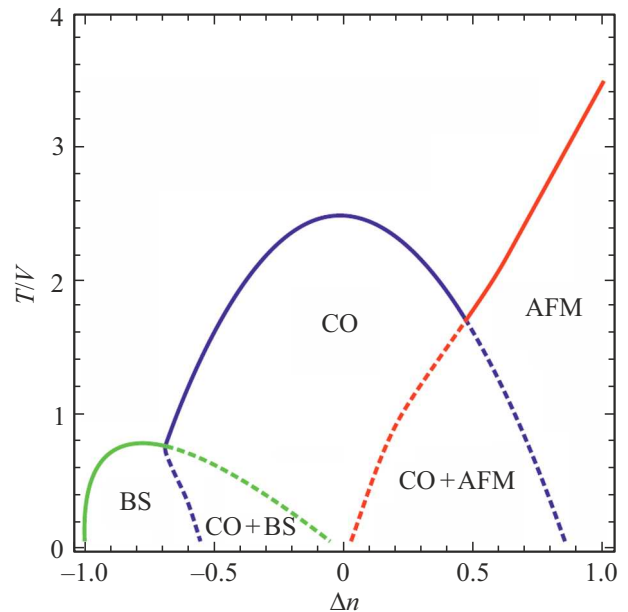


Рис. 6. Фазовая диаграмма модельного никелата при $V = 1$, $J = 1$, $t = 1$, $U = 0$. Пунктир — границы областей фазового расслоения CO+BS и CO+AFM.

5. Заключение

Результаты численного моделирования в рамках модифицированного метода Монте-Карло с алгоритмом термостата показывают хорошее качественное согласие с результатами среднего поля для тех простых решений, когда могут быть получены аналитические выражения. Это позволяет использовать данный численный ме-

тод для анализа свойств фазовых состояний в более сложных ситуациях, когда аналитическое решение недоступно. В работе построены температурные фазовые диаграммы для псевдоспиновой модели редкоземельных ортоникелатов при различных значениях параметра локальных зарядовых корреляций. Показано, что модель предсказывает разнообразные типы фазовых переходов, а также существование неоднородных фазовых состояний при различных значениях параметров.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-22-00196.

Конфликт интересов

Авторы сообщают об отсутствии конфликта интересов.

Список литературы

- [1] D.J. Gawryluk, Y.M. Klein, T. Shang, D. Sheptyakov, L. Keller, N. Casati, P. Lacorre, M.T. Fernandez-Diaz, J. Rodriguez-Carvajal, M. Medarde. *Physical Review B* **100**, 20, 205137 (2019).
- [2] S. Catalano, M. Gibert, J. Fowlie, J. Íñiguez, J.M. Triscone, and J. Kreisel. *Reports on Progress in Physics* **81**, 4, 046501 (2018).
- [3] M.L. Medarde. *J. Phys. Condens. Matter* **9**, 8, 1679 (1997).
- [4] Y.M. Klein, M. Kozłowski, A. Linden, Ph. Lacorre, M. Medarde, D.J. Gawryluk. *Crystal Growth & Design* **21**, 7, 4230 (2021).
- [5] J.A. Alonso, J.L. García-Muñoz, M.T. Fernández-Díaz, M.A.G. Aranda, M.J. Martínez-Lope, M.T. Casais. *Physical Review Letters* **82**, 19, 3871 (1999).
- [6] J.A. Alonso, M.J. Martínez-Lope, M.T. Casais, J.L. García-Muñoz, M.T. Fernández-Díaz. *Physical Review B* **61**, 3, 1756 (2000).
- [7] Ю.Д. Панов, С.В. Нужин, В.С. Рюмшин, А.С. Москвин. *Физика твердого тела* **66**, 7, 1221 (2024).
- [8] В.С. Рюмшин, С.В. Нужин, Ю.Д. Панов, А.С. Москвин. *Физика твердого тела* **66**, 7, 1047 (2024).
- [9] A.S. Moskvín. *Magnetochemistry* **9**, 11, 1 (2023).
- [10] А.С. Москвин. *Журнал Экспериментальной и теоретической физики* **167**, 3, 412 (2025).
- [11] R. Micnas, J. Ranninger, S. Robaszkiewicz. *Rev. Mod. Phys.* **62**, 1, 113 (1990).
- [12] Y. Miyatake, M. Yamamoto, J.J. Kim, M. Toyonaga, O. Nagai. *Journal of Physics C: Solid State Physics* **19**, 14, 2539 (1986).

Редактор Т.Н. Василевская