

04

Новый сценарий низкопорогового распада обыкновенной СВЧ-волны в блобе плотности периферийной плазмы токамака

© А.Ю. Попов¹, Н.В. Теплова^{1,2}¹ ФТИ им. А.Ф. Иоффе, Санкт-Петербург, Россия² Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: a.popov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 3 марта 2025 г.

В окончательной редакции 3 июня 2025 г.

Принято к публикации 3 июня 2025 г.

Рассмотрен новый сценарий параметрической неустойчивости СВЧ-пучка волн обыкновенной поляризации на периферии плазменного шнуря в возмущении плотности (блобе), имеющем нитевидную структуру и вытянутом вдоль силовых линий магнитного поля. В результате возбуждаются двумерно локализованная верхнегибридная волна и вынужденные сильнозатухающие колебания. Развитая модель позволяет объяснить аномальное рассеяние СВЧ-волн на границе плазмы, обнаруженнное в токамаках ASDEX-Upgrade и TCV.

Ключевые слова: сверхвысокочастотная волна, плазменные сгустки, аномальное рассеяние, параметрическая неустойчивость.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.16.60930.20303

Для успешного осуществления управляемого термоядерного синтеза в токамаке-реакторе необходим режим улучшенного удержания плазмы, достигаемый при больших градиентах плотности на границе плазменного шнуря [1]. Большие градиенты в любых физических системах являются источником свободной энергии, которая обычно высвобождается в виде неустойчивостей. В данном случае это краевые локализованные моды [2]. На нелинейной стадии развития и насыщения этой неустойчивости наблюдаются возмущения плотности, имеющие нитевидную структуру и вытянутые вдоль силовых линий магнитного поля. Эти возмущения (блобы, филаменты) представляют собой когерентные структуры, формируемые и поддерживаемые турбулентностью.

Дополнительный электронный циклотронный (ЭЦ) нагрев считается надежным локальным методом и необходим для достижения термоядерных температур в разряде и генерации безиндукционных токов. Согласно последним планам, выработанным на 34-м заседании Совета ITER в 2024 г., с его помощью планируется введение в плазму до 70 MW СВЧ-мощности в токамаке-реакторе ITER [3]. Однако представление о линейной и детально предсказуемой картине распространения и поглощения ЭЦ-волн электронами сталкивается с противоречивыми результатами последних экспериментов по электронному циклотронному резонансному нагреву (ЭЦРН) на различных тороидальных установках удержания плазмы. В частности, было установлено [4,5], что прохождение СВЧ-пучка через любой локальный максимум профиля плотности, включая блоб на краю плазмы, делает его неустойчивым по отношению к параметрическим распадам, сопровождающимся возбуждением дочерних волн и появлением последующих нелинейных явлений. Эти данные послужили экспериментальным подтверждением

предсказаний теории низкопороговых параметрических распадных неустойчивостей СВЧ-волн [6]. В контексте предстоящих экспериментов на токамаке-реакторе ITER недавно был теоретически исследован сценарий низкопорогового распада обыкновенной СВЧ-волны, в рамках которого происходит возбуждение двух электронных бернштейновских волн, двумерно локализованных в блобе на периферии плазмы [7]. Между тем этот сценарий не является доминирующим для ожидаемых условий ЭЦРН-экспериментов на установке ITER, где предполагается использование пучков обыкновенных волн с частотой, соответствующей фундаментальной ЭЦ-гармонике.

В настоящей работе мы рассмотрим новый сценарий распада обыкновенной СВЧ-волны, который мог бы реализоваться в блобе на периферии плазмы и предполагает нелинейное возбуждение двумерно локализованной верхнегибридной волны и вынужденных сильнозатухающих колебаний.

