

01

Баланс энергии при когерентном рассеянии излучения системой многих частиц

© Л.А. Апресян, В.И. Красовский, С.И. Расмагин

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: leon_apresyan@mail.ru

Поступило в Редакцию 8 ноября 2024 г.

В окончательной редакции 21 февраля 2025 г.

Принято к публикации 24 февраля 2025 г.

С использованием единообразного описания полей падающей и рассеянных волн рассмотрены условия энергетического баланса для средних по времени потоков энергии при рассеянии монохроматической волны, создаваемой произвольным источником излучения на системе взаимодействующих через рассеянные поля частиц. Получена „лемма дуальности“ для локальных значений энергетических потоков, аналогичная лемме Лоренца для полей от двух источников и определяющая перераспределение потоков энергии поля между рассеивателями и источником. Полный поток энергии разделяется на „энергетические“ и „интерференционные“ части, каждой из которых отвечает своя локализованная на частицах функция источников, и которые сохраняются в процессе распространения в свободном пространстве. Описаны варианты оптической теоремы, отвечающие различным выборам подсистем (кластеров), а также их соотношение с фактором Перселла. Показано, в частности, что для произвольного кластера из когерентно взаимодействующих частиц можно записать обычную форму оптической теоремы, выразив мощность экстинкции в виде суммы мощностей поглощения каждой частицей и мощности рассеяния, однако при этом экстинкция и рассеяние становятся зависящими от интерференционных слагаемых, связанных с выбором конкретного кластера внутри рассматриваемой системы. Конечным результатом является детальная картина энергообмена для произвольно выбранных кластеров из взаимодействующих частиц.

Ключевые слова: многократное рассеяние, когерентный источник излучения, сохранение энергии, оптическая теорема, эффект Перселла, радиационные потери.

DOI: 10.61011/JTF.2025.08.60893.412-24

Введение

Взаимодействие электромагнитного излучения с рассеивающими и поглощающими частицами охватывает огромное число практических приложений, включающих как классические задачи оптики, радиолокации, физики атмосферы и т.д., так и современные проблемы, связанные с развитием нанотехнологий. Основой для описания этого круга задач служат уравнения Максвелла в частотной области [1,2], либо вытекающая из них система интегральных уравнений типа квантово-механического уравнения Липмана-Швингера [3]. Помимо рассеяния на одиночных частицах, эти уравнения позволяют охватить также разнообразные эффекты многократного рассеяния, отвечающие взаимодействию частиц через рассеянное электромагнитное поле, такие, как формирование фотонных запрещенных зон в метаматериалах, локализацию Андерсона в системах случайных рассеивателей, эффекты усиления обратного рассеяния (известные также как слабая локализация) и т.д. [2].

В отличие от феноменологической теории переноса излучения, использующей уравнение переноса с эвристическим понятием элементарного рассеивающего объема [4], уравнения Максвелла дают строгое описание конкретных моделей частиц с произвольной фор-

мой и внутренней структурой и позволяют получить статистико-волновое обоснование теории переноса [5]. Однако такие строгие модели, как правило, допускают точное решение лишь в крайне ограниченном числе случаев и обычно требуют привлечения численных расчетов.

Особое значение для понимания общих механизмов поглощения и рассеяния излучения имеют соотношения, связанные с энергетическим балансом. Они включают, в частности, так называемую оптическую теорему и фактор Перселла, связанный с изменением мощности излучателя из-за наличия рассеивателя. Эти соотношения позволяют упростить нахождение таких важных интегральных характеристик рассматриваемой системы, как полные сечения экстинкции, рассеяния и поглощения. Они используются для проверки качества используемых приближенных решений и получения общей физической картины в задачах рассеяния. В последние годы использование энергетических соотношений нашло также обширные новые приложения, связанные с получением фундаментальных границ изменения различных физических параметров рассеивающей системы. Нахождение таких границ позволяет, в частности, судить о потенциальных возможностях при создании новых метаматериалов и конструировании инженерных устройств

в нанофотонике и плазмонике (см. работы [6–8] и цитированную там обширную литературу). Этот подход основан на методах выпуклой оптимизации [9], когда для нахождения экстремумов искомым физическим величин используются различные интегральные ограничения типа условий энергетического баланса. При этом рассматривается более широкий класс функций, нежели строгие решения волновых уравнений, что позволяет находить искомые экстремумы, не решая точных волновых уравнений. Расширение класса дополнительных условий приводит к ужесточению таких границ, которые в определенных случаях оказываются достижимыми, приобретая тем самым непосредственный физический смысл.

Традиционно условия энергетического баланса рассматриваются применительно к одиночному рассеивателю, облучаемому плоской волной, что приводит к классической формулировке оптической теоремы, связывающей экстинкцию с амплитудой рассеяния „вперед“ [10,11]. В работах [12–14] описание энергетического баланса было расширено для системы, состоящей и рассеивателя и излучателя. В предыдущих работах авторов [15,16] в отличие от обычного подхода, при котором рассматривается баланс полных потоков, выходящих через поверхность выбранных объемов, были использованы также локальные условия энергетического баланса, выражающие дивергенцию потоков через соответствующие источники в каждой точке пространства. При этом рассматривалась модель скалярного волнового уравнения и одиночного рассеивателя. Целью настоящей работы является распространение результатов [15,16] на случай многократного рассеяния электромагнитного излучения на системе поглощающих рассеивателей. Полученные результаты направлены на улучшение понимания механизмов поглощения и рассеяния света в системах взаимодействующих частиц, имеющих первостепенное значение в оптике, фотонике и плазмонике.

Далее описывается случай когерентного рассеяния системой неподвижных рассеивающих частиц, для которых фаза излучения не меняется при индивидуальных актах рассеяния. Ситуации, связанные с некогерентным рассеянием и требующие использования статистического подхода [5], ниже не рассматриваются. При этом для простоты мы ограничимся случаем одного заданного (т.е. стороннего) тока $j_0(\mathbf{r})$, локализованного вне системы рассеивателей, хотя полученные ниже результаты нетрудно распространить также на случай ансамбля из излучающих и поглощающих частиц, введя вместо одного стороннего тока набор частиц с заданными на них сторонними токами.

В разд. 1 рассмотрена общая постановка задачи, приводящая к системе дифференциальных уравнений многократного рассеяния монохроматического излучения на системе частиц с заданным произвольным распределением диэлектрической проницаемости внутри каждой частицы. В разд. 2 приводится основной результат настоящей работы, а именно „лемма дуальности“ (12),

выражающая локальную форму закона сохранения усредненных потоков энергии от двух произвольных, заданных либо индуцированных, источников. Такая форма закона сохранения энергии, насколько известно авторам, в явном виде в литературе по многократному рассеянию ранее не записывалась (некоторые ссылки на аналогичные, но не тождественные (12) результаты приведены в Заключении, несложный вывод этой леммы вынесен в Приложение). Далее в этом же разделе описаны локальные и интегральные формы законов сохранения средних по времени потоков мощности, которые разделяются на энергетические и интерференционные, связанные с наложением рассеянных полей и поля падающей волны. Следующие разделы служат для иллюстрации возможных применений указанной леммы. Разделение мощностей и потоков на парциальные компоненты дано в разд. 3. В разд. 4 описаны различные варианты выборов вспомогательных объемов, позволяющие на базе (12) рассмотреть баланс энергий для произвольных кластеров внутри системы взаимодействующих через рассеянные поля частиц. Соотношение парциальных мощностей с оператором свободного распространения и создающими поля токами кратко описано в разд. 5. В Заключении формулируются основные выводы.

1. Постановка задачи

Рассмотрим рассеяние монохроматического излучения, создаваемого заданным, распределенным внутри объема V_0 , сторонним током $j_0(\mathbf{r})$, системой (кластером) поглощающих частиц (рис. 1).

Положения частиц описываются некоторыми внутренними точками каждой из них \mathbf{r}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, \mathbf{r}_0 — внутренняя точка V_0 , причем объемы частиц V_i и источников V_0 считаются непересекающимися. Зависимость от времени пропорциональна множителю $\exp(-i\omega t)$, который, как и зависимости от угловой частоты ω , далее опускается. Принимая для простоты диэлектрическую проницаемость среды равной единице, будем считать,

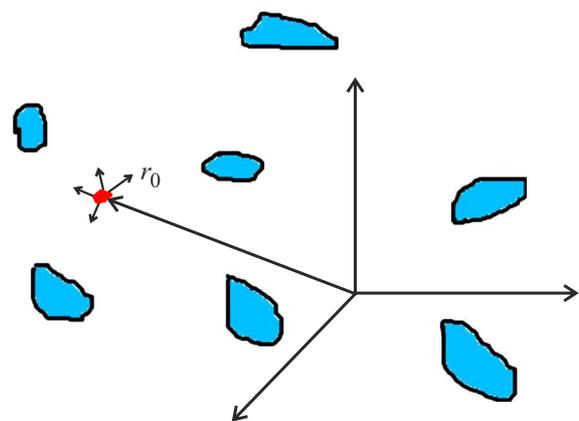


Рис. 1. Излучение заданного стороннего тока, находящегося вне кластера рассеивающих и поглощающих частиц.

что каждая из частиц описывается своим распределением комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon_i(\mathbf{r})$ (что, как известно, охватывает и случай наночастиц [2]). Тогда полная диэлектрическая проницаемость записывается как

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{r}) &= \sum_{i=1}^N \varepsilon_i(\mathbf{r})\theta_i(\mathbf{r}) + \left(1 - \sum_{i=1}^N \theta_i(\mathbf{r})\right) \\ &\equiv 1 + \sum_{i=1}^N (\varepsilon_i(\mathbf{r}) - 1)\theta_i(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже $\theta_i = \theta_i(\mathbf{r})$ — характеристическая функция, равная единице внутри объема V_i и нулю вне его, $i = 0, 1, 2, \dots, N$. При этом $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) = \theta_0(\mathbf{r})\mathbf{j}_0(\mathbf{r})$, поскольку заданный ток $\mathbf{j}_0(\mathbf{r})$ по предположению локализован внутри объема V_0 .

Напряженность электрического поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ определяется уравнением

$$[\nabla \times \nabla \times -k_0^2 \varepsilon(\mathbf{r})]\mathbf{E}(\mathbf{r}) = i\omega\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число, а μ_0 — магнитная проницаемость вакуума. Уравнение (2) дополняется условиями излучения Зоммерфельда на бесконечности, выполнение которых можно обеспечить введением бесконечно малой мнимой части к волновому числу k_0 , которая для простоты ниже всюду опускается (см., например, [1,2]). Решение (2) позволяет найти также напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$, равную

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) / (i\omega\mu_0). \quad (3)$$

Подставив (1) в (2) и опуская для простоты пространственные аргументы, запишем (2) сокращенно в виде

$$L_0 \mathbf{E}_t = \mathbf{q}_t. \quad (4)$$

Здесь для единообразия полному полю \mathbf{E} присвоен индекс, $\mathbf{E} \equiv \mathbf{E}_t$ и введены обозначения

$$L_0 = \nabla \times \nabla \times -k_0^2, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{q}_0 + \mathbf{q}_s \equiv \sum_{i=0}^N \mathbf{q}_i, \quad (6)$$

$$\mathbf{q}_0 = i\omega\mu_0 \mathbf{j}_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{q}_s = k_0^2 (\varepsilon(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{E}_t = \sum_{i=1}^N U_i \mathbf{E}_t \equiv \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{q}_i = U_i \mathbf{E}_t, \quad U_i = k_0^2 (\varepsilon_i - 1)\theta_i. \quad (8)$$

В отличие от стороннего тока \mathbf{q}_0 , который предполагается заданным, величины „рассеивающих потенциалов“ U_i (8) описывают вторичные источники \mathbf{q}_i , т.е. токи, связанные с поляризацией i -го рассеивателя. При этом источник \mathbf{q}_s отвечает полному рассеянному полю, или, другими словами, описанию всех рассеивающих частиц как одного комбинированного рассеивателя с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\mathbf{r})$.

2. Локальные и интегральные законы сохранения

2.1. Дифференциальные уравнения для парциальных полей

Запишем полное поле \mathbf{E}_t в виде суммы „парциальных полей“, а именно поля падающей \mathbf{E}_0 и рассеянных каждым из рассеивателей \mathbf{E}_i волн:

$$\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_s \equiv \sum_{i=0}^N \mathbf{E}_i, \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_s = \sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i. \quad (10)$$

Здесь \mathbf{E}_0 отвечает полю, создаваемому заданным (сторонним) током \mathbf{q}_0 в отсутствие рассеивателей, а полное рассеянное поле \mathbf{E}_s создается источником \mathbf{q}_s и выражается в виде суммы рассеянных каждым из рассеивателей полей \mathbf{E}_i с источниками \mathbf{q}_i , $i = 1, 2, \dots, N$. Нахождение явного вида этих источников, как и рассеянных полей, требует полного решения задачи рассеяния (разд. 5.2).

В силу линейности задачи, все напряженности \mathbf{E}_i , $i = t, s, 0, 1, 2, \dots, N$ описываются совпадающими с (4) по форме уравнениями

$$L_0 \mathbf{E}_i = \mathbf{q}_i, \quad (11)$$

но с разными функциями источников (токами) \mathbf{q}_i , $i = t, s, 0, 1, 2, \dots, N$.

Уравнения (11) при $i = 0, 1, 2, \dots, N$ образуют систему, эквивалентную уравнению (4) и определяющую полное поле \mathbf{E}_t (9). Суммирование обеих частей (11) по $i = 0, 1, 2, \dots, N$ преобразует систему уравнений (11) для падающей и рассеянных частицами волн в исходное уравнение для полного поля \mathbf{E}_t (4). При этом каждому из полей \mathbf{E}_i отвечает соответствующее магнитное поле \mathbf{H}_i вида (3).

Источники падающей волны \mathbf{E}_0 и рассеянных волн \mathbf{E}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, „локальны“ в том смысле, что они пространственно локализованы, соответственно, в области заданных токов \mathbf{q}_0 и каждого из рассеивателей \mathbf{q}_i . Будем называть эти волны „парциальными компонентами полного поля \mathbf{E}_t “. В отличие от этого, источники \mathbf{q}_t (6) и \mathbf{q}_s (7), отвечающие полному \mathbf{E}_t и рассеянному \mathbf{E}_s полям, „нелокальны“, т.е. распределены между сторонним током \mathbf{q}_0 и всеми рассеивателями. Все локальные источники по предположению пространственно не пересекаются.

Единственным источником энергии в рассматриваемой задаче является заданный сторонний ток \mathbf{q}_0 , тогда как вторичные, индуцированные токи \mathbf{q}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, отвечают рассеивателям, которые не только рассеивают, но и поглощают энергию поля, т.е. играют роль стоков. Это найдет отражение в выборе знаков, связанных с токами мощностей и соответствующих им потоков (см. ниже). Несмотря на эти различия, общие свойства локальных токов \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_i и связанных с ними энергетических соотношений можно рассматривать единообразно.

2.2. Локальные и интегральные законы сохранения парциальных потоков

Из уравнений Максвелла (11) и (3) нетрудно получить (см. Приложение) соотношение

$$\nabla(\mathbf{s}_{ij} + \mathbf{s}_{ji}) = (w_{ij} + w_{ji}), \quad (12)$$

связывающие перекрестные потоки

$$\mathbf{s}_{ij} = (1/2)\text{Re}(\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_j^*) \quad (13)$$

с соответствующими мощностями

$$w_{ij} = (1/2)\text{Re}[\mathbf{E}_i \mathbf{q}_j^* / (i\omega\mu_0)], \quad (14)$$

где $i, j = t, s, 0, 1, 2, \dots, N$. По аналогии с леммой Лоренца, будем называть соотношение (12) „леммой дуальности“ для средних значений локальных энергетических потоков. Опишем простые следствия соотношений (12)–(14).

Векторы $\mathbf{s}_{ij} + \mathbf{s}_{ji}$ при $i \neq j$ будем называть „интерференционными потоками“, поскольку они связаны с интерференцией полей, создаваемых двумя разными источниками \mathbf{q}_i и \mathbf{q}_j . В соответствии с (12) каждый из источников рассматриваемой пары дает свой вклад (w_{ji} и w_{ij}) в дивергенцию интерференционного потока $\mathbf{s}_{ij} + \mathbf{s}_{ji}$. При $i = j$, т.е. для поля \mathbf{E}_i от одного источника \mathbf{q}_i , векторы $\mathbf{s}_{ij} + \mathbf{s}_{ji}$ переходят в удвоенные обычные векторы Пойнтинга $2\mathbf{s}_{ii}$, а (12) дает закон сохранения энергии

$$\nabla \mathbf{s}_{ii} = w_{ii} \quad (15)$$

для средних по времени значений потока \mathbf{s}_{ii} и мощности w_{ii} . Традиционный вывод закона сохранения (15) для потока энергии \mathbf{s}_{it} полного поля \mathbf{E}_t из уравнений Максвелла дается во многих монографиях (см., например, [1,2]).

Заметим, что реально наблюдаемые потоки энергии и мощности, помимо средних значений, содержат также колеблющиеся части, осциллирующие с удвоенной частотой, которые далее не рассматриваются (подробное обсуждение условия сохранения колеблющейся мощности имеется в [17]). Отметим также, что физический смысл условия непрерывности (15) становится наиболее наглядным при использовании определения дивергенции, как локальной меры производительности источников в рассматриваемой точке пространства, т.е. поверхностного интеграла от энергетического потока \mathbf{s}_{ii} для бесконечно малого объема dv , нормированного на величину этого объема: положительная величина w_{ii} отвечает источникам энергии поля (т.е. потоку, выходящему из dv наружу), а отрицательная — стокам (поглощаемому dv потоку, см., например, [18]).

Поскольку рассеянные поля предполагаются отличными от нуля, вообще говоря, во всем пространстве, пространственная локализация мощностей $w_{ij} \equiv w_{ij}(\mathbf{r})$ (14) совпадает с локализацией источников $\mathbf{q}_j \equiv \mathbf{q}_j(\mathbf{r})$. Иначе говоря, каждая из определенных, согласно (14), мощностей w_{ij} может быть отлична от нуля

лишь в области соответствующих источников \mathbf{q}_j и равна нулю вне этой области. Как следствие, мощности $w_{ij}(\mathbf{r})$ „локальны“ для падающей и парциальных рассеянных волн (т.е. при $j = 0, 1, 2, \dots, N$), и „нелокальны“ для полного и рассеянного полей (т.е. при $j = t, s$; здесь „локальность понимается в том же смысле, в котором говорилось выше о „локальности“ источников \mathbf{q}_j).

Рассмотрим некоторые простые следствия условий (12) для локальных источников \mathbf{q}_j , которым отвечают индексы $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$. В соответствии с (12) для каждого выбора пары (i, j) источником дивергенции потока $\mathbf{s}_{ij} + \mathbf{s}_{ji}$ является мощность $w_{ij} + w_{ji}$. При этом каждая мощность w_{ij} локализована в области локализации соответствующего источника поля \mathbf{q}_j . Как следствие, отвечающие $\mathbf{s}_{ij} + \mathbf{s}_{ji}$ полные потоки сохраняются при свободном распространении излучения в области между источниками, где $w_{ij} + w_{ji} = 0$.

Интегрирование обеих частей (12) по произвольному объему v с использованием теоремы Гаусса-Остроградского позволяет перейти от локальных потоков \mathbf{s}_{ij} и мощностей w_{ij} к связанным с выбором v интегральным характеристикам, которые мы будем обозначать большими буквами S_{ij} и W_{ij} с теми же индексами:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ij} &\equiv (S_{ij} + S_{ji}) \equiv \oint_{Dv} (\mathbf{s}_{ij} + \mathbf{s}_{ji}) d\Sigma \\ &= \int_v (w_{ij} + w_{ji}) d\mathbf{r} \equiv (W_{ij} + W_{ji}). \end{aligned} \quad (16)$$

Если рассматриваемый объем v не содержит хотя бы одного из источников \mathbf{q}_i или \mathbf{q}_j , то $w_{ij} = w_{ji} = 0$, и полный поток Σ_{ij} обращается в нуль, т.е. входящая в v часть этого потока равна выходящей. Таким образом, для каждой пары локальных источников \mathbf{q}_i и \mathbf{q}_j отвечающий им поток Σ_{ij} не зависит непосредственно от наличия в рассматриваемом объеме других локальных источников (это, конечно, не означает, что рассеянное поле \mathbf{E}_i не зависит от других рассеивателей: здесь речь идет лишь о балансе средних по времени мощностей).

При $i = j$ поток (16) после деления на 2 переходит в условие сохранения энергии:

$$S_{ii} \equiv \oint_{Dv} \mathbf{s}_{ii} d\Sigma = \int_v \mathbf{w}_{ii} d\mathbf{r} \equiv W_{ii}, \quad (17)$$

где S_{ii} — полный поток энергии, вытекающий наружу через поверхность рассматриваемого объема, а W_{ii} — полная мощность заключенных в нем источников. В соответствии с (17) поток S_{ii} обращается в нуль при отсутствии внутри объема соответствующего источника \mathbf{q}_i , что отвечает сохранению величины S_{ii} в процессе распространения волн вне этого источника.

Если рассматриваемый объем v содержит лишь один из токов, скажем, \mathbf{q}_i , то $W_{ij} = 0$ и, в соответствии с (16), $\Sigma_{ij} = W_{ji}$. При увеличении объема v интерференционный поток Σ_{ij} не меняется до тех пор, пока этот объем

не коснется второго источника из рассматриваемой пары \mathbf{q}_j (рис. 1). После этого с ростом v поток Σ_{ij} по мере поглощения этим объемом области источника \mathbf{q}_j начинает меняться и выходит на новый постоянный уровень после полного охвата \mathbf{q}_j рассматриваемым объемом. При этом другие источники непосредственно не влияют на величину интерференционного потока, характеризующего данную пару \mathbf{q}_i и \mathbf{q}_j . Вне объема, содержащего оба источника, поток Σ_{ij} распространяется без изменений. Эта картина сохраняется и для случая одиночного источника, т.е. при $i = j$, когда интерференционный поток Σ_{ij} переходит в удвоенный поток энергии.

3. Парциальные компоненты потоков и их источники

Локальные соотношения (12) связывают значения относящихся к каждой точке пространства потоков s_{ij} с соответствующими мощностями w_{ij} . Условия энергетического баланса даются соотношениями между различными полными мощностями W_{ij} (или эквивалентным им соотношениям между полными потоками S_{ij}) при специальных выборах объемов, к которым относятся эти интегральные величины. Для излучателя и одиночного рассеивателя такие интегральные характеристики, помимо закона сохранения энергии, непосредственно связаны с оптической теоремой (рассеяние „вперед“, энергетический баланс между рассеянным полем и падающей волной), а также с описанием эффекта Перселла (рассеяние „назад“, влияние рассеянной волны на мощность излучателя) [16]. Рассмотрим особенности этих эффектов для нашей системы рассеивателей.

Запишем выражения (13) и (14) для потока \mathbf{s}_{it} и мощности w_{it} полного поля \mathbf{E}_t , подставив в них \mathbf{q}_t (6) и \mathbf{E}_t (9):

$$w_{it} = \Sigma w_{ij} \equiv \Sigma w_{ii} + \Sigma' w_{ij}, \quad (18)$$

$$\mathbf{s}_{it} = \Sigma \mathbf{s}_{ij} \equiv \Sigma \mathbf{s}_{ii} + \Sigma' \mathbf{s}_{ij}. \quad (19)$$

Здесь суммы берутся по всем значениям индексов $i, j = 0, 1, 2, \dots, N$, отвечающим локальным источникам, а сумма со штрихом отвечает суммированию по $i \neq j$.

Интегрируя обе части (18) и (19) по произвольному объему v в соответствии с (16), получаем аналогичные соотношения для интегральных величин:

$$W_{it} = \Sigma W_{ij} \equiv \Sigma W_{ii} + \Sigma' W_{ij}, \quad (20)$$

$$S_{it} = \Sigma S_{ij} \equiv \Sigma S_{ii} + \Sigma' S_{ij}. \quad (21)$$

В отличие от дифференциальных соотношений (18) и (19) здесь уже все интегральные величины S_{ij} и W_{ij} зависят от выбора объема v .

Соотношения (20) и (21) позволяют описать все интегральные характеристики поля, связанные с энергетическим балансом. Для получения этих характеристик

достаточно выбрать интересующий нас объем и учесть различный энергетический характер стороннего источника \mathbf{q}_0 , который передает энергию электромагнитному полю, и индуцированных токов $\mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, N$, играющих роль стоков.

Далее мы будем рассматривать лишь объемы, полностью охватывающие соответствующие локальные источники \mathbf{q}_j , так что используемые ниже при $i, j = 0, 1, \dots, N$ величины

$$W_{ij} = \int w_{ij} d\mathbf{r} \quad (22)$$

есть полные мощности, отвечающие w_{ij} и связанные с полным поглощением либо излучением источника \mathbf{q}_j .

4. Энергетический баланс и оптическая теорема для системы рассеивателей

4.1. Сторонний ток и фактор Перселла

Рассмотрим сначала произвольный объем V_0^* , полностью охватывающий V_0 , (т.е. сторонний ток \mathbf{q}_0), но не затрагивающий объемов рассеивающих частиц (индуцированных токов $\mathbf{q}_i, i = 1, 2, \dots, N$, (рис. 2)). Для такого объема в соответствии с (14) все величины локальных w_{ij} и, как следствие, полных W_{ij} мощностей при $j \neq 0$ обращаются в нуль. С учетом этого выражение для полной мощности (20) переходит в

$$W_{em,0} \equiv W_{it} = W_{00} + W_{int,0}, \quad (23)$$

где сумма интерференционных слагаемых

$$W_{int,0} = \sum_{i=1}^N W_{i0}. \quad (24)$$

При таком выборе объема величина $W_{em,0}$ имеет смысл полной мощности излучения источника, которая

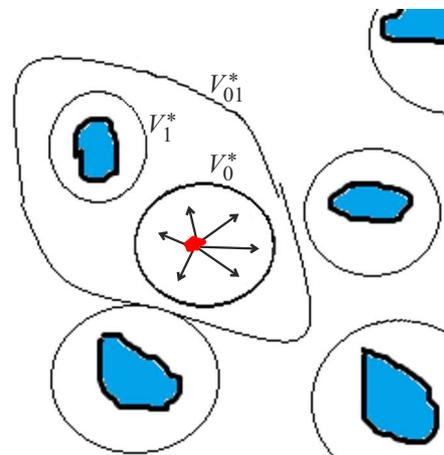


Рис. 2. Выбор объемов, охватывающих рассеиватель q_1 и источник q_0 .

слагается из мощности излучения в свободном пространстве $W_{00} \geq 0$ и (в общем случае знакопеременной) мощности $W_{int,0}$, которая описывает влияние всех рассеивателей на мощность излучения заданного тока \mathbf{q}_0 , т.е. эффект Перселла. Для одиночного рассеивателя (т.е. при $N = 1$) это соотношение подробно рассматривалось в работе [13]. Величину $\gamma = W_{int,0}/W_{00}$ называют фактором усиления. В соответствии с (24) каждый из рассеивателей вносит свой аддитивный вклад в этот фактор (эти вклады, естественно, не являются независимыми из-за взаимного влияния рассеянных частицами полей).

Каждое слагаемое в (24) в соответствии с (12) создает поток $\Sigma_{i0} = S_{i0} + S_{0i}$, так что поток эмиссии (21) принимает вид

$$S_{em,0} \equiv S_{it} = S_{00} + \sum_{i=1}^N (S_{i0} + S_{0i}). \quad (25)$$

Это выражение определяет поток энергии, выходящий от источника \mathbf{q}_0 наружу через поверхность рассматриваемого объема, и равный мощности эмиссии (23).

Заметим, что в нашей постановке рассматривается сторонний ток, не зависящий от рассеивателей, что является стандартным приемом в классической электродинамике [17]. Более сложные процессы, связанные с квантовым характером излучателя, в квазиклассическом приближении можно описать, если учесть возможность влияния рассеянных полей на сторонний источник q_0 (см., например, работу [19], где рассматривалась простая модель классического описания зависимости флуоресценции возбужденной молекулы от плазмонного резонанса находящейся вблизи нее металлической наночастицы). Такую постановку задачи можно легко включить в рассматриваемую схему, однако это выходит за рамки настоящей работы.

4.2. Одиночный рассеиватель и оптическая теорема

Аналогичные соотношения получаются, если вместо \mathbf{q}_0 рассмотреть любой из рассеивателей \mathbf{q}_i и учесть их поглощающий характер. Выбор объема V_1^* , содержащего лишь один из рассеивателей \mathbf{q}_1 (рис. 3, а), отвечает обращению в нуль всех мощностей W_{ij} с $j \neq 1$, так что вместо (24) получаем соотношение

$$W_{it} = W_{11} + \Sigma' W_{i1}, \quad (26)$$

где сумма со штрихом берется по $i \neq 1$, т.е. по $i = 0, 2, 3, \dots, N$.

Поскольку положительное значение мощности W_{it} по определению отвечает преобладанию потока, выходящего наружу из рассматриваемого объема, здесь W_{it} дает взятую со знаком минус полную мощность W_{abs1} , поглощаемую рассеивателем, $W_{it} = W_{i1} = -W_{abs1}$. Аналогично стоящая в (26) сумма дает взятую со знаком минус

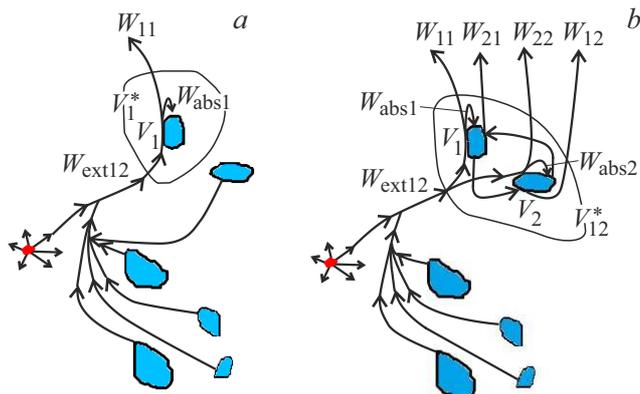


Рис. 3. Схемы распределения излучения от средних мощностей для объемов V_1^* и V_{12}^* , охватывающих один (а) и два (б) рассеивателя.

мощность экстинкции $W_{ext,1}$, которая отвечает интерференционному потоку, направленному внутрь рассматриваемого объема:

$$W_{ext,1} \equiv - \sum_{i \neq 1} W_{i1} \equiv -W_{01} - \sum_{i=2}^N W_{i1}. \quad (27)$$

В (26) величина $W_{11} \geq 0$ дает полную мощность рассеяния, т.е. полный поток, выходящий через поверхность объема V_1^* , который охватывает первый рассеиватель, но не затрагивает других рассеивателей и источника q_0 . Часть этой мощности уходит на возбуждение токов, индуцированных в соседних рассеивателях, а также дает вклад в изменение мощности излучателя q_0 , т.е. эффект Перселла. Оставшаяся часть отвечает радиационным потерям.

Как следует из определения мощностей w_{ij} (14), правой части (27) соответствует локальная мощность

$$w_{ext,1} \equiv - \left(w_{01} + \sum_{i=2}^N w_{i1} \right) = - (1/2) \text{Re} \left[\left(\mathbf{E}_0 + \sum_{i=2}^N \mathbf{E}_i \right) \mathbf{q}_1^* / (i\omega\mu_0) \right]. \quad (28)$$

Отсюда видно, что мощность экстинкции $W_{ext,1}$ описывает полную работу индуцированного в частице тока q_1 , совершаемую над внешним по отношению к ней полем, т.е. полем падающей и рассеянных всеми другими частицами волн (рис. 3, а):

$$\mathbf{E}_{out1} \equiv \sum_{i \neq 1}^N \mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 + \sum_{i=2}^N \mathbf{E}_i. \quad (29)$$

В результате (26) принимает вид обычной оптической теоремы для одиночного рассеивателя, согласно которой мощность экстинкции есть сумма мощности рассеяния $W_{sc,1} \equiv W_{11}$ и поглощения:

$$W_{ext,1} = W_{sc,1} + W_{abs1}. \quad (30)$$

Стоящие здесь справа мощности неотрицательны, так что выполняются неравенства

$$W_{sc,1} \geq 0, W_{abs,1} \geq 0, W_{ext,1} \geq 0, \quad (31)$$

часть из которых используется при получении фундаментальных границ [6-8], о которых говорилось выше во Введении. Оптической теореме (30) отвечает условие баланса потоков

$$S_{ext,1} \equiv - \sum_{i \neq 1} (S_{i1} + S_{1i}) = S_{11} + S_{abs1}, \quad (32)$$

где поглощаемый частицей поток

$$S_{abs1} = -(S_{11} + S_{1t}). \quad (33)$$

4.3. Оптическая теорема для группы рассеивателей

Получение оптической теоремы для произвольного объема V_{12}^* , охватывающего лишь две рассеивающие частицы q_1 и q_2 (рис. 3, b), формально эквивалентно почленному сложению оптических теорем (30), записанных для каждой из них:

$$\begin{aligned} W_{ext,1} + W_{ext,2} &\equiv -W_{01} - W_{02} - \sum_{i=2}^N W_{i1} - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^N W_{i2} \\ &= W_{11} + W_{22} + W_{abs2} + W_{abs1}. \end{aligned} \quad (34)$$

Однако для перехода к обычной форме оптической теоремы, трактующей содержимое рассматриваемого объема V_{12}^* в качестве одного комбинированного рассеивателя, нужно произвести перегруппировку входящих сюда слагаемых, выделив действие внешних по отношению к V_{12}^* рассеивателей. В результате (34) запишется как

$$W_{ext,1,2} = W_{sc,1,2} + W_{abs,1,2}, \quad (35)$$

где

$$W_{ext,1,2} = - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1,2}}^N W_{i1} - \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1,2}}^N W_{i2} \quad (36)$$

— мощность экстинкции, связанная с действием всех внешних по отношению к q_1 и q_2 источников (включая q_0),

$$W_{sc,1,2} = \sum_{i,j=1,2} W_{ij} \quad (37)$$

— мощность рассеяния на двух взаимодействующих через рассеянные поля рассеивателях, а

$$W_{abs,1,2} = W_{abs2} + W_{abs1} \quad (38)$$

— мощность поглощения двумя частицами.

При этом мощность экстинкции (36) не сводится к сумме аналогичных величин (27) для каждого из рассеивателей в отдельности $W_{ext,1,2} \neq W_{ext,1} + W_{ext,2}$, поскольку часть этой суммы теперь уже выступает в качестве

интерференционной части рассеяния на двух частицах. Все мощности, входящие в оптическую теорему (35), неотрицательны:

$$W_{sc,1,2} \geq 0, W_{abs,1,2} \geq 0, W_{ext,1,2} \geq 0. \quad (39)$$

Картина преобразования энергии источника для двух выделенных рассеивателей проиллюстрирована на рис. 3, b.

Для полного кластера, охватывающего все частицы, внешним по отношению к нему является лишь поле источника u_0 . Здесь уже мощность экстинкции переходит в простую сумму мощностей экстинкции для отдельных частиц:

$$W_{ext1,2,\dots,N} \equiv - \sum_{i=1}^N W_{0i}, \quad (40)$$

а оптическая теорема принимает привычный вид

$$W_{ext1,2,\dots,N} = W_{sc1,2,\dots,N} + W_{abs1,2,\dots,N}, \quad (41)$$

где

$$W_{sc1,2,\dots,N} = \sum_{i,j=1}^N W_{ij}, \quad W_{abs1,2,\dots,N} = - \sum_{i=1}^N W_{ti}. \quad (42)$$

4.4. Рассеиватель и источник

Полученные соотношения легко распространить на объем, охватывающий произвольную группу рассеивателей, включив в нее также сторонний источник q_0 . Так, для объема V_{01}^* , охватывающего лишь источник q_0 и рассеиватель q_1 (рис. 2), в (20) отличны от нуля мощности W_{i0} и W_{i1} , отвечающие этим источникам. В результате (20) принимает вид выражения для мощности эмиссии, выходящей от рассматриваемой пары

$$W_{em0,1} \equiv W_{t1} = W_{00} + \sum_{i \neq 0}^N W_{i0} + W_{11} + \sum_{i \neq 1}^N W_{j1}. \quad (43)$$

С учетом (23) и оптической теоремы (30) это соотношение можно записать также как

$$W_{em0,1} = W_{em0} - W_{abs1}. \quad (44)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии для пары q_0 и q_1 : мощность, создающая поток эмиссии из рассматриваемого объема, есть разность мощности W_{em0} излучателя q_0 (выраженной с учетом эффекта Перселла) и мощности W_{abs1} , поглощаемой рассматриваемым рассеивателем q_1 . Поскольку поглощенная мощность не может превышать излученную, из (44) следует неравенство

$$W_{em0,1} \geq 0. \quad (45)$$

Аналогично можно рассмотреть и потоки, отвечающие произвольным группам взаимодействующих через

рассеянные поля рассеивателей. При этом включение в рассматриваемый объем новых рассеивающих частиц приводит к добавлению в правой части (44) мощностей — $W_{abs i}$, описывающих поглощение в каждой из них. В частности, для объема, охватывающего всю рассматриваемую систему, полная мощность эмиссии есть

$$W_{em0,1,2,\dots,N} = W_{em0} - \sum_{i=1}^N W_{abs i}. \quad (46)$$

Эта мощность описывает излучение во внешнее пространство, т.е. радиационные потери всей системы как целого. Учитывая приведенные выше соотношения, нетрудно записать также явный вид отвечающего (44) потока мощности.

5. Парциальные мощности и оператор свободного распространения

Рассмотрим связь полученных выше функций источников (мощностей) W_{ij} с создающими падающие и рассеянные поля токами \mathbf{q}_i . Каждое из рассеянных полей \mathbf{E}_i , $i = 1, 2, \dots, N$, в соответствии с (5) запишем в виде

$$\mathbf{E}_i = G_0 \mathbf{q}_i, \quad (47)$$

где

$$G_0 = (L_0)^{-1} \equiv \nabla \times \nabla \times (-k_0^2)^{-1} \equiv -(1 + \nabla \nabla / k_0^2)(\Delta + k_0^2)^{-1} \quad (48)$$

— оператор свободного распространения, явный вид которого известен [1,2] и здесь не выписывается. Определим скалярное произведение для векторов напряженностей поля \mathbf{E}_j как

$$\mathbf{E}_j^\dagger \mathbf{E}_i \equiv \int \mathbf{E}_j^*(r) \mathbf{E}_i(r) dr, \quad (49)$$

где интеграл берется по всему пространству. Это унитарное скалярное произведение задает метрику в пространстве трехкомпонентных векторов $\mathbf{E}(r)$, которые можно рассматривать как поле $u = u(\alpha, \mathbf{r})$, зависящее от сложного аргумента (α, \mathbf{r}) . Тогда оператору G_0 отвечает ядро $G_0(\alpha, \mathbf{r}, \alpha_0, \mathbf{r}_0)$, включающее тензорные аргументы (α, α_0) , причем действие G_0 включает интегрирование по \mathbf{r}_0 и суммирование по дискретному аргументу α_0 .

Как всякий линейный оператор в унитарном пространстве, G_0 выражается в виде суммы эрмитовