

## Оптическая теорема и дихроизм вакуума в электромагнитном поле, рождающем пары

© И.А. Александров<sup>1,2</sup>, Д.В. Чубуков<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Санкт-Петербургский государственный университет,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Университет ИТМО,  
Санкт-Петербург, Россия

e-mail: i.aleksandrov@spbu.ru

Поступила в редакцию 08.05.2025 г.

В окончательной редакции 08.05.2025 г.

Принята к публикации 12.05.2025 г.

Исследована связь процессов распада фотона на электрон-позитронную пару и излучения фотона из вакуума с рождением пары во внешнем электромагнитном поле. Известно, что в том случае, когда внешнее поле не способно рождать частицы из вакуума в нулевом порядке по радиационному взаимодействию, вклад излучения также равен нулю, а вероятность распада фотона в соответствии с оптической теоремой можно связать с мнимой частью диаграммы Фейнмана второго порядка, содержащей фермионную петлю. В данной работе основное внимание уделено задаче с нестабильным вакуумом. Показано, что в этом случае утверждение оптической теоремы модифицируется, поскольку к вероятности распада фотона нужно прибавлять уже ненулевую вероятность излучения с рождением пары. В рамках численного расчета обе эти вероятности получены непертурбативно по взаимодействию с внешним переменным электрическим полем для различных поляризаций фотона. Результаты вычисления мнимой части однопетлевой диаграммы оказались в полном согласии с оптической теоремой. При этом показано, что приближение локально постоянного поля неприменимо в области низких энергий фотона и может давать существенную ошибку в высокоэнергетической области. В работе также проведен анализ явления дихроизма вакуума, т.е. зависимости вышеописанных вкладов от поляризации фотона.

**Ключевые слова:** квантовая электродинамика, сильные поля, нелинейные эффекты, дихроизм, поляризационный тензор, двулучепреломление.

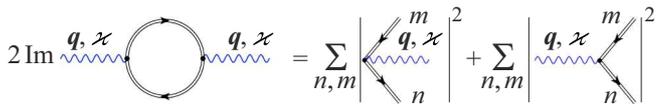
DOI: 10.61011/OS.2025.06.60917.8144-25

### 1. Введение

Описание электромагнитных взаимодействий в рамках квантовой теории поля включает в рассмотрение процессы с несохраняющимся числом частиц (электронов, позитронов, фотонов и т.д.). Например, в первом порядке по постоянной тонкой структуры  $\alpha$  в квантовой электродинамике (КЭД) присутствуют процессы излучения фотона электроном, поглощения фотона электроном, распада фотона на электрон-позитронную пару и др. Хорошо известно, что все эти элементарные реакции запрещены законами сохранения энергии и импульса в отсутствие каких-либо других взаимодействий [1]. Ситуация качественным образом изменяется, если мы вводим взаимодействие квантованного электрон-позитронного поля с внешним классическим электромагнитным полем. В этом случае вероятности всех процессов первого порядка по  $\alpha$ , вообще говоря, отличны от нуля, а теоретическое описание соответствующих эффектов в режиме сильного внешнего поля представляет собой крайне нетривиальную задачу (см., например, монографию [2], работу [3] и недавние обзоры [4–6]). Интерес к данной

проблеме обусловлен не только ее фундаментальным характером, но и развитием экспериментальных установок, в которых удастся создавать все более сильные электромагнитные поля, например, за счет генерации лазерного излучения (ссылки в [5,6]) или столкновения тяжелых ядер [7–9].

В настоящей работе мы интересуемся процессом распада фотона на пару (в первом порядке по  $\alpha$ ) и излучением фотона из вакуума с рождением пары в сильном электромагнитном поле. Данные два явления тесно связаны между собой по нескольким причинам. Во-первых, амплитуды таких процессов отличаются лишь комплексным сопряжением „волновой функции“ соответствующего фотона. Во-вторых, разность вероятностей данных двух реакций определяет вклад первого порядка по  $\alpha$  в число фотонов в конечном состоянии, как было показано в работе [10] (см. также [2]). В-третьих, сумма таких вероятностей может быть связана с мнимой частью однопетлевой диаграммы с двумя внешними фотонными линиями в соответствии с оптической теоремой. Подчеркнем, что в теории с нестабильным вакуумом утверждение оптической теоремы должно включать



**Рис. 1.** Запись оптической теоремы на языке диаграмм Фейнмана. Двойные линии отвечают электронным функциям во внешнем поле, а волнистые линии — начальному и конечному фотону с импульсом  $q$  и поляризацией  $\chi$ . Фермионные состояния  $n$  и  $m$  обычно характеризуются импульсами и спиновыми квантовыми числами на начальных временах  $t_{\text{in}} \rightarrow -\infty$ .

вероятности обоих процессов, хотя в стандартной КЭД без вакуумного рождения пар достаточно учитывать лишь вклад с распадом фотона [1]. На диаграммном языке это утверждение показано на рис. 1. В настоящей работе мы обсудим, как доказывается данное соотношение, и произведем расчеты двух отдельных вкладов в правой части равенства на рис. 1. С использованием оптической теоремы мы протестируем наш независимый численный подход для нахождения поляризационного тензора, который определяет левую часть равенства [11]. Помимо прямой проверки наших непертурбативных методов расчета это позволит исследовать зависимость процессов распада фотона и излучения с рождением пары от поляризации фотона. Тот факт, что вероятность распада фотона зависит от поляризации, называют дихроизмом вакуума [12]. Ниже мы исследуем явление дихроизма посредством численных непертурбативных расчетов. Дальнейшее развитие теоретических методов имеет большое значение для планирования экспериментов по наблюдению соответствующих нелинейных эффектов КЭД в сильных полях.

В тексте статьи мы используем единицы  $\hbar = c = 1$  ( $\hbar$  — постоянная Планка,  $c$  — скорость света), постоянная тонкой структуры  $\alpha = e^2/(4\pi)$ ,  $m$  и  $e < 0$  — масса и заряд электрона.

## 2. Теория со стабильным вакуумом. Постоянные скрещенные поля

Рассмотрим сначала относительно простой случай, когда внешнее электромагнитное поле не рождает пары из вакуума. Такая ситуация реализуется, например, в постоянном магнитном поле или в поле плоской электромагнитной волны [2]. В этом случае начальное состояние вакуума  $|0, \text{in}\rangle$  и конечное состояние  $|0, \text{out}\rangle$  совпадают с точностью до комплексного фазового множителя, который не влияет на физические наблюдаемые. Это состояние можно просто обозначить за  $|0\rangle$ . Пусть начальное состояние содержит фотон с импульсом  $q$  и поляризацией  $\chi$ . В рамках КЭД в представлении взаимодействия плотность числа фотонов в конечном состоянии имеет вид [2]

$$n_{k\lambda} = \langle 0 | c_{q\chi} S^\dagger c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} S c_{q\chi}^\dagger | 0 \rangle, \quad (1)$$

где  $k$  и  $\lambda$  задают импульс и поляризацию конечного фотона,  $c_{k\lambda}^\dagger$  — оператор рождения фотонов, а  $S$  — оператор рассеяния в представлении взаимодействия:

$$S = \mathcal{T} \exp \left[ -i \int d^4x \mathcal{H}_{\text{int}}(x) \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\mathcal{T}$  — операция хронологического упорядочивания,  $\mathcal{H}_{\text{int}}(x) = j^\mu(x) A_\mu(x)$  — оператор взаимодействия квантованных полей и  $j^\mu(x) = (e/2)[\bar{\psi}(x)\gamma^\mu, \psi(x)]$  — оператор плотности тока электрон-позитронного поля в присутствии внешнего классического поля  $A_\mu(x)$ . Как было показано в работе [10], в первом порядке по постоянной тонкой структуре  $\alpha$  величина (1) включает разность первого и второго слагаемых в правой части рис. 1, из которых в теории со стабильным вакуумом остается только отрицательный вклад. Таким образом, вклад первого порядка по  $\alpha$  — это со знаком минус квадрат модуля диаграммы распада фотона, просуммированный по конечным состояниям фермионов. Наличие нетривиальной зависимости этой величины от поляризации фотона означает, что имеет место явление дихроизма вакуума — фотоны различных поляризаций распадаются с разными вероятностями.

Во втором же порядке по  $\alpha$  плотность (1) определяется квадратом модуля однопетлевой диаграммы, изображенной в левой части на рис. 1, но с конечным состоянием фотона  $k, \lambda$  [11]. Амплитуда перехода для этой диаграммы связана с поляризационным тензором соотношением

$$T(q, k) = \frac{1}{\sqrt{4q_0k_0}} \varepsilon_\mu(q) \Pi^{\mu\nu}(q, k) \varepsilon_\nu^*(k), \quad (3)$$

где  $\varepsilon_\mu(q)$  и  $\varepsilon_\nu(k)$  — 4-векторы поляризации начального и конечного фотонов соответственно. Задача о нахождении этой амплитуды сводится к вычислению поляризационного тензора  $\Pi^{\mu\nu}(q, k)$  в заданном внешнем поле. Рассмотрим в качестве примера конкретную конфигурацию внешнего поля, не рождающего пары из вакуума. Будем считать, что постоянное электрическое поле  $\mathbf{E}$  величины  $E_0$  направлено вдоль оси  $x$ , а совпадающее с ним по величине магнитное поле  $\mathbf{H}$  направлено вдоль оси  $y$ . Поскольку в таком поле релятивистские инварианты  $\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2$  и  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$  в точности равны нулю, хорошо известно, что вакуум является стабильным [1–3]. Поляризационный оператор для такого случая был вычислен аналитически в работах [13–16]. Подразумевая, что фотон распространяется вдоль оси  $z$ , можем записать результат в следующей форме:

$$\begin{pmatrix} \Pi^{11}(q, k) \\ \Pi^{22}(q, k) \end{pmatrix} = -\frac{16\pi^3\alpha}{3} m^2 \delta(k - q) \chi^{2/3} \begin{pmatrix} A - B \\ A + 2B \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где квантовый параметр нелинейности равен

$$\chi = \frac{2|eE_0|q^0}{m^3}, \quad (5)$$

а также введены обозначения

$$A = \int_{-1}^1 dv w^{1/3} f'(u), \quad B = \int_{-1}^1 dv w^{-2/3} f'(u), \quad (6)$$

$$w = \frac{4}{1-v^2}, \quad u = \left(\frac{w}{\chi}\right)^{2/3}, \quad (7)$$

$$f(u) = i \int_0^\infty d\tau e^{-i(u\tau + \tau^3/3)} = \pi \text{Gi}(u) + i\pi \text{Ai}(u). \quad (8)$$

Здесь  $\text{Gi}(u)$  и  $\text{Ai}(u)$  — вещественнозначные функции Скорера [17] и Эйри соответственно.

Вычислим теперь удвоенную мнимую часть амплитуды (3) при  $k = q$  в расчете на единицу времени и единицу объема, например, для фотона, поляризованного вдоль оси  $x$  ( $\mu = \nu = 1$ ):

$$\frac{2 \text{Im} T^{(1)}(q, q)}{VT} = -\frac{\alpha m^2 \chi^{2/3}}{3\pi q^0} \text{Im}(A - B). \quad (9)$$

В силу четности подынтегральных функций в (6) можно записать

$$\begin{aligned} \text{Im}(A - B) &= 2\pi \int_0^1 dv \frac{w-1}{w^{2/3}} \text{Ai}'(u) \\ &= 4\pi \int_4^\infty dw \frac{w-1}{w^{5/3} \sqrt{w(w-4)}} \text{Ai}'(u). \end{aligned} \quad (10)$$

Если теперь перейти к интегралу по переменной  $u$ , то получим

$$\begin{aligned} \frac{2 \text{Im} T^{(1)}(q, q)}{VT} &= -\frac{2\alpha m^2 \chi}{q^0} \int_{u_0}^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \frac{w-1}{w \sqrt{w(w-4)}} \text{Ai}'(u) \\ &= -\frac{\alpha m^2 \chi}{8q^0} \int_{u_0}^\infty \frac{du}{\sqrt{u}} \frac{4w-1}{w \sqrt{w(w-1)}} \text{Ai}'(u), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $u_0 = (4/\chi)^{2/3}$  и  $w = (\chi/4)u^{3/2}$ . Выражение (11) полностью совпадает с вероятностью распада поляризованного фотона с рождением пар в расчете на единицу времени из работы Ритуса [3] (пункт 5.23). Для второй возможной поляризации также нетрудно убедиться в согласии результатов, что подтверждает справедливость оптической теоремы в ее простейшей формулировке: удвоенная мнимая часть диаграммы с замкнутой фермионной петлей равна полной вероятности распада начального фотона на электрон-позитронную пару. Если же внешнее поле нарушает стабильность вакуума, то к вероятности распада требуется добавлять вероятность рождения пары с излучением фотона. Анализ этого более общего случая посвящена дальнейшая часть настоящей работы.

В заключение раздела отметим, что замкнутые выражения (4) часто используются для приближенного описания радиационных процессов в неоднородных полях. Для этого в качестве  $\chi$  берут локальное значение параметра (5), а затем интегрируют вклады (4) по времени и пространственным координатам [12,18,19]. Такой подход называют приближением локально постоянного поля (locally-constant field approximation, LCFA).

### 3. Теория с нестабильным вакуумом

Если внешнее поле рождает пары из вакуума в нулевом порядке по  $\alpha$ , то начальное и конечное гейзенберговские состояния вакуума  $|0, \text{in}\rangle$  и  $|0, \text{out}\rangle$  отличаются уже не только фазой — в этом случае  $|\langle 0, \text{out} | 0, \text{in}\rangle| < 1$ , и исходный вакуум с ненулевой вероятностью переходит в состояния с реальными частицами [20]. Выражение (1) теперь записывается в виде

$$n_{k\lambda} = \langle 0, \text{in} | c_{q\lambda} S^\dagger c_{k\lambda}^\dagger c_{k\lambda} S c_{q\lambda}^\dagger | 0, \text{in}\rangle. \quad (12)$$

В первом порядке по  $\alpha$  вклад в плотность числа фотонов имеет вид [10]

$$\begin{aligned} n_{k,\lambda}^{(1)} &= e^2 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta_{\lambda x} \sum_{n,m} \left| \int d^4x \, {}_+\bar{\varphi}_n(x) \gamma^\mu f_{q,x,\mu}^*(x) - \varphi_m(x) \right|^2 \\ &\quad - e^2 \delta(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \delta_{\lambda x} \sum_{n,m} \left| \int d^4x \, {}_+\bar{\varphi}_n(x) \gamma^\mu f_{q,x,\mu}(x) - \varphi_m(x) \right|^2, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $f_{q,x,\mu}(x)$  — “волновая функция” фотона с импульсом  $\mathbf{q}$  и поляризацией  $x$ , а  ${}_+\bar{\varphi}_n(x)$  и  $-\varphi_m(x)$  — in-решения уравнения Дирака во внешнем поле, заданные в асимптотическом прошлом квантовыми числами  $n$  и  $m$  (эти числа обычно включают импульс и спиновое квантовое число). На временах  $x^0 \rightarrow +\infty$  in-решения становятся суперпозициями решений свободного уравнения Дирака с разными знаками энергии. Примесь решения с противоположным знаком энергии означает как раз наличие вакуумного рождения пар [2]. Вклад в полное число фотонов получается интегрированием (13) по  $\mathbf{k}$  и домножением на фактор  $(2\pi)^3/V$ , где  $V$  — объем системы. Если требуется рассматривать пространственно-локализованное внешнее поле, то начальные однофотонные состояния в (12) следует выбирать в форме волновых пакетов. Два слагаемых в формуле (13) отвечают диаграммам в правой части рис. 1. Знак минус перед второй суммой связан с тем, что в результате возможного распада фотона число конечных квантов уменьшается. Первое слагаемое положительное, и его можно интерпретировать как вынужденное излучение из вакуума. Заметим, что величина  $n_{k,\lambda}^{(1)}$  содержит также вклады вакуумного излучения в отсутствие начального фотона [2,10,21–27], но мы не учитываем эти слагаемые, поскольку они не содержат  $\delta(\mathbf{k}-\mathbf{q})$ . При детектировании фотонов, распространяющихся вдоль направления  $\mathbf{q}$

в малой окрестности по углам, вакуумные вклады будут пренебрежимо малы.

Теперь обратимся к общему выражению для поляризационного тензора во внешнем поле с учетом нестабильности вакуума [11]:

$$\Pi^{\mu\nu}(q, k) = ie^2 \int d^4x \int d^4y e^{-iqx} e^{iky} \text{Tr} [\gamma^\mu \times S_{\text{in}}(x, y) \gamma^\nu S_{\text{in}}(y, x)] - \{\text{вклад с нулевым полем}\}. \quad (14)$$

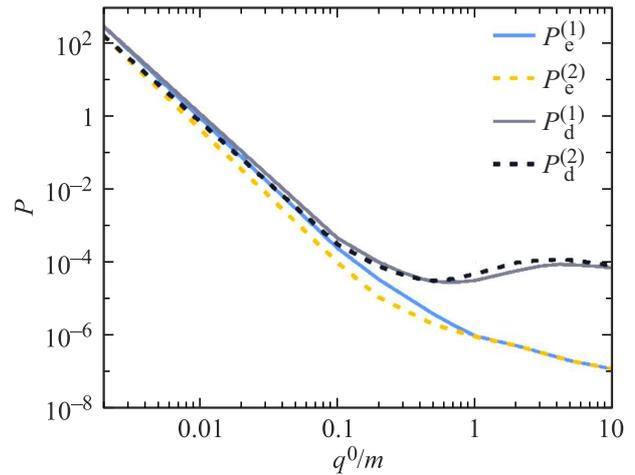
Здесь  $S_{\text{in}}(x, y) = i \langle 0, \text{in} | \mathcal{T}[\psi(x) \bar{\psi}(y)] | 0, \text{in} \rangle$  — функция Грина электрона во внешнем поле относительно in-вакуума. Мы будем рассматривать внешнее переменное электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$ , а импульс фотона опять направим вдоль оси  $z$ . Поляризации фотона вдоль  $x$  и вдоль  $y$  будем обозначать цифрами 1 и 2 соответственно. Обозначим за  $P_d^{(1,2)}$  вероятность распада фотона, а за  $P_e^{(1,2)}$  — полную вероятность излучения такого же фотона с рождением пары. В соответствии с оптической теоремой, сформулированной выше, имеем

$$P_d^{(1)} + P_e^{(1)} = \frac{1}{V} \frac{1}{q^0} \text{Im} \Pi^{11}(q, q). \quad (15)$$

Аналогичное соотношение верно и для поляризации 2. В правой части объем  $V$  сокращается в силу наличия дельта-функции  $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{q})$  в  $\Pi^{\mu\nu}(q, k)$ . В разд. 2 мы проверили данное утверждение в случае, когда  $P_e^{(1,2)} = 0$ . Для доказательства оптической теоремы достаточно рассмотреть интегрирование в формуле (14) по области  $x^0 > y^0$  и области  $x^0 < y^0$ . Для каждого из слагаемых можно использовать спектральное разложение пропагаторов  $S_{\text{in}}(x, y)$ . При вычислении мнимой части интеграл по каждой полуплоскости легко переписывается через интеграл по всем  $x^0$  и  $y^0$  и ответ записывается в виде квадрата модуля диаграммы первого порядка.

Вычисление поляризационного тензора в выбранном нами внешнем поле подробно описано в работе [11]. Мы также используем спектральное разложение и находим решения уравнения Дирака численно. Важно подчеркнуть, что внешнее поле учитывается полностью непертурбативно. Аналогичным образом, хотя и существенно проще с технической точки зрения, мы находим отдельные вероятности  $P_d^{(1,2)}$  и  $P_e^{(1,2)}$ . Численный метод в этом случае подробно описан в работах [10,26]. В следующем разделе мы сравним результаты численных расчетов, убедимся в выполнении соотношений (15) и исследуем свойства вакуумного дихроизма. В заключение будет проведено сравнение с методом LCFA, в рамках которого выражения (4) интегрируются по времени с учетом локальной зависимости параметра  $\chi$  через зависимость внешнего поля от времени.

Отметим, что во втором порядке по  $\alpha$  величина (12) определяется квадратом модуля диаграммы с замкнутой фермионной петлей. В частности, соответствующий



**Рис. 2.** Зависимость вероятностей распада фотона  $P_d^{(1,2)}$  и излучения фотона с рождением пары  $P_e^{(1,2)}$  от энергии фотона  $q^0$ . Индексы 1 и 2 обозначают поляризацию вдоль внешнего электрического поля (ось  $x$ ) и перпендикулярно полю (ось  $y$ ). Фотон распространяется вдоль оси  $z$ ; внешнее поле задается выражением (16). Выбраны следующие значения параметров:  $E_0 = 0.2E_c$ ,  $\tau = 2m^{-1}$ ,  $\omega = 0.2m$  ( $E_c$  — швингеровское значение напряженности).

вклад описывает явление вакуумного двулучепреломления [11,28–40].

#### 4. Численные результаты и обсуждение

Будем рассматривать переменное электрическое поле, направленное вдоль оси  $x$  и заданное с помощью следующей  $x$ -проекции векторного потенциала:

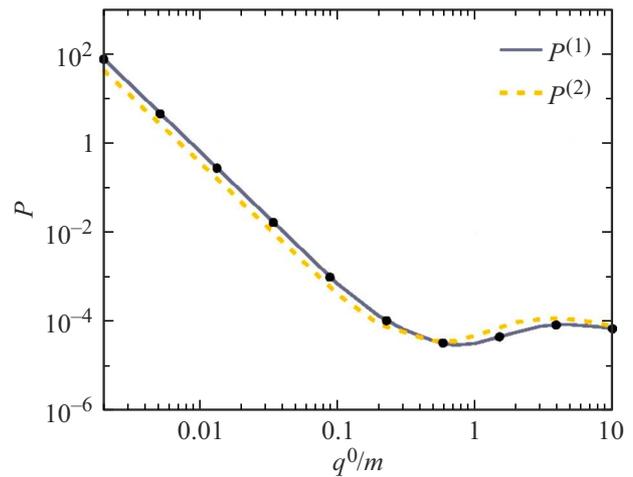
$$\mathcal{A}_x(t) = \frac{E_0}{\omega} e^{-t^2/\tau^2} \sin \omega t, \quad (16)$$

где  $E_0$  — амплитуда импульса,  $\tau$  — характерная длительность и  $\omega$  — несущая частота. Проекция электрического поля на ось  $x$  равна  $E_x(t) = -\mathcal{A}'_x(t)$ . В выбранной нами системе единиц частота, энергия и импульс имеют размерность  $m$ ; критическое (швингеровское) значение напряженности равно  $E_c = m^2/|e| \approx 1.3 \times 10^{18}$  В/м.

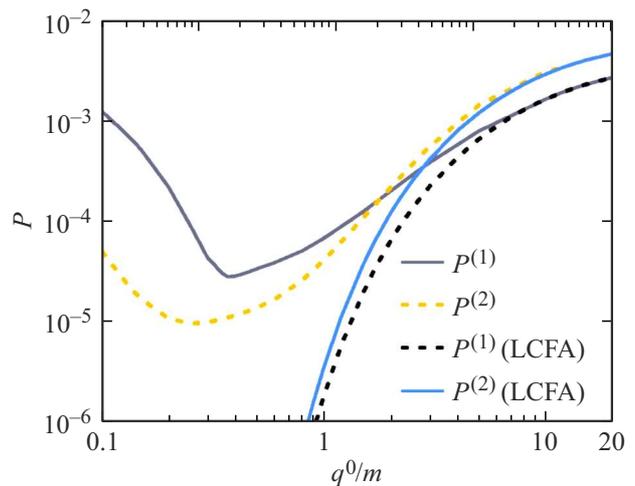
В первую очередь нами были проведены расчеты отдельных вкладов в правой части рис. 1, т.е. получены вероятности распада фотона  $P_d^{(1,2)}$  и излучения фотона с рождением пары  $P_e^{(1,2)}$  для двух различных поляризаций (1 — вдоль  $x$ , 2 — вдоль  $y$ ). Отметим, что в силу конечной длительности внешнего электрического импульса, речь идет о полных (безразмерных) вероятностях. На рис. 2 представлены зависимости этих величин от энергии фотона для следующего набора параметров внешнего поля:  $E_0 = 0.2E_c$ ,  $\tau = 2m^{-1}$ ,  $\omega = 0.2m$ . Мы видим несколько характерных особенностей полученных графиков. Во-первых, при малых энергиях фотона вероятности растут пропорционально  $(1/q_0)^3$ . Это свойство

было подробно описано в работах [10,24,26], где соответствующая асимптотика была установлена аналитически. Важным обстоятельством является то, что такое поведение возможно лишь в полях, рождающих пары; в противном случае вероятность быстро стремится к нулю при  $q^0 \rightarrow 0$ . В терминах числа фотонов (12) наблюдаемый нами рост означает, например, что при рождении пары может излучиться также очень большое число мягких фотонов. Здесь нужно отметить, что при  $P \gtrsim 1$  величину  $P$ , очевидно, уже нельзя интерпретировать как вероятность и требуется учет вкладов более высоких порядков. Во-вторых, при малых  $q^0$  мы имеем  $P_d^{(1,2)} \approx P_e^{(1,2)}$  (сплошные и штриховые линии на рис. 2 попарно совпадают). Этот факт автоматически следует из того, что, как отмечалось во Введении, диаграммы в правой части рис. 1 отличаются лишь комплексным сопряжением фотонной функции, так что при разложении по степеням  $1/q^0$  нечетные вклады будут совпадать, а четные — отличаться знаком. Далее при увеличении энергии фотона величины  $P$  убывают, но после определенной энергии вероятность распада фотона  $P_d^{(1,2)}$  начинает расти. Данный рост привычным образом имеет место в задачах со стабильным вакуумом сразу при  $q^0 \geq 0$ . Например, в скрещенных полях вероятность (11) на малых энергиях ведет себя, как  $(\chi/q^0)\exp(-8/3\chi)$ , где при фиксированной величине поля  $\chi \sim q^0$ . Стоит сразу отметить, что при больших энергиях эта же вероятность пропорциональна  $\chi^{2/3}/q^0 \sim (q^0)^{-1/3}$ , что качественно объясняет тот факт, что кривые  $P_d^{(1,2)}$  на рис. 2 возрастают лишь на довольно ограниченном интервале энергий фотона, когда параметр  $\chi = |eE_0|q^0/m^3$  изменяется приблизительно от 0.1 до 1 (в скрещенных полях параметр  $\chi$  в (5) содержал множитель 2 в силу наличия магнитной компоненты). Подчеркнем, что сравнение со случаем скрещенных полей для выбранных параметров возможно лишь качественное, поскольку длительность  $\tau$  не позволяет считать внешнее поле локально постоянным (см. ниже). Наконец, заметим, что при достаточно больших энергиях фотона вероятность распада на несколько порядков превышает вероятность излучения с рождением пары, так что  $P_e^{(1,2)} + P_d^{(1,2)} \approx P_d^{(1,2)}$  и в оптической теореме можно не учитывать канал излучения. Несовпадение кривых  $P_d^{(1)}$  и  $P_d^{(2)}$  свидетельствует о дихроизме вакуума. Мы видим, что разность этих двух величин при изменении  $q^0$  меняет знак, что говорит о нетривиальном поведении сигнала дихроизма и должно учитываться при поиске наиболее выгодных сценариев для экспериментального наблюдения эффекта.

На рис. 3 представлены суммы вероятностей  $P^{(1,2)} = P_e^{(1,2)} + P_d^{(1,2)}$  для двух поляризации (сплошная и штриховая кривые). Значения этих сумм можно напрямую сравнить с результатами вычисления мнимой части поляризационного тензора в выбранном внешнем поле. Посредством независимого вычисления петлевой диаграммы методом из работы [11] и с учетом оптической теоремы нами были получены значения для  $P^{(1)}$ ,



**Рис. 3.** Зависимость суммы вероятностей  $P^{(1,2)} = P_e^{(1,2)} + P_d^{(1,2)}$  от энергии фотона. Точками отмечены данные, полученные независимым вычислением мнимой части поляризационного тензора  $\Pi^{11}$  с применением оптической теоремы. Параметры внешнего поля выбраны так же, как на рис. 2.



**Рис. 4.** Зависимость суммы вероятностей  $P^{(1,2)} = P_e^{(1,2)} + P_d^{(1,2)}$  от энергии фотона аналогично рис. 3, но для другого набора параметров:  $E_0 = 0.4E_c$ ,  $\tau = 10m^{-1}$ ,  $\omega = 0.1m$ . Помимо результатов прямых численных расчетов на графике представлены кривые, полученные в рамках приближения LCFA.

изображенные на рис. 3 точками. Два различных подхода оказались в полном согласии между собой, что указывает на высокую степень надежности используемых численных методов. Как отмечалось выше, мы наблюдаем рост вероятностей при движении к малым энергиям, который возникает в полях, рождающих частицы. На больших энергиях суммарные вероятности определяются в первую очередь каналом распада фотона.

В примере выше длительность импульса и „частота“ связаны соотношением  $\omega\tau = 0.4$ , что означает, что в

таком импульсе нельзя выделить медленную огибающую. Фактически, внешнее поле почти не изменяется при дальнейшем уменьшении  $\omega$ , так что характерная частота определяется параметром  $\tau$  и имеет величину порядка  $m$ . Тогда отношение амплитуды поля к частоте в единицах  $m/|e|$  равно  $\xi \sim 0.2$ . Для применимости LCFA требуется, чтобы поле изменялось медленно, т. е. нужно условие  $\xi \gg 1$  [3] (или хотя бы  $\xi \gtrsim 1$ ). Рассмотрим теперь поле с большей амплитудой и меньшей частотой. На рис. 4 представлены аналогичные зависимости, что и на рис. 3, но для следующих параметров:  $E_0 = 0.4E_c$ ,  $\tau = 10m^{-1}$ ,  $\omega = 0.1m$ . Электрический импульс имеет качественно ту же форму, что и раньше, но теперь его частота порядка  $\omega = 0.1m$ , что дает  $\xi = |e|E_0/(m\omega) = 4$ . На рис. 4 также представлены приближенные кривые, полученные в рамках LCFA. Мы видим, что при достаточно больших энергиях фотона LCFA согласуется с результатами точных расчетов. Конечно, в области малых энергий согласие невозможно, поскольку LCFA полностью игнорирует эффект неустойчивости вакуума. В терминах  $\chi$  условие применимости LCFA на больших энергиях имеет вид  $\chi^2 \gg E_0/E_c$  [3]. Мы наблюдаем высокую точность при энергии порядка  $5m-10m$ , что отвечает  $\chi = 2-4$  и согласуется с данным критерием. Отдельно отметим, что при отклонении от предсказаний LCFA точные кривые имеют довольно нетривиальное поведение, включающее пересечение кривых, как в предыдущем примере, т. е. смену знака сигнала дихроизма вакуума.

## 5. Заключение

В данной работе были вычислены вероятности распада фотона и излучения фотона с рождением пары во внешнем электрическом поле, зависящем от времени. В частности, исследовалась зависимость вероятностей от энергии и поляризации фотона. Сумма вероятностей была также получена независимым расчетом мнимой части поляризационного тензора в заданном внешнем поле. Было показано, что вышеописанные процессы зависят от поляризации фотона, что является проявлением дихроических свойств вакуума. В рамках приближения локально постоянного поля была вычислена мнимая часть поляризационного тензора и было установлено, что данный приближенный подход не учитывает рост при малых энергиях фотона, который связан с неустойчивостью вакуума. В режиме сильного медленно изменяющегося поля и высоких энергий фотона было обнаружено согласие приближенного метода и точного численного подхода.

## Финансирование работы

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ) в рамках проекта № 23-72-01068.

## Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

## Список литературы

- [1] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Теоретическая физика. Т. IV. Квантовая электродинамика* (Наука, М., 1989).
- [2] Д.М. Гитман, Е.С. Фрадкин, Ш.М. Шварцман. *Квантовая электродинамика с нестабильным вакуумом* (Наука, М., 1991).
- [3] В.И. Ритус. Труды ФИАН, **111**, 5 (1979).
- [4] A. Gonoskov, T.G. Blackburn, M. Marklund, S.S. Bulanov. *Rev. Mod. Phys.*, **94**, 045001 (2022). DOI: 10.1103/RevModPhys.94.045001
- [5] A. Fedotov, A. Ilderton, F. Karbstein, B. King, D. Seipt, H. Taya, G. Torgrimsson. *Phys. Rep.*, **1010**, 1 (2023). DOI: 10.1016/j.physrep.2023.01.003
- [6] С.В. Попруженко, А.М. Федотов. УФН, **193**, 491 (2023). DOI: 10.3367/UFN.2023.03.039335
- [7] M. Lestinsky et al. *Eur. Phys. J. Spec. Top.*, **225**, 797 (2016). DOI: 10.1140/epjst/e2016-02643-6
- [8] X. Ma et al. *Nucl. Instrum. Methods Phys. Res., Sect. B* **408**, 169 (2017). DOI: 10.1016/j.nimb.2017.03.129
- [9] G.M. Ter-Akopian, W. Greiner, I.N. Meshkov, Y.T. Oganessian, J. Reinhardt, G.V. Trubnikov. *Int. J. Mod. Phys. E*, **24**, 1550016 (2015). DOI: 10.1142/S0218301315500160
- [10] I.A. Aleksandrov, A. Di Piazza, G. Plunien, V.M. Shabaev. *Phys. Rev. D*, **105**, 116005 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevD.105.116005
- [11] I.A. Aleksandrov, D.V. Chubukov, V.M. Shabaev. Готовится к публикации.
- [12] S. Bragin, S. Meuren, C.H. Keitel, A. Di Piazza. *Phys. Rev. Lett.*, **119**, 250403 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevLett.119.250403
- [13] И.А. Баталин, А.Е. Шабад. Препр. ФИАН, **166** (1968).
- [14] Н.Б. Нарожный. ЖЭТФ, **55**, 714 (1968).
- [15] V.I. Ritus. *Ann. Phys.*, **69**, 555 (1972). DOI: 10.1016/0003-4916(72)90191-1
- [16] S. Meuren, C.H. Keitel, A. Di Piazza. *Phys. Rev. D*, **88**, 013007 (2013). DOI: 10.1103/PhysRevD.88.013007
- [17] R.S. Scorer. *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **3**, 107 (1950). DOI: 10.1093/qjmam/3.1.107
- [18] I.A. Aleksandrov, V.M. Shabaev. ЖЭТФ, **166**, 182 (2024). DOI: 10.31857/S0044451024080042
- [19] И.А. Александров, Д.В. Чубуков, А.Г. Ткачев, А.И. Клочай. *Опт. и спектр.*, **132**, 957 (2024). DOI: 10.61011/OS.2024.09.59194.7009-24
- [20] J. Schwinger. *Phys. Rev.*, **82**, 664 (1951). DOI: 10.1103/PhysRev.82.664
- [21] A. Di Piazza, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel. *Phys. Rev. D*, **72**, 085005 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevD.72.085005
- [22] A.M. Fedotov, N.B. Narozhny. *Phys. Lett. A*, **362**, 1 (2007). DOI: 10.1016/j.physleta.2006.09.085
- [23] F. Karbstein, R. Shaisultanov. *Phys. Rev. D*, **91**, 113002 (2015). DOI: 10.1103/PhysRevD.91.113002
- [24] A. Otto, B. Kämpfer. *Phys. Rev. D*, **95**, 125007 (2017). DOI: 10.1103/PhysRevD.95.125007
- [25] H. Gies, F. Karbstein, C. Kohlfürst. *Phys. Rev. D*, **97**, 036022 (2018). DOI: 10.1103/PhysRevD.97.036022

- [26] I.A. Aleksandrov, G. Plunien, V.M. Shabaev. *Phys. Rev. D*, **100**, 116003 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevD.100.116003
- [27] I.A. Aleksandrov, A.D. Panferov, S.A. Smolyansky. *Phys. Rev. A*, **103**, 053107 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevA.103.053107
- [28] J.S. Toll. Ph.D. thesis, Princeton Univ., 1952.
- [29] R. Baier, P. Breitenlohner. *Acta Phys. Austriaca*, **25**, 212 (1967).
- [30] R. Baier, P. Breitenlohner. *Nuovo Cimento B*, **47**, 117 (1967). DOI: 10.1007/BF02712312
- [31] В.Н. Байер, А.И. Мильштейн, В.М. Страховенко. *ЖЭТФ*, **69**, 1893 (1975).
- [32] W. Becker, H. Mitter. *J. Phys. A*, **8**, 1638 (1975). DOI: 10.1088/0305-4470/8/10/017
- [33] Е.Б. Александров, А.А. Ансельм, А.Н. Москалев. *ЖЭТФ*, **89**, 1181 (1985).
- [34] A. Di Piazza, K.Z. Hatsagortsyan, C.H. Keitel. *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 083603 (2006). DOI: 10.1103/PhysRevLett.97.083603
- [35] T. Heinzl, B. Liesfeld, K. U. Amthor, H. Schwöerer, R. Sauerbrey, A. Wipf. *Opt. Commun.*, **267**, 318 (2006). DOI: 10.1016/j.optcom.2006.06.053
- [36] F. Karbstein, H. Gies, M. Reuter, M. Zepf. *Phys. Rev. D*, **92**, 071301(R) (2015). DOI: 10.1103/PhysRevD.92.071301
- [37] H.-P. Schlenvoigt, T. Heinzl, U. Schramm, T. E. Cowan, R. Sauerbrey. *Phys. Scr.*, **91**, 023010 (2016). DOI: 10.1088/0031-8949/91/2/023010
- [38] F. Karbstein, E.A. Mosman. *Phys. Rev. D*, **101**, 113002 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevD.101.113002
- [39] F. Karbstein, D. Ullmann, E.A. Mosman, M. Zepf. *Phys. Rev. Lett.*, **129**, 061802 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevLett.129.061802
- [40] N. Ahmadinia, T.E. Cowan, J. Grenzer, S. Franchino-Viñas, A. Laso Garcia, M. Šmíd, T. Toncian, M.A. Trejo, R. Schützhold. *Phys. Rev. D*, **108**, 076005 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevD.108.076005