

12,14

Аналитический расчет автоколебательной динамики продвижения шейки в полимерах

© А.А. Чеврычкина¹, А.Л. Корженевский^{1,¶}

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт Проблем Машиноведения РАН, Санкт-Петербург, Россия

[¶]E-mail:alekorzh@mail.ru

Поступила в Редакцию 21 апреля 2025 г.

В окончательной редакции 14 июля 2025 г.

Принята к публикации 15 июля 2025 г.

Предложен метод аналитического расчета параметров автоколебаний напряжения, температуры и скорости продвижения шейки в полимерной пленке, растягиваемой с заданной постоянной скоростью. Показано, что в наиболее распространенном случае, когда для генерации автоколебаний необходима большая податливость образца, динамика автоколебаний может быть описана обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнением типа обобщенного уравнения Льенара. Выявлена точная связь между нестационарной динамикой фронта шейки полимерной пленки и продвижением фронта стекло-кристалл при вынужденной взрывной кристаллизации.

Ключевые слова: автоколебания пленки полимера, тепловая модель, вывод обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения.

DOI: 10.61011/FTT.2025.07.61175.88-25

1. Введение

Существование режима автоколебаний фронта шейки (ФШ) полимеров в ходе процесса холодной вытяжки было обнаружено в независимых работах [1–3]. Первая теоретическая модель [4] объясняла этот динамический эффект наличием положительной обратной связи, ведущей к термомеханической неустойчивости.

В многочисленных последующих экспериментах были тщательно изучены условия, необходимые для возникновения эффекта, в зависимости от заданных значений скорости деформации, температуры, размеров и геометрии образцов, а также податливости экспериментальной установки [5–31]. Было установлено, что эффект наблюдается в ряде полимеров, обладающих качественно отличающейся исходной внутренней структурой. В большинстве материалов он сопровождается повышением температуры на несколько десятков градусов в узкой зоне ФШ. Сопутствующим фактором является возникновение пор, концентрация которых может быть значительной. Внутри области автоколебаний было обнаружено наличие точек бифуркаций, при прохождении через которые период автоколебаний менялся в кратное число раз.

По сравнению с обширным набором накопленных экспериментальных данных прогресс в теоретических исследованиях носил гораздо более ограниченный характер. Дальнейшее развитие заведомо сильно упрощенной модели [4] было проведено в работах [12,14,25,26]. Вместе с тем в них сохранялось основное предположение о доминирующем влиянии тепловой положительной

обратной связи для возникновения автоколебательного режима, известное как „тепловая“ модель (ТМ).

При этом сильная нелинейность устоявшейся к настоящему времени версии ТМ, привела к тому, что в ее рамках аналитически удалось рассчитать лишь стационарный режим движения ФШ [12,25], в то время как расчет границы его области неустойчивости был проведен непоследовательно, что привело к неверному определению ее положения в [22] (см. формулу (4) в [22]).

Для количественных же расчетов нелинейной стадии продвижения фронта, а также временных зависимостей напряжения и температуры на нем, приходилось использовать исключительно численные методы [19,20]. Результаты последних безусловно полезны при сравнении с данными, полученными для конкретного полимера при фиксированных параметрах проведения эксперимента, но они мало что могут сказать об универсальной применимости или неприменимости ТМ в целом в силу большого количества входящих в нее исходных параметров.

Что касается альтернативного предположения о ведущей роли в возникновении автоколебательного режима формирования полос сдвига и пор в их окрестности, то адекватной ему математической модели вплоть до настоящего времени предложено не было [31]. В настоящей статье мы не будем рассматривать автоколебаний, обусловленных нетепловыми механизмами.

Из всего сказанного выше ясно, что глубокое понимание совокупности имеющихся экспериментальных результатов и стоящих за ними механизмов, тормозится отсутствием аналитических расчетов нестационарной динамики продвижения шейки, с которыми можно было

бы провести количественное сравнение экспериментальных данных. Очевидно, что проведение таких расчетов будет полезно также и для интерпретации результатов, полученных чисто компьютерным путем.

В настоящей работе мы покажем, что в наиболее типичной экспериментальной ситуации, когда для возбуждения автоколебаний необходимо искусственно увеличивать податливость системы, динамику ТМ можно с хорошей точностью описать обыкновенным дифференциальным уравнением для нелинейного осциллятора, обладающего отрицательным трением. Коэффициенты этого осциллятора, содержащего переменную эффективную массу и силу трения, удастся полностью выразить через параметры, известные экспериментально.

2. Формулировка модели

„Каноническая“ ТМ полимерной пленки описывается системой, состоящей из 3-х уравнений [12,13]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \Gamma(T - T_0) + \frac{\lambda - 1}{\rho c} \sigma(V, T) V(t) \delta(x - X(t)), \quad (1)$$

$$\dot{\sigma} = \frac{V_p - (\lambda - 1)V}{D}, \quad (2)$$

$$V = V_0 \exp\left(\frac{a\sigma - U}{RT}\right). \quad (3)$$

В уравнении теплопроводности (1) $T(x, t)$ — локальная температура пленки, T_0 — температура окружающей среды, σ — упругое напряжение, $V(t) \equiv \dot{X}(t)$ — скорость ФШ, $X(t)$ — координата ее текущего положения, η — коэффициент температуропроводности, Γ — коэффициент теплоотдачи пленки во внешнюю среду, ρ и c — плотность и теплоемкость, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака. Моделирование источника в уравнении (1) этой функцией отражает тот экспериментальный факт, что ширина переходной зоны выделения тепла много меньше, чем остальные длины задачи.

Уравнение (2) выражает условие, что сумма скоростей деформации упругой (неориентированной) части пленки и ее пластически деформированной (ориентированной) части равна заданной постоянной скорости растяжения V_p . В (2) точкой вверху над напряжением $\sigma(t)$ обозначено дифференцирование по времени t , коэффициент D — упругая податливость системы машина + образец (для „жесткой“ машины $D = L/E$, где L — длина пленки, E — модуль упругости), коэффициент λ описывает степень вытяжки полимера в шейке. Его значение, так же, как и величина свободного объема a в уравнении (3), заметно растет с температурой после разогрева пленки за точку стеклования, но для упрощения формул будем считать λ и a постоянными параметрами, а вопроса о влиянии их температурной зависимости кратко коснемся в конце статьи.

Феноменологическое уравнение (3) описывает скорость пластической деформации, выбранную в виде формулы Аррениуса.

3. Переход к безразмерным переменным и параметрам

Для упрощения вида формул в последующих расчетах, а также для большей наглядности полученных ниже общих результатов и выявления малых параметров, целесообразно использовать ряд безразмерных параметров и функций.

Введем безразмерные координату $\tilde{x}$, время $\tilde{t}$, напряжение и температуру:

$$\tilde{x} = \frac{x}{\frac{4\eta}{V_s}}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{\frac{4\eta}{V_s^2}}, \quad \tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_s}, \quad \tilde{T} = \frac{T}{T_s}. \quad (4)$$

Тогда безразмерная скорость $\tilde{V} = \frac{V}{V_s}$, где $V_s = \frac{V_p}{\lambda - 1}$ — скорость ФШ в стационарном режиме.

Введем также безразмерные параметры:

$$\alpha = C \frac{\sigma_s}{T_s} \ln\left(\frac{V_0}{V_s}\right) \sqrt{\beta}, \quad \beta = \frac{V_s^2}{V_s^2 + 4\eta\Gamma}, \quad \gamma = a \frac{\sigma_s}{RT_s},$$

$$\delta = \frac{2\eta}{V_s\sigma_s} \frac{(\lambda - 1)}{D}, \quad \epsilon = \ln\left(\frac{V_0}{V_s}\right). \quad (5)$$

Система (1) в безразмерных переменных и параметрах (4), (5) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{T}} = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}^2} - \frac{1 - \beta}{\beta} \left(\tilde{T} - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) \right) \\ \quad + \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}} \tilde{\sigma} \tilde{V} \delta(\tilde{x} - \tilde{X}), \\ \dot{\tilde{\sigma}} = 2\delta(1 - \tilde{V}), \\ \ln(\tilde{V}) - \epsilon = \frac{\gamma\tilde{\sigma} - (\gamma + \epsilon)}{\tilde{T}}. \end{cases} \quad (6)$$

4. Подход к эффективному решению нестационарного уравнения теплопроводности в полимерах

Главная трудность, которая вплоть до настоящего времени препятствовала получению аналитических результатов для расчета нестационарной динамики системы (6), была обусловлена тем, что траектория $\tilde{X}(\tilde{t})$ продвижения ФШ заранее неизвестна, поэтому приходилось искать решение уравнения теплопроводности при произвольной динамике источника в (6)₁. Покажем, как эту трудность можно преодолеть и получить аналитическое решение системы (6) в том практически важном случае, когда для возбуждения автоколебаний необходимо уменьшать параметр δ . Как следует из (5), малый параметр δ соответствует большим значениям податливости и/или скорости растяжения, при которых обычно наблюдаются автоколебания.

Напишем решение уравнения теплопроводности (6₁) в виде свертки функции Грина с источником тепла. Температура на ФШ с координатой $\tilde{X}(\tilde{t})$ равна:

$$\begin{aligned} \tilde{T} - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) &= \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\tilde{t}} d\tilde{t}' G(\tilde{X}(\tilde{t}) - \tilde{X}(\tilde{t}'), \tilde{t} - \tilde{t}') \\ &\times \tilde{\sigma}(\tilde{V}(\tilde{t}'), \tilde{T}(\tilde{X}(\tilde{t}')))\tilde{V}(\tilde{t}'), \end{aligned} \quad (7)$$

где функция Грина определена как:

$$\begin{aligned} G(\tilde{X}(\tilde{t}) - \tilde{X}(\tilde{t}'), \tilde{t} - \tilde{t}') &= \frac{1}{\sqrt{\pi(\tilde{t} - \tilde{t}')}} \\ &\times \exp\left\{-\frac{1-\beta}{\beta}(\tilde{t} - \tilde{t}') - \frac{[\tilde{X}(\tilde{t}) - \tilde{X}(\tilde{t}')]^2}{(\tilde{t} - \tilde{t}')} \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

В правой части формулы (7) мы пренебрегли дополнительным вкладом, связанным с изменением температуры из-за разности скорости растяжения материала шейки и распространения ФШ. Простая оценка показывает, что относительная величина этого вклада равна $\frac{1-\beta}{4\beta(\lambda-1)}$ и составляет лишь несколько процентов при всех скоростях, кроме самых малых. Но в последнем случае разогрев пленки становится незначительным и использование активационной ТМ теряет смысл.

Подчеркнем, что формула (7) сама по себе еще не представляет реального решения задачи, т.к. временная траектория ФШ $\tilde{X}(\tilde{t})$ пока еще остается неизвестной, так что (7) — это интегральное уравнение.

Чтобы обойти эту принципиальную трудность, применим метод, впервые предложенный и использованный нами ранее для расчета динамики фронтов расплав–кристалл и кристалл–кристалл в разбавленных металлических сплавах при их быстрой направленной кристаллизации, а также для расчета динамики фронтов аморфный материал (стекло) — кристалл при направленной взрывной кристаллизации (ВК) [32–40].

Первым шагом этого метода является разложение в ряды Тейлора по времени всех величин, входящих в подынтегральное выражение в (7). В частности, для координаты ФШ имеем:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tilde{t}) - \tilde{X}(\tilde{t}') &= \tilde{V}(\tilde{t})(\tilde{t} - \tilde{t}') - \frac{1}{2}\dot{\tilde{V}}(\tilde{t})(\tilde{t} - \tilde{t}')^2 \\ &+ \frac{1}{6}\ddot{\tilde{V}}(\tilde{t})(\tilde{t} - \tilde{t}')^3 + \dots \end{aligned} \quad (9)$$

Преимуществом этого математического приема является то, что скорость, ускорение и все гиперускорения траектории ФШ в (7) оказываются взятыми в один и тот же фиксированный момент времени $\tilde{t}$ и не зависят от переменного времени интегрирования $\tilde{t}'$. С учетом (6₂) то же самое относится и к производным напряжения $\tilde{\sigma}(\tilde{t})$ по времени. Тем самым все они играют роль постоянных параметров и поэтому могут быть вынесены

за знак интеграла. Оставшиеся же под знаком интеграла функции достаточно просты. Из уравнений (7)–(9) очевидно, что они выражаются через Гамма-функции (с аргументами $n = 1/2, 3/2, 5/2, \dots$), что позволяет вычислить все интегралы в явном виде.

В результате точное решение уравнения теплопроводности (6₁) запишется в форме бесконечного ряда, который оказывается зависящим только от напряжения и его производных по времени:

$$\tilde{T}(\tilde{x} = \tilde{X}(\tilde{t}), \tilde{t}) - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) = d_0\tilde{\sigma} + d_1\dot{\tilde{\sigma}} + d_2\ddot{\tilde{\sigma}} + d_3\ddot{\tilde{\sigma}} + \dots \quad (10)$$

Заметим теперь, что с использованием уравнения Аррениуса (6₃) левую часть (10) можно представить в виде функции напряжения и скорости. Затем, с помощью уравнение (6₂), исключаем скорость, так что левая часть (10) оказывается функцией только напряжения и его первой производной по времени:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\tilde{x} = \tilde{X}(\tilde{t}), \tilde{t}) - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) &= \\ &= \frac{\gamma + \alpha + \frac{1}{\epsilon}(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}) - \gamma\tilde{\sigma}(\tilde{t})}{\epsilon - \ln(\tilde{V}(\tilde{t}))} - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

Тем самым (10) становится замкнутым дифференциальным уравнением, которое полностью определяет динамику напряжения. В свою очередь, его решение $\tilde{\sigma}(\tilde{t})$ можно использовать в (6₂), чтобы найти зависимость скорости ФШ $\tilde{V}(\tilde{t})$. Затем по известным функциям $\sigma(\tilde{t})$ и $\tilde{V}(\tilde{t})$ можем найти временную зависимость температуры на ФШ $\tilde{T}(\tilde{x} = \tilde{X}(\tilde{t}), \tilde{t})$ по уравнению Аррениуса (6₃), что завершит решение системы (6).

Успех следующего, решающего конструктивного шага, обусловлен тем, что во многих случаях имеется экспериментальная информация о характере динамики фронта. В частности, известно, что автоколебания ФШ при деформации полимерных пленок и волокон — как при растяжении во время холодной вытяжки, так и при сжатии во время прокатки — имеют характер релаксационных колебаний.

Период релаксационных колебаний состоит из короткого промежутка времени, в котором скорость фронта меняется быстро, и намного более длительного промежутка, в котором она меняется плавно, то есть ускорения любого порядка оказываются сконцентрированы в относительно малой доле периода. Тем самым при анализе автоколебаний ФШ в полимерах появляется возможность использовать наличие безразмерного малого параметра — отношения интервала „взрывного“ перемещения фронта к полному периоду колебаний.

Разумеется, если в задаче имеется и явный малый безразмерный параметр, степеням которого пропорциональны „масса“ — зависящая от скорости функция перед „обычным“ ускорением, и „гипермасса“ — функции перед ускорениями более высоких порядков, то ряд

„по ускорениям“ в (10) с гарантией оказывается асимптотическим и его конечным отрезком можно пользоваться для вычислений с контролируемой степенью точности.

Ниже мы покажем, что при пластической деформации полимеров такой параметр в ТМ (6) существует и имеет вид:

$$\delta = \frac{2\eta}{V_s \sigma_s} \frac{(\lambda - 1)}{D}. \quad (12)$$

Он становится малым при большой податливости образца D и/или высокой скорости протяжки ФШ V_s . Важно, что оба эти условия могут быть выполнены, т.к. и степень податливости, и значение скорости протяжки являются управляющими параметрами при проведении стандартных измерений пластической деформации полимеров.

Итак, мы наметили конструктивный путь построения общего решения системы (6), возникающего в автоколебательном режиме. В следующем параграфе мы установим, при каких значениях безразмерных параметров, введенных в параграфе 3, он достаточно легко реализуется.

5. Определение области параметров существования и значения начальной частоты автоколебаний

Для решения этой подзадачи применим метод анализа линейной устойчивости стационарного состояния системы (6). Переменные системы (6) при малом отклонении от стационарного состояния можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= 1 + \delta \tilde{T}, & \tilde{\sigma} &= 1 + \delta \tilde{\sigma}, \\ \tilde{X}(\tilde{t}) &= \delta \tilde{X} + \tilde{t} + 1, & \tilde{V} &= 1 + \delta \tilde{V}, \end{aligned} \quad (13)$$

где стационарные значения скорости распространения фронта шейки, температуры и напряжения равны 1. Малые отклонения в уравнениях (13) запишем в виде:

$$\delta \tilde{T} = r \exp(\Omega t), \quad \delta \tilde{\sigma} = h \exp(\Omega t), \quad \delta \tilde{V} = p \Omega \exp(\Omega t). \quad (14)$$

Подставим (13)–(14) в систему (6) и после вычислений, которые мы вынесли в Приложение 1, получим ее характеристическое уравнение:

$$\Omega - \alpha \left[\frac{(\Omega + 1)}{\sqrt{1 + 2\beta\Omega}} - 1 \right] + \delta \left[\gamma + \frac{\alpha}{\sqrt{1 + 2\beta\Omega}} \right] = 0. \quad (15)$$

Нейтральная линия, разделяющей затухающие и незатухающие колебания, задается уравнением (П4):

$$\beta = \frac{\alpha M - M^2}{\alpha + \delta \gamma}, \quad (16)$$

а значения частот колебаний на этой линии неустойчивости определяются выражением (П9):

$$\Omega = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\alpha - M} (\alpha + \delta \gamma). \quad (17)$$

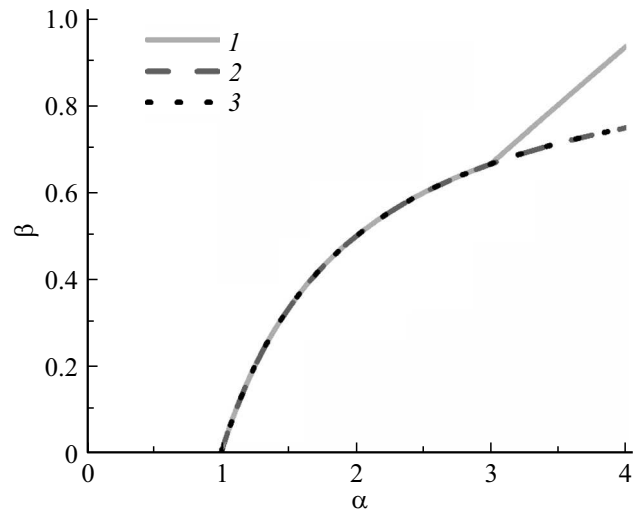


Рис. 1. Диаграмма с линиями неустойчивости для значения параметров $\delta = 10^{-5}$, $\gamma = 1$. Линия 1 — линия неустойчивости системы (6), определяемая точным уравнением (16), линия 2 — линия неустойчивости уравнения (19), определяемая приближенным уравнением (22), линия 3 — линия неустойчивости, соответствующая критерию Давиденкова (18).

Вывод формул (16), (17) приведен в Приложении 1.

Как мы уже писали выше, наиболее интересным с экспериментальной точки зрения является случай больших податливостей D и/или высоких скоростей растяжения V_p . Поэтому в первую очередь имеет смысл рассмотреть случай $\delta \ll 1$.

Отметим, что при $\delta = 0$ ТМ (6) переходит в модель, которая описывает динамику самоподдерживающегося фронта стекло–кристалл в процессе твердофазной взрывной кристаллизации (ВК) [39]. В этом случае линия (17) распадается на две линии, пересекающиеся с конечным углом в точке $(\alpha = 3, \beta = 2/3)$. Надо, однако, иметь в виду, что предел $\delta = 0$ является сингулярным, т.к. в этом случае, как легко видеть, происходит понижение размерности системы (6).

В области же ненулевых, но малых значений δ , ТМ для полимеров оказывается близкой к задаче вынужденной ВК, когда для продвижения фронта требуется поддержка теплом от подвижного источника (на практике — от луча лазера). Из (15) очевидно, что эта аналогия становится максимально полной, если частота колебаний мала.

На рис. 1 представлены линии неустойчивости при малом значении параметра δ . Линия 1 определяет точную границу области автоколебаний системы (6). Если значение параметра β меньше, чем $\frac{\alpha M - M^2}{\alpha + \delta \gamma}$, то решение системы будет автоколебательным.

Поведение частот для малого параметра $\delta \ll 1$ демонстрирует специфику зависимости от параметра α , рис. 2. В этом, актуальном для динамики полимеров режиме, наблюдается резкая разница в величинах частот выше и ниже „критического“ значения $\alpha \approx 3$. В связи с этим

в следующем параграфе мы напомним соответствующие экспериментальные факты и предложим их интерпретацию в свете изложенных выше теоретических расчетов частот колебаний.

6. О критерии Давиденкова

Как известно, в экспериментах по растяжению пленки полимера с заданной скоростью подвижного захвата V_p измеряется временная зависимость напряжения $\sigma = \sigma(t)$. Совокупность результатов измерений, полученных при разных значениях V_p , позволяет построить зависимость $\sigma_s = \sigma_s(V_s)$. Режим автоколебаний наблюдается, если эта зависимость имеет N -образный вид, т.е. на ней есть интервал, в котором $\frac{d\sigma_s}{dV_s} < 0$.

В некоторых экспериментах существование автоколебаний было обнаружено именно в этом интервале. Поэтому их появление трактовали как очевидное следствие выполнения критерия Давиденкова, эквивалентного выполнению условия $\frac{d\sigma_s}{dV_s} < 0$, для возникновения нестационарной динамики [41]. Однако в последующих экспериментах, выполненных с более высоким разрешением, было однозначно установлено, что автоколебания происходят и при скоростях V_p в намного более широком интервале, чем это ожидается из критерия Давиденкова. В частности, в полиэтилентерефталате (ПЭТФ) они наблюдались даже при самых высоких скоростях растяжения, вплоть до максимальной скорости, при которой пленки растрескивались [3,19,20].

Чтобы прояснить связь с нашими результатами, полученными в разделе 5, запишем выражение для производной $\frac{d\sigma_s}{dV_s}$ в безразмерных параметрах:

$$\frac{d \ln \sigma_s}{d \ln V_s} = \frac{1 - \alpha(1 - \beta)}{\alpha + \gamma}. \quad (18)$$

Из уравнения (18) следует, что критерию Давиденкова $\frac{d\sigma_s}{dV_s} < 0$ соответствует условие $\beta < \frac{\alpha-1}{\alpha}$. Сопоставив это с линиями неустойчивости для исходной системы (6) видим, что отрицательной производной в (18) отвечает часть линии неустойчивости при $1 < \alpha < 3$, $\delta \rightarrow 0$, рис. 1. Т.е. на этом сегменте критерий Давиденкова очень близок к результатам, полученным для малых δ . Однако, при $\alpha > 3$ линия неустойчивости системы (6) „уходит влево“ от линии $\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha}$, при этом знак производной в (18) на этом ее сегменте оказывается положительным. Соответственно, на этой части линии неустойчивости несмотря на то, что при ее пересечении „вправо“, то есть к большим значениям α , колебания возникают, критерий Давиденкова не выполняется. Высокочастотные колебания при $\alpha \geq 3$ или $\beta \geq 2/3$ соответствуют высоким скоростям растяжения. Именно для высоких скоростей растяжения критерий Давиденкова не предсказывает колебаний, которые наблюдаются экспериментально.

Кроме того, результаты этого анализа позволяют понять, почему в некоторых экспериментах машина

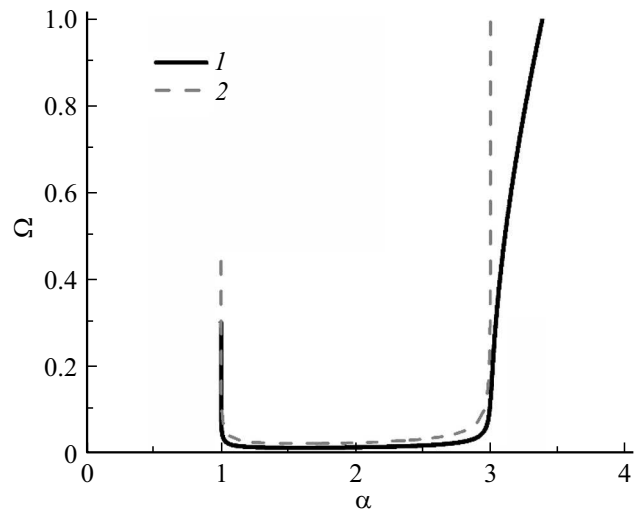


Рис. 2. Зависимость частот колебаний на линии неустойчивости, разделяющей затухающие и незатухающие колебания. Линия 1 соответствует точной формуле (17), линия 2 — формуле (21) при значениях параметров $\delta = 10^{-5}$, $\gamma = 1$.

переставала регистрировать наличие колебаний при достижении максимальной скорости, предсказываемой критерием Давиденкова (хотя иногда и фиксировала их чуть выше этого значения [23]). Причин тут две: во-первых, очень резкий рост частоты уже при небольшом превышении этой скорости, рис. 2. Вторая причина — уменьшение размеров устойчивого предельного цикла с ростом скорости. При недостаточно высокой разрешающей способности экспериментальной установки обе эти причины не позволяли обнаруживать наличие высокочастотных автоколебаний при высоких скоростях, но регистрировали их при низких скоростях, когда и частоты колебаний „удобные“, и их амплитуды колебаний максимальны.

Качественно, можно сказать, что динамика ФШ (а также напряжения и температуры) распадается на два разных режима, „механический“ (Давиденковский) — с малыми частотами и большими амплитудами и „термодинамический“ — с большими частотами и малыми амплитудами. В чем состоит принципиальная разница в классификации механизмов, стоящих за каждым из этих режимов, мы обсудим в заключительной части статьи.

Из приведенных результатов ясно, что анализ нелинейной динамики ФШ следует проводить по-разному для областей $1 < \alpha < 3$ и $\alpha > 3$. При этом намеченную в разделе 4 программу вывода приближенного нелинейного дифференциального уравнения проще всего выполнить в первой области, в которой частота автоколебаний ожидается малой (по крайней мере при неглубоком продвижении за линию неустойчивости), а упомянутый в разделе 4 ряд „по ускорениям“ уравнения (10) является асимптотическим и имеет очевидный малый параметр при $\delta \ll 1$.

Учитывая, что и с экспериментальной точки зрения случай малых значений δ представляет значительный интерес, в следующем параграфе мы выведем дифференциальное уравнение, описывающее нелинейную динамику в области $1 < \alpha < 3$ и проведем анализ его решений.

7. Решение задачи (1)–(3) в приближении нелинейного осциллятора

В области малых значений частот уравнения (17) можно „оборвать“ ряд в (10), сохранив лишь вклады не выше 2-ой производной по времени. В результате, используя уравнения (6₂), (6₃), (7)–(9), после проведения соответствующих вычислений, приведенных в Приложении 2, получаем обыкновенное нелинейное дифференциальное уравнение для отклонения безразмерного напряжения от его стационарного значения $h(t) \equiv \tilde{\sigma}(t) - 1$ в виде:

$$M(h, \dot{h})\ddot{h} + F(h, \dot{h}) + \delta h = 0, \quad (19)$$

в котором эффективные масса и сила трения равны:

$$\begin{aligned} M(h, \dot{h}) &= \frac{\alpha}{8\gamma} \frac{\epsilon - \ln(\tilde{V})}{\epsilon} \beta_0(\tilde{V}) \left\{ (h+1) [2 - 3\beta_0(\tilde{V})(\tilde{V})^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{2} \beta_0(\tilde{V}) [2\delta + \dot{h}(-3 + 5\beta_0(\tilde{V})(\tilde{V})^2)] \right\}, \\ F(h, \dot{h}) &= \frac{\alpha\delta}{\gamma} \left(\frac{\beta_0(\tilde{V})}{\beta} \right)^{1/2} \frac{\epsilon - \ln(\tilde{V})}{\epsilon} \left\{ -\frac{1}{2} \beta_0(\tilde{V}) \tilde{V} \dot{h} \right. \\ &\quad \left. + \tilde{V}(h+1) - \sqrt{\frac{\beta}{\beta_0(\tilde{V})}} \right\} - \frac{\delta}{\gamma} \ln(\tilde{V}). \end{aligned} \quad (20)$$

В этом уравнении „сила трения“ $F(h, \dot{h})$ имеет монотонную зависимость. Отметим, что при малых δ ее линейная часть

$$\left. \frac{dF}{dh} \right|_{h=\dot{h}=0} = \frac{d\sigma_s}{dV_s} + O(\delta),$$

что обеспечивает возникновение на фазовой плоскости (α, β) устойчивого предельного цикла. Отсюда ясно, что автоколебания, обусловленные наличием предельного цикла, уже при относительно небольшом продвижении в область неустойчивости, должны принимать характер релаксационных колебаний.

Линеаризация уравнения (19) позволяет получить оценку частоты колебаний Ω :

$$\Omega = \sqrt{8\delta(1-\delta) \frac{\alpha}{\alpha-1} \frac{\gamma+\alpha}{3-\alpha}}, \quad (21)$$

на соответствующей линии неустойчивости:

$$\beta = \frac{\alpha-1}{\alpha(1-\delta)}. \quad (22)$$

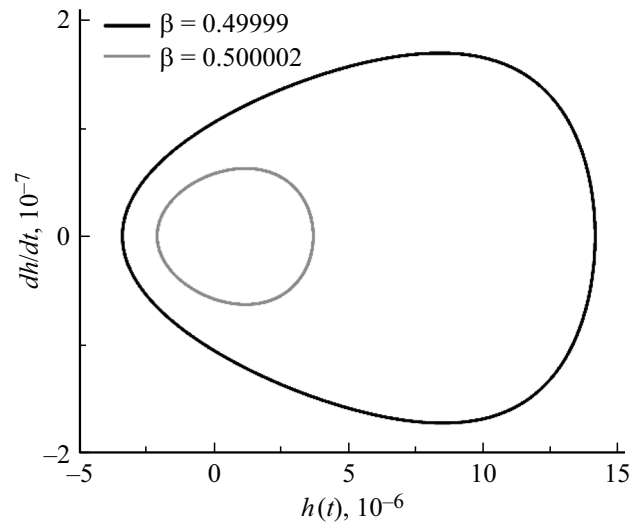


Рис. 3. Фазовые диаграммы уравнения (19) при значениях параметров $\delta = 10^{-5}$, $\gamma = 1$, $\epsilon = 10$.

На рис. 3 показано значительное возрастание циклов на фазовой плоскости при продвижении в область автоколебаний. На рис. 4, а, б приведены соответствующие им временные зависимости отклонений температуры и напряжения от их стационарных значений.

Из графиков на рис. 3–4 очевидно, что решения уравнения (19) перестают быть синусоидальными и становятся более релаксационными по мере удаления от линии неустойчивости (22).

8. Заключение

Переформулировав уравнение теплопроводности для полимерной пленки, растягиваемой с постоянной скоростью, в виде дифференциального уравнения бесконечного порядка „по ускорениям“, мы получили возможность задать вопрос: «нельзя ли при определенных условиях получить хорошую аппроксимацию автоколебательных решений исходной задачи „оборвав ряд“, т.е. решая дифференциальное уравнение конечного порядка?».

При этом мы в первую очередь интересовались ситуацией, когда для инициирования автоколебаний необходимо увеличивать податливость системы, уменьшая параметр δ . Это имеет место для большинства исследованных полимеров, в которых наблюдались автоколебания.

Выделив из множества размерных параметров модели гораздо меньшее число безразмерных, мы показали, что в пределе бесконечно большой податливости „полимерная“ модель сводится к решению более простой модели самопроизвольной твердофазной взрывной кристаллизации стекол.

В реальном же случае, когда податливость не бесконечна, но велика (и/или высока скорость холодной вытяжки пленки), расчет „полимерной“ динамики оказывается эквивалентным решению задачи о продвиже-

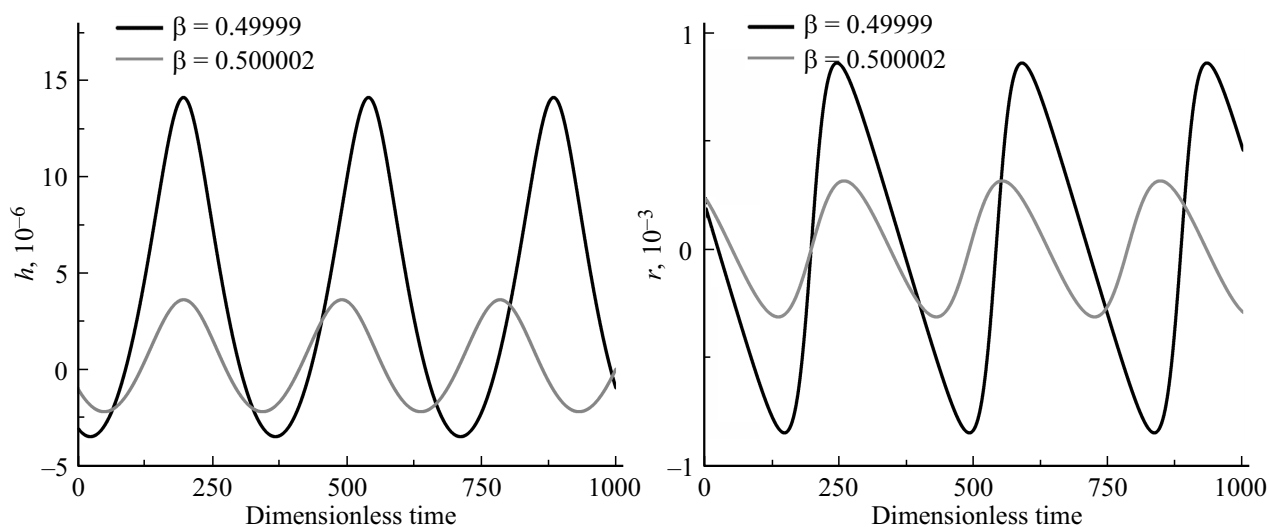


Рис. 4. Зависимость в автоколебательном режиме а) напряжения от времени $h(\bar{t})$, б) температуры от времени $r(\bar{t})$.

нии фронта неорганическое стекло-кристалл, индуцированного „подталкивающим“ его лучом лазера. При этом достаточно неожиданно оказалось, что обратная податливость пленки играет ту же роль, что и градиент температуры от лазерной подсветки [39].

Отметим, что обе эти аналогии интересны уже сами по себе, так как открывают возможность сравнения известных результатов в двух, на первый взгляд совершенно разных, типах экспериментов.

Результаты проведенного в статье анализа линейной устойчивости полимерной пленки, движущейся с той же (постоянной) скоростью, что и подвижный захват, полностью согласуются с этой аналогией. При этом выяснилось, что при не слишком большом нагреве фронта шейки, частота возникающих колебаний мала, что позволяет обоснованно аппроксимировать расчет динамики пленки решением обыкновенного дифференциального уравнения 2-го порядка, т. е. нелинейным осциллятором.

В случае же большего нагрева, частота автоколебаний резко возрастает, а размер устойчивого предельного цикла уменьшается. Эта закономерность ярко проявляет себя в изменении временной зависимости напряжения от скорости вытяжки, наблюдаемом экспериментально.

Наконец, в связи с общей формой выведенного уравнения (10), уместно обратить внимание на принципиальное отличие в описании динамики автоколебаний в полимерах от автоколебаний в ряде макроскопических моделей, широко применяемых в механике, электротехнике и химии. Действительно, последние описываются дифференциальными уравнениями 2-го порядка (классическими уравнениями Ван дер Поля и Рэля, имеющими постоянные коэффициенты или более общими уравнениями (типа уравнения Льенара), содержащими переменные коэффициенты). Для однозначного определения их решений достаточно задания всего 2-х начальных значений. В то же время представление уравнения теплопроводности (1) в виде дифференциального уравнения

бесконечного порядка (10) для определения траекторий требует задания бесконечного числа начальных значений. Очевидно, что это обстоятельство потенциально может приводить к возникновению нелинейной динамики, гораздо более сложной, чем автоколебания „обычных“ макромоделей.

Выражаясь физическим языком, разница в „классификации механизмов“ автоколебаний (предугадываемая в [19]) в полимерах и простых макромеханических моделях (таких, как модель механических часов) состоит в бесконечном или конечном числе степеней свободы, минимально необходимом для разумной формулировки уравнений модели. Отсюда интуитивно понятна и причина увеличения в целое число раз периода автоколебаний при очень небольшом изменении управляющих параметров, многократно наблюдавшееся при деформации полимеров [3,14] — ведь динамическому состоянию фронта шейки вернуться за период в ту же самую точку в бесконечном фазовом пространстве „гораздо труднее“, чем сделать это для точки на плоскости, поэтому „полимерной“ траектории и приходится совершать несколько „почти удачных“ попыток прежде, чем она наконец угодит „в яблочко“ и время периода завершится.

Таким образом, полученные в статье результаты позволили также назвать общую причину возникновения автоколебаний в полимерах как в относительно узкой области выполнения механического критерия Давиденкова, так и их неожиданного появления в гораздо более широкой области скоростей, в которой этот критерий не выполняется.

Изложенный в статье подход может быть использован и для расчета нестационарной динамики полимерных пленок с учетом увеличения свободного объема и степени вытяжки, возникающего с переходом температуры шейки через точку стеклования. Ввиду существенного усложнения формул такие расчеты будут приведены в следующей публикации.

Приложение 1

Для решения системы (6) особый интерес представляет решение характеристического уравнения (15) с чисто мнимыми корнями $\Omega = i\Omega_{im}$. Представим уравнение (15) для таких корней в следующем виде:

$$\sqrt{1 + 2\beta i\Omega_{im}} = \frac{\alpha(i\Omega_{im} + 1 - \delta)}{i\Omega_{im} + (\alpha + \delta\gamma)}.$$

Значение левой и правой части запишем как комплексные числа:

$$\sqrt{1 + 2\beta i\Omega_{im}} = \frac{\alpha(i\Omega_{im} + 1 - \delta)}{i\Omega_{im} + (\alpha + \delta\gamma)} = M + iN,$$

где M и N вещественные числа.

Из условия $\sqrt{1 + 2\beta i\Omega_{im}} = M + iN$, следует что

$$N^2 = M^2 - 1, \quad \Omega_{im} = \frac{MN}{\beta_p}. \quad (\text{П1})$$

Так как M и $N \in \mathbb{R}$ то следует $|M| \geq 1$.

Из условия

$$\frac{\alpha(i\Omega_{im} + 1 - \delta_p)}{i\Omega_{im} + (\alpha + \delta\gamma)} = M + iN,$$

следует что

$$\begin{cases} \alpha\Omega_{im} = M\Omega_{im} + N(\alpha + \delta\gamma), \\ \alpha(1 - \delta) = M(\alpha + \delta\gamma) - N\Omega_{im}. \end{cases}$$

Воспользуемся уравнениями (П1) и эта система примет вид:

$$\begin{cases} \alpha \frac{M}{\beta} = \frac{M^2}{\beta} + (\alpha + \delta\gamma), \\ \alpha(1 - \delta) = M(\alpha + \delta\gamma) - \frac{M(M^2 - 1)}{\beta}. \end{cases} \quad (\text{П2})$$

Исключив β из уравнений системы (П2), получим условие на M через параметры α , δ и γ :

$$2(\alpha + \delta\gamma)M^2 - \alpha[(\alpha + \delta\gamma) + (1 - \delta)]M + [\alpha^2(1 - \delta) - (\alpha + \delta\gamma)] = 0.$$

Выпишем явное выражение для M от параметров α , δ , γ как решение квадратного уравнения:

$$M = \frac{\alpha[(1 - \delta) + (\alpha + \delta\gamma)] \pm \sqrt{D_M}}{4(\alpha + \delta\gamma)}, \quad (\text{П3})$$

где

$$D_M = \alpha^2[(1 - \delta) + (\alpha + \delta\gamma)]^2 - 8(\alpha + \delta\gamma)[\alpha^2(1 - \delta) - (\alpha + \delta\gamma)],$$

Соответствующее значение частоты согласно (П1) равно:

$$\Omega_{im} = \frac{M\sqrt{M^2 - 1}}{\beta}. \quad (\text{П4})$$

Выпишем выражение для параметра β из системы (П2)

$$\beta = \frac{\alpha M - M^2}{\alpha + \delta\gamma}. \quad (\text{П5})$$

Соотношение (П5) определяет линию неустойчивости, разделяющую затухающие и незатухающие колебания. Значение частоты (П4) при значениях β (П5) равно:

$$\Omega_{im} = \frac{\sqrt{M^2 - 1}}{\alpha - M} (\alpha + \delta\gamma). \quad (\text{П6})$$

Приложение 2

Решение уравнения теплопроводности (61) запишем через функцию Грина:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\tilde{X}(\tilde{t}), \tilde{t}) - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) &= \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}} \int_{-\infty}^{\tilde{t}} dt' \frac{1}{\sqrt{\pi(\tilde{t} - \tilde{t}')}} \\ &\times \exp\left[-\frac{1 - \beta}{\beta}(\tilde{t} - \tilde{t}') - \frac{[\tilde{X}(\tilde{t}) - \tilde{X}(\tilde{t}')]^2}{(\tilde{t} - \tilde{t}')} \right] \\ &\times \tilde{\sigma}(\tilde{V}(\tilde{t}'), \tilde{T}(\tilde{X}(\tilde{t}')))\tilde{V}(\tilde{t}'). \end{aligned} \quad (\text{П7})$$

Запишем функции $\tilde{X}(\tilde{t})$, $\tilde{\sigma}(\tilde{t})$, $\tilde{V}(\tilde{t}')$ в виде рядов Тейлора:

$$\begin{aligned} \tilde{X}(\tilde{t}') &= \tilde{X}(\tilde{t}) - \tilde{V}(\tilde{t})\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\dot{\tilde{V}}(\tilde{t})\tilde{\tau}^2 - \frac{1}{6}\ddot{\tilde{V}}(\tilde{t})\tilde{\tau}^3 + \dots \\ \tilde{\sigma}(\tilde{t}') &= \tilde{\sigma}(\tilde{t}) - \dot{\tilde{\sigma}}(\tilde{t})\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\ddot{\tilde{\sigma}}(\tilde{t})\tilde{\tau}^2 - \frac{1}{6}\ddot{\tilde{\sigma}}(\tilde{t})\tilde{\tau}^3 + \dots, \end{aligned} \quad (\text{П8})$$

где $\tilde{\tau} = \tilde{t} - \tilde{t}'$.

Подставим существенные при малых частотах вклады, выписанные в уравнениях (П8), в правую часть (П7) и получим соотношение:

$$\tilde{T} - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) = \tilde{\sigma}I_1 + I_2, \quad (\text{П9})$$

где

$$I_1 = \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}} \int_0^\infty d\tilde{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi\tilde{\tau}}} f_1(\tilde{\tau}), \quad (\text{П10})$$

$$f_1(\tilde{\tau}) = \exp\left[-\frac{1 - \beta}{\beta}\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\left[\tilde{V} - \frac{1}{2}\dot{\tilde{V}}\tilde{\tau}\right]^2\right][\tilde{V} - \dot{\tilde{V}}\tilde{\tau}],$$

$$I_2 = \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}} \int_0^\infty d\tilde{\tau} \frac{1}{\sqrt{\pi\tilde{\tau}}} f_2(\tilde{\tau}), \quad (\text{П11})$$

$$\begin{aligned} f_2(\tilde{\tau}) &= \exp\left[-\frac{1 - \beta}{\beta}\tilde{\tau} - \tilde{\tau}\left[\tilde{V} - \frac{1}{2}\dot{\tilde{V}}\tilde{\tau}\right]^2\right] \\ &\times \left[-\dot{\tilde{\sigma}}\tilde{\tau} + \frac{1}{2}\ddot{\tilde{\sigma}}\tilde{\tau}^2\right][\tilde{V} - \dot{\tilde{V}}\tilde{\tau}], \end{aligned}$$

где $\tilde{t}$ — аргумент в искомым функциях $\tilde{\sigma}$, $\tilde{V}$ и их производных, для краткости записи он опущен. Экспоненту в подынтегральной функции представим в виде:

$$\exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\beta} + \tilde{V}^2\right)\tilde{t}\right]\left[1 + \tilde{V}\dot{\tilde{V}}\tilde{t}^2 - \frac{1}{4}\dot{\tilde{V}}^2\tilde{t}^3\right], \quad (\text{П12})$$

где несущественные вклады были опущены в силу малости частоты колебаний.

Функции $f_1(\tilde{t})$ и $f_2(\tilde{t})$ в соответствии с (П12) примут вид:

$$f_1(\tilde{t}) = \exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\beta} + \tilde{V}^2\right)\tilde{t}\right] \times \left[1 + \tilde{V}\dot{\tilde{V}}\tilde{t}^2 - \frac{1}{4}\dot{\tilde{V}}^2\tilde{t}^3\right][\tilde{V} - \dot{\tilde{V}}\tilde{t}]. \quad (\text{П13})$$

$$f_2(\tilde{t}) = \exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\beta} + \tilde{V}^2\right)\tilde{t}\right]\left[1 + \tilde{V}\dot{\tilde{V}}\tilde{t}^2 - \frac{1}{4}\dot{\tilde{V}}^2\tilde{t}^3\right] \times \left[-\dot{\tilde{\sigma}}\tilde{t} + \frac{1}{2}\ddot{\tilde{\sigma}}\tilde{t}^2\right][\tilde{V} - \dot{\tilde{V}}\tilde{t}]. \quad (\text{П14})$$

Раскроем скобки в (П13), (П14), представим $f_1(\tilde{t})$ и $f_2(\tilde{t})$ как произведения многочленов по степеням $\tilde{t}$ на экспоненту

$$\exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\beta} + \tilde{V}^2\right)\tilde{t}\right].$$

При этом в (П13), (П14) оставим только те члены, которые содержат нелинейные члены относительно производных не выше второй степени по времени и линейные члены, включающие вторую производную. Причина такого упрощения заключается в том, что в этой статье мы исследуем режим, в котором частоты автоколебаний малы

$$f_1(\tilde{t}) = (\tilde{V} - \dot{\tilde{V}}\tilde{t} + \tilde{V}^2\dot{\tilde{V}}\tilde{t}^2) \exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\beta} + \tilde{V}^2\right)\tilde{t}\right], \quad (\text{П15})$$

$$f_2(\tilde{t}) = \left[-\tilde{V}\dot{\tilde{\sigma}}\tilde{t} + \left(\dot{\tilde{V}}\dot{\tilde{\sigma}} + \frac{1}{2}\ddot{\tilde{\sigma}}\tilde{V}\right)\tilde{t}^2 - (\tilde{V}^2\dot{\tilde{V}}\dot{\tilde{\sigma}})\tilde{t}^3\right] \times \exp\left[-\left(\frac{1-\beta}{\beta} + \tilde{V}^2\right)\tilde{t}\right]. \quad (\text{П16})$$

Интегралы $I_1(\tilde{t})$ и $I_2(\tilde{t})$ (П10), (П11) с учетом (П15)–(П16) легко вычисляются, так как являются суммами гамма-функций. Значение $I_1(\tilde{t})$ и $I_2(\tilde{t})$ равны:

$$I_1(\tilde{t}) = \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}}\left(\beta_0^{1/2}\tilde{V} - \frac{1}{2}\beta_0^{3/2}\dot{\tilde{V}} + \frac{3}{4}\beta_0^{5/2}\tilde{V}^2\dot{\tilde{V}}\right),$$

$$I_2(\tilde{t}) = \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}}\left(-\frac{1}{2}\beta_0^{3/2}\tilde{V}\dot{\tilde{\sigma}} + \frac{3}{4}\beta_0^{5/2}\left(\dot{\tilde{V}}\dot{\tilde{\sigma}} + \frac{1}{2}\ddot{\tilde{\sigma}}\tilde{V}\right) - \frac{15}{8}\beta_0^{7/2}\tilde{V}^2\dot{\tilde{V}}\dot{\tilde{\sigma}}\right),$$

где функция

$$\beta_0 = \beta_0(\tilde{V}) = \frac{1}{\frac{1-\beta}{\beta} + \tilde{V}^2}.$$

Представим I_1 и I_2 в виде функции отклонения от стационарного значения напряжения $h(\tilde{t}) = \tilde{\sigma}(\tilde{t}) - 1$, с учетом (6₂) I_1 и I_2 примут вид:

$$I_1(h, \dot{h}, \ddot{h}) = \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}}\left(\beta_0^{1/2}\tilde{V} + \frac{1}{4\delta}\beta_0^{3/2}\dot{h} - \frac{3}{8\delta}\beta_0^{5/2}\tilde{V}^2\dot{h}\right),$$

$$I_2(h, \dot{h}, \ddot{h}) = \frac{\alpha}{\epsilon\sqrt{\beta}}\left(-\frac{1}{2}\beta_0^{3/2}\tilde{V}\dot{h} + \frac{3}{4}\beta_0^{5/2}\left(-\frac{1}{2\delta}\dot{h}\ddot{h} + \frac{1}{2}\ddot{h}\tilde{V}\right) - \frac{15}{16\delta}\beta_0^{7/2}\tilde{V}^2\ddot{h}\dot{h}\right),$$

где $\tilde{V} = 1 - \frac{1}{2\delta}\dot{h}$.

Тогда правая часть уравнения (П9) зависит только от неизвестной функции h :

$$\tilde{T} - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) = (h + 1)I_1(h, \dot{h}, \ddot{h}) + I_2(h, \dot{h}, \ddot{h}). \quad (\text{П17})$$

Левую часть соотношения (П9) $\tilde{T} - (1 - \frac{\alpha}{\epsilon})$ выразим из уравнения (6 + 3):

$$\tilde{T}(\tilde{X}(\tilde{t}), \tilde{t}) - \left(1 - \frac{\alpha}{\epsilon}\right) = \frac{\gamma h - \ln(\tilde{V})}{\ln(\tilde{V}) - \epsilon} + \frac{\alpha}{\epsilon}. \quad (\text{П18})$$

Объединяя (П17) и (П18), получим дифференциальное уравнение на h :

$$\frac{\gamma h - \ln(\tilde{V})}{\ln(\tilde{V}) - \epsilon} + \frac{\alpha}{\epsilon} = (h + 1)I_1(h, \dot{h}, \ddot{h}) + I_2(h, \dot{h}, \ddot{h}). \quad (\text{П19})$$

Уравнение (П19), которое является обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка, можно компактно записать в виде уравнения для нелинейного осциллятора:

$$M(h, \dot{h})\ddot{h} + F(h, \dot{h}) + \delta h = 0, \quad (\text{П20})$$

в котором эффективные масса и сила трения равны:

$$M(h, \dot{h}) = \frac{\alpha\beta_0}{8\gamma}\sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}\frac{\epsilon - \ln(\tilde{V})}{\epsilon} \times \left[(h + 1)(2 - 3\beta_0\tilde{V}^2) + \frac{3}{2}\beta_0(2\delta + (-3 + 5\beta_0^2\tilde{V}^2)\dot{h})\right],$$

$$F(h, \dot{h}) = \frac{\alpha\delta}{\gamma}\sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}\frac{\epsilon - \ln(\tilde{V})}{\epsilon} \times \left[(h + 1)\tilde{V} - \frac{1}{2}\beta_0\tilde{V}\dot{h} - \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}}\right] - \frac{\delta}{\gamma}\ln(\tilde{V}).$$

Решение уравнения (П20) определяет безразмерное напряжение $\tilde{\sigma} = h + 1$, скорость фронта шейки $\tilde{V} = 1 - \frac{1}{2\delta} \dot{h}$ и температуру на фронте шейки:

$$\begin{aligned} \tilde{T} - 1 = \frac{\alpha}{\epsilon} \left[-1 + \sqrt{\frac{\beta_0}{\beta}} \left[(h + 1) \left(\tilde{V} + \frac{\beta_0}{8\delta} (2 - 3\beta_0 \tilde{V}^2) \dot{h} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \beta_0 \left(-\frac{1}{2} \tilde{V} \dot{h} + \frac{3\beta_0}{16\delta} (2\delta + (-3 + 5\beta_0 \tilde{V}^2) \dot{h}) \dot{h} \right) \right] \right]. \end{aligned} \quad (\text{П21})$$

Финансирование работы

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № 124041500009-8).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] D.C. Hookway. *J. Text. Inst.* **49**, 292 (1958).
- [2] W. Roth, R. Schroth. *Faserforsch. Textil.* **11**, 312 (1960).
- [3] А.С. Кечекьян, Г.П. Андрианова, В.А. Каргин. *Высокомолек. соед. А*, **12**, 2424 (1970).
- [4] Г.И. Баренблатт. *Известия АН СССР, Механика твердого тела*, № 5, 121 (1970).
- [5] Г.П. Андрианова, Ю.П. Попов, Б.А. Арутюнов. *Высокомолек. соед. А* **18**, 2311 (1976).
- [6] T. Pakula, E.W. Fischer. *J. Polym. Sci., Part B: Polym. Phys.* **19**, 1705 (1981).
- [7] A. Toda. *Polymer* **34**, 11, 2306 (1993).
- [8] A. Toda. *Polymer* **35**, 17, 3638 (1994).
- [9] D. Mouzakis, J. Karger-Kocsis. *J. Appl. Polym. Sci.*, **68**, 561 (1998).
- [10] H. Ebener, B. Pleuger. *J. Petermann, J. Appl. Polym. Sci.*, **71**, 813 (1999).
- [11] J. Karger-Kocsis, O.I. Benevolenski, E.J. Moskala. *J. Mater. Sci.*, **36**, 3365 (2001).
- [12] С.Л. Баженов, А.С. Кечекьян. *Высокомолек. соед. А* **43**, 63 (2001).
- [13] A. Toda, C. Tomita, M. Hirotsuka, Y. Hibino, H. Miyaji, C. Nonomura, T. Suzuki, H. Ishihara. *Polymer* **43**, 947 (2002).
- [14] С.Л. Баженов, А.С. Кечекьян. *Высокомолек. соед. А* **44**, 629 (2002).
- [15] С.Л. Баженов, Ю.А. Родионова, А.С. Кечекьян. *Высокомолек. соед. А* **45**, 1099 (2003).
- [16] M.G. Garcia Gutierrez, J. Karger-Kocsis, C. Riekel. *Chem. Phys. Lett.*, **398**, 6 (2004).
- [17] С.Л. Баженов, Ю.А. Родионова, А.С. Кечекьян, А.К. Рогожинский. *Высокомолек. соед. А* **47**, 1131 (2005).
- [18] F. Ronkay, T. Czigany. *Polym. Bull.*, **57**, 989 (2006).
- [19] С.Л. Баженов, Е.П. Ковальчук. *ДАН* **417**, сер. Физ. химия, **417**, 353 (2007).
- [20] С.Л. Баженов, Е.П. Ковальчук. *Высокомолек. соед. А* **50**, 501 (2008).
- [21] D.E. Muzakis. *eXPRESS Polym. Lett.* **4**, 244 (2010).
- [22] С.Л. Баженов, Л.И. Маневич. *Высокомолек. соед. А* **52**, 62 (2010).
- [23] S.L. Bazhenov. *J. Appl. Polym. Sci.* **119**, 654 (2011).
- [24] D. Chiang, M.-L. Tsai, S. Lee. *Polym. Eng. Sci.* **53**, 589 (2013).
- [25] С.Л. Баженов, А. С. Кечекьян. *Высокомолек. соед. А* **55**, 680 (2013).
- [26] С.Л. Баженов. *Известия РАН, Механика твердого тела*, **5**, 138 (2014).
- [27] T. Wan, J. Zhang, S. Liao, T. Dao. *Polym. Eng. and Sci.* **55**, 966 (2014).
- [28] C. Wan, Ellen L. Heeley, Y. Zhou, S. Wang, C.T. Cafolla, E.M. Crabb, D.J. Hughes. *Soft Matter* **14**, 9175 (2018).
- [29] А.С. Кечекьян, К.З. Монахова, С.Л. Баженов. *ДАН* **485**, 317 (2019).
- [30] S.L. Bazhenov, A.S. Kechek'yan. *Polym. Sci., Series A* **66**, 472 (2024).
- [31] Ellen L. Heeley, J. Smith, C. Wan, S. Huband, E. Brambley, D.J. Hughes. *Polymer* **285**, 126364 (2023).
- [32] A.L. Korzhenevskii, R. Bausch, R. Schmitz. *Phys. Rev. Lett.* **108**, 046101 (2012).
- [33] A.L. Korzhenevskii, R. Bausch, R. Schmitz. *Phys. Rev. E* **85**, 021605 (2012).
- [34] E. Babushkina, N.M. Bessonov, A.L. Korzhenevskii, R. Bausch, R. Schmitz. *Phys. Rev. E* **87**, 042402 (2013).
- [35] R.E. Rozas, A.L. Korzhenevskii, R. Bausch, R. Schmitz. *Physica A* **413**, 394 (2014).
- [36] R.E. Rozas, A.L. Korzhenevskii, J. Horbach. *J. Phys.* **28**, 035001 (2016).
- [37] А.А. Чеврычкина, Н.М. Бессонов, А.Л. Корженевский. *ФТТ* **61**, 2122 (2019).
- [38] А.А. Чеврычкина, Н.М. Бессонов, А.Л. Корженевский. *ФТТ* **62**, 1244 (2020).
- [39] А.А. Чеврычкина, Н.М. Бессонов, А.Л. Корженевский. *ФТТ* **63**, 1927 (2021).
- [40] А.А. Чеврычкина, А.Л. Корженевский. *EPJST*, **231**, 6, 1147–1152 (2022).
- [41] Н.Н. Давиденков. *ФТТ* **3**, 2458 (1961).

Редактор Т.Н. Василевская