Введем локальную цилиндрическую и декартову системы координат (r, θ, z) и (x, y, z) с общим началом в центре блоба и координатой z , параллельной магнитному полю. Координата x связана с меткой магнитной поверхности, y — координата, перпендикулярная линии магнитного поля на магнитной поверхности. Представим плотность в виде суммы фоновой $n_0(r)$ и плотности в блобе $\delta n(r) = \delta n_0 \exp(-r^2/r_b^2)$, где $r_b \propto (5-10)r_s$ — размер блоба [8], r_s — ионный гирорадиус с электронной температурой, δn_0 — амплитуда блоба, которая может достигать 50 % от локального значения n_0 [9]. Так как характерные масштабы фоновой плазмы много больше r_b , мы учтем только пространственную зависимость плотности в блобе $\delta n(r)$.

Рассмотрим квазипоперечный пучок обыкновенных СВЧ-волн, который падает на блоб. Обычно поперечные размеры пучка вдоль z существенно превосходят размеры блоба r_b . Вдоль z распределение электрического поля в пучке можно модельно описать кусочно-непрерывной функцией, спектр которой имеет следующий вид:

$$a_0(y, k_z) = a_0(y, 0) \frac{2 \sin(k_z w_z / 2)}{k_z}. \quad (1)$$

Электрическое поле волны накачки мощностью P_0 можно представить в следующем виде [10]:

$$\mathbf{E}_0 = \sqrt{\frac{2\pi P_0}{w_y w_z c}} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z w_z}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{e}_0(r) a_0(0, k_z) A_s(r) \times \exp(is\theta + ik_z z - i\omega_0 t) + \text{c.c.}, \quad (2)$$

где

$$A_s(\mathbf{r}) = (k_r(s, r)r)^{-1/2} \exp\left(-\frac{c^2 s^2}{2\omega_0^2 w^2} - i \int^r k_r(s, \xi) d\xi + is\pi/2\right)$$

— амплитуда, k_r — волновое число обыкновенной волны [10], $w_{y,z}$ — размеры пучка, $\mathbf{e}_0 = (-n_z \mathbf{e}_x, in_z \mathbf{e}_y \omega_0 / \omega_{ce}, \mathbf{e}_z)$ — вектор поляризации волны в плазме [6], ω_{ce} — ЭЦ-частота, $n_z = ck_z / \omega_0 \ll 1$ — продольный коэффициент преломления.

Далее проанализируем поведение верхнегибридных (ВГ) волн в блобе. В слабонеоднородной плазме интегральное уравнение, описывающее ВГ-волну, имеет вид

$$\hat{D}_E \phi_E = \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_E(\mathbf{r}', t') \left(\int_{-\infty}^{\infty} D_E\left(\mathbf{q}, \frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}, \omega\right) \times \exp(i\mathbf{q}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega(t - t')) d\mathbf{q} d\omega \right) d\mathbf{r}' dt' = 0, \quad (3)$$

где ядро интегрального преобразования, положенное равным нулю, $D_E(\mathbf{q}, \omega) = 0$ является дисперсионным уравнением квазипродольных ВГ-волн [11]. Решение уравнения (3) имеет вид [6]:

$$\phi_E = B_{n,m} \varphi_{n,m}(r) \exp(im\theta + i\omega_{n,m}t) + \text{c.c.}, \quad (4)$$

где собственная функция $\varphi_{n,m}(r)$ может быть представлена в виде [6]:

$$\varphi_{n,m}(r) = \left(\pi |\partial D_E / \partial q_r|_{q_{Er}, r} \int_{r_{m1}}^{r_{m2}} |\partial D_E / \partial q_r|_{q_{Er}, r'}^{-1} r' dr' \right)^{-1/2} \times \cos \left(\int_{r_{m1}}^r q_{Er}(\xi, \omega_{n,m}) d\xi - \frac{\pi}{4} \right), \quad (5)$$

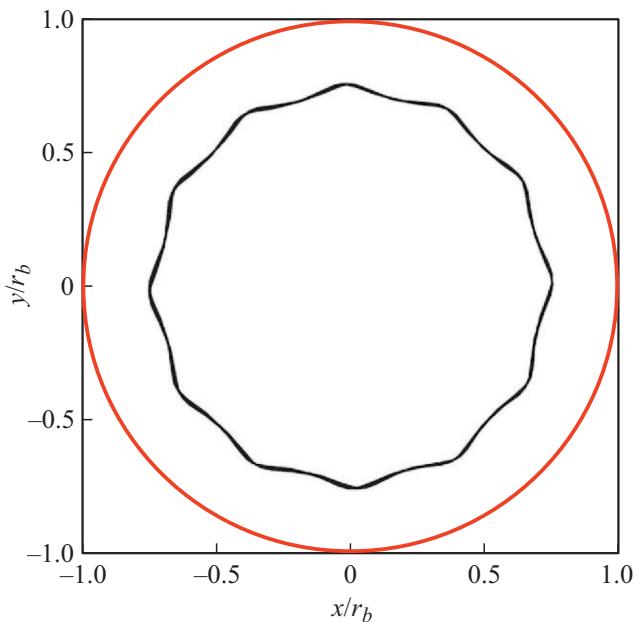


Рис. 1. Траектория ВГ-волны, соответствующая моде шепчущей галереи ($n = 1, m = 6$), в условиях ЭЦРН-экспериментов на токамаке ASDEX-Upgrade [4]. Внешняя сплошная линия указывает на границу блоба.

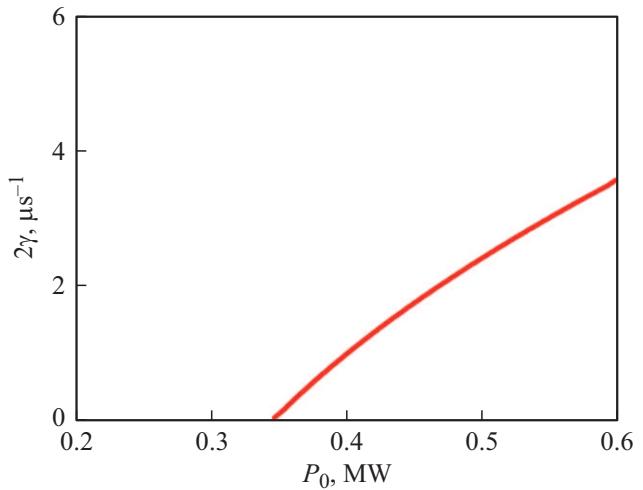


Рис. 2. Зависимость инкремента неустойчивости от мощности в условиях ЭЦРН-экспериментов на токамаке ASDEX-Upgrade [4]. Пороговая мощность равна 0.352 MW.

$q_{Er} = \sqrt{q_{E\perp}^2(r) - (m^2 - 1/4)/r^2}$, $q_{E\perp}$ — решение дисперсионного уравнения $D_E(\mathbf{q}, \omega) = 0$, $r_{m1,2}$ — точки поворота моды m в радиальном направлении. Собственная частота $\omega_{n,m}$ находится из условия $\int_{r_{m1}}^{r_{m2}} q_{Er}(\xi, \omega_{n,m}) d\xi = \pi n$.

При $m \gg 1$ уравнение (4) описывает моды шепчущей галереи ВГ-волны [12], локализованные в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, и бегущие преимущественно по азимутальному углу с постоянной ампли-

тудой $B_{n,m} = \text{const}$. Для иллюстрации на рис. 1 показана траектория моды шепчущей галереи ВГ-волны $n = 1, m = 6$, которая рассчитана с помощью процедуры трассировки лучей для параметров ЭЦРН-экспериментов на токамаке ASDEX-Upgrade [4]. Биение волны накачки (2) с модой шепчущей галереи ВГ-волны (4), амплитуда которой вначале имеет уровень теплового шума, приводит к вынужденным колебаниям с навязанным волновым числом $\mathbf{q}_I = (q_{Er}, m + s, k_z)$ на разностной частоте $\omega_0 - \omega_{n,m}$. Потенциал этих колебаний, затухание для которых превалирует над конвективными потерями, описывается уравнением Пуассона и может быть представлен в следующем виде [6]:

$$\phi_I = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z w_z}{\sqrt{2\pi}} \frac{C_p(k_z)}{2} \times \exp\left(i \int^r q_{Er}(m) d\xi + ip\theta + ik_z z - i(\omega_0 - \omega_{n,m})t\right) + \text{c.c.} \quad (6)$$

где парциальная амплитуда задается следующим выражением:

$$C_p(k_z) = \sqrt{\frac{8\pi P_0}{w_y w_z c}} \times \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\chi_e^{nl}(k_z)}{2(D'_I + iD''_I)} \Big|_{\omega_0 - \omega_{n,m}, q_{Er}, p, k_z} \frac{A_{p-m}}{\bar{B}} B_{n,m}, \quad (7)$$

где \bar{B} — локальное значение магнитного поля в блобе, D'_I и D''_I — невязка и мнимая часть дисперсионного уравнения продольных колебаний [11], $\chi_e^{nl} \propto k_z$ — плазменная восприимчивость второго порядка [13].

Уравнение для моды шепчущей галереи ВГ-волны, для которой источником является нелинейное возбуждение $\sim \chi_e^{nl*} \phi_I \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{e}_0^* / \bar{B}$, имеет вид [6]:

$$\hat{D}_E \phi_E = i \chi_e^{nl*} \phi_I \mathbf{E}_0^* \cdot \mathbf{e}_0^* / \bar{B}. \quad (8)$$

Воспользуемся процедурой теории возмущений. На первом шаге пренебрежем нелинейной накачкой. Это сводит уравнение к однородному уравнению (3), частным решением которого является выражение (4) с постоянной амплитудой. На втором этапе процедуры теории возмущений учтем нелинейную накачку, описываемую правой частью уравнения (8), что делает амплитуду ВГ-волны зависящей от времени и продольной координаты. В конечном счете в координатном представлении амплитуда моды шепчущей галереи t описывается следующим уравнением:

$$\frac{\partial B_{n,m}}{\partial t} - i \Lambda_{n,m} \frac{\partial^2 B_{n,m}}{\partial z^2} + \nu_{ea} B_{n,m} = \gamma_0 w_z \left(\delta\left(z - \frac{w_z}{2}\right) + \delta\left(z + \frac{w_z}{2}\right) \right) B_{n,m}, \quad (9)$$

где $\Lambda_{n,m}$ — усредненный коэффициент дифракции ВГ-волны вдоль магнитного поля, ν_{ea} — частота электрон-атомных столкновений,

$$\begin{aligned} \gamma_0 = \gamma'_0 + i \gamma''_0 &= \frac{i}{\langle \partial D_E / \partial \omega \rangle_{\omega_{n,m}, q_{Er}}} \omega_0 w_y w_z^2 \bar{B} \\ &\times \sum_{p=-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{|\chi_e^{nl}|^2 A_{m-p}^* A_{p-m}}{(D'_I + iD''_I)_{\omega_0 - \omega_{n,m}, q_{Er} + k_r, p, k_z}} |\varphi_{n,m}(r)|^2 r dr. \end{aligned} \quad (10)$$

Ищем неустойчивое решение уравнения (9) в виде $B_{n,m} = B_0 \exp(i\delta\omega_{n,m}t + \gamma_{n,m}t)$, что сводит его к одномерному случаю уравнения Шредингера для молекулярного иона водорода H_2^+ [14]:

$$\partial^2 B_0 / \partial z^2 + 2Q(\delta(z - w_z/2) + \delta(z + w_z/2)) B_0 = -2EB_0, \quad (11)$$

где

$$Q = -i\tilde{\gamma}_0 w_z / (2\Lambda_{n,m}), \quad E = (\delta\omega_{n,m} + i\gamma_{n,m} + i\nu_{ea}) / (2\Lambda_{n,m})$$

и $\delta(z)$ — дельта-функция. Согласно [14], решение уравнения (11) можно представить как линейную комбинацию двух функций

$$\begin{aligned} B_0 = B_0^{(1)} + B_0^{(2)} &= D_1 \exp(-\kappa|z - w_z/2|) \\ &+ D_2 \exp(-\kappa|z + w_z/2|), \quad \kappa = \sqrt{-2E}. \end{aligned} \quad (12)$$

Функция B_0 непрерывна, но имеет разрывы своей производной в точках $z = \pm w_z/2$. В уравнении (11) также существуют интегрируемые особенности, связанные с вкладами дельта-функций δ . Разрывы производной функции (12), определяемые величиной κ , должны быть такими, чтобы они компенсировались вкладами двойного дельта-потенциала. Поведение $dB_0^{(k)}/dz$ ($k = 1, 2$) в окрестности $z = \pm w_z/2$ можно оценить, подставив (12) в (11) и проинтегрировав вокруг этих точек в диапазоне от $-\varepsilon \pm w_z/2$ до $\pm w_z/2 + \varepsilon$, где ε — бесконечно малая величина. Эта процедура дает два условия для изменения производной при прохождении координаты z в положительном направлении $(d \ln B_0^{(k)}/dz)_{+\varepsilon} - (d \ln B_0^{(k)}/dz)_{-\varepsilon} + 2QB_0|_{z=\mp w_z/2} = 0$, $k = 1, 2$. Итак, в первой и второй точках:

$$2\kappa D_1 = 2Q(D_1 + D_2 \exp(-\kappa|w_z|)),$$

$$2\kappa D_2 = 2Q(D_1 \exp(-\kappa|w_z|) + D_2).$$

Определитель этой системы приводит к искомому дисперсионному уравнению

$$\kappa_{\pm} = Q(1 \pm \exp(-\kappa_{\pm} w_z)), \quad (13)$$

где верхний знак соответствует симметричному состоянию с $C_1/C_2 = 1$. Значительно выше порога неустойчивости $Qw_z \gg 1$, решение уравнения (13) примерно равно $\kappa_+ \approx Q$, что позволяет найти в явном виде инкремент

неустойчивости

$$\gamma_{n,m} = \tilde{\gamma}'_0 \tilde{\gamma}''_0 \frac{w_z^2}{2\Lambda_{n,m}} - v_{ea} \quad (14)$$

и поправку к собственной частоте $\omega_{n,m}$

$$\delta\omega_{n,m} = \frac{\tilde{\gamma}''^2 - \tilde{\gamma}_0'^2}{4\Lambda_{n,m}} w_z^2. \quad (15)$$

Используя уравнение (14), проанализируем возможность нелинейного возбуждения моды шепчущей галереи ВГ-волны при ЭЦРН на токамаке ASDEX-Upgrade [4]. На рис. 2 показана зависимость инкремента неустойчивости от мощности в этих условиях. Пороговая мощность равна 0.352 MW, что существенно ниже мощности использованных мегаваттных пучков [4].

Таким образом, проанализирован новый сценарий неустойчивости обыкновенной СВЧ-волны с частотой, превышающей частоту фундаментального ЭЦ-резонанса, в плазменном блобе, который имеет аксиальную симметрию. В рамках сценария распад волны накачки приводит к появлению моды шепчущей галереи верхней гибридной волны, двумерно запертой в плазменном объеме, и сильно затухающих вынужденных колебаний. С помощью предложенной модели получено выражение для инкремента этого нелинейного явления. Полученные результаты могут быть полезны при интерпретации аномального рассеяния СВЧ-волн на границе плазмы, которое было скоррелировано с возбуждением краевых локализованных мод [2] и наблюдалось на токамаках ASDEX-Upgrade и TCV [4,5]. Они также могут быть использованы при анализе сильного аномального поглощения СВЧ-волн в плазменном блобе, которое было обнаружено в модельных экспериментах на линейной установке [15].

Финансирование работы

Исследование выполнено при поддержке гранта РНФ № 23-72-00024.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] F. Wagner, Plasma Phys. Controll. Fusion, **49**, B1 (2007). DOI: 10.1088/0741-3335/49/12B/S01
- [2] A.W. Leonard, Phys. Plasmas, **21**, 090501 (2014). DOI: 10.1063/1.4894742
- [3] <https://www.iter.org/machine/supporting-systems/external-heating-systems>
- [4] S.K. Hansen, S.K. Nielsen, J. Stober, J. Rasmussen, M. Stejner, M. Hoelzl, T. Jensen and the ASDEX Upgrade Team, Nucl. Fusion, **60**, 106008 (2020). DOI: 10.1088/1741-4326/aba802
- [5] A. Clod, M.G. Senstius, A.H. Nielsen, R. Ragona, A.S. Thrysøe, U. Kumar, S. Coda, S.K. Nielsen, Phys. Rev. Lett., **132**, 135101 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevLett.132.135101
- [6] E.Z. Гусаков, А.Ю. Попов, УФН, **190** (1), 396 (2020). DOI: 10.3367/UFNr.2019.05.038572 [E.Z. Gusakov, A.Yu. Popov, Phys. Usp., **63** (1), 365 (2020). DOI: 10.3367/UFNe.2019.05.038572].
- [7] А.Ю. Попов, Е.З. Гусаков, А.А. Наговицын, Л.В. Симончик, М.С. Усаёнок, ЖЭТФ, **166** (5), 748 (2024). DOI: 10.31857/S0044451024110178
- [8] J.R. Pinzón, T. Happel, P. Hennequin, C. Angioni, T. Estrada, A. Lebschy, U. Stroth and the ASDEX Upgrade Team, Nucl. Fusion, **59**, 074002 (2019). DOI: 10.1088/1741-4326/ab227c
- [9] A. Kirk, G.F. Counsell, G. Cunningham, J. Dowling, M. Dunstan, H. Meyer, M. Price, S. Saarelma, R. Scannell, M. Walsh, H.R. Wilson and the MAST team, Plasma Phys. Controll. Fusion, **49**, 1259 (2007). DOI: 10.1088/0741-3335/49/8/011
- [10] А.Ю. Попов, Н.В. Теплова, Письма в ЖТФ, **50** (1), 29 (2024). DOI: 10.61011/PJTF.2024.01.56922.19658 [A.Yu. Popov, N.V. Teplova, Tech. Phys. Lett., **50** (1), 24 (2024). DOI: 10.61011/TPL.2024.01.57828.19658].
- [11] D.G. Swanson, *Plasma waves*, 2nd ed. (CRC Press, 2003).
- [12] K.G. Budden, H.G. Martin, Proc. Roy. Soc. Lond. A, **265** (1323), 554 (1962). <https://www.jstor.org/stable/2414281>
- [13] А.Ю. Попов, Физика плазмы, **48** (1), 27 (2022). DOI: 10.31857/S0367292122010115 [A.Yu. Popov, Plasma Phys. Rep., **48**, 25 (2022). DOI: 10.1134/S1063780X22010093].
- [14] A.A. Frost, J. Chem. Phys., **25**, 1150 (1956). DOI: 10.1063/1.1743167
- [15] A.B. Altukhov, V.I. Arkhipenko, A.D. Gurchenko, E.Z. Гусаков, A.Yu. Popov, L.V. Simonchik, M.S. Usachonak, Europhys. Lett., **126**, 15002 (2019). DOI: 10.1209/0295-5075/126/15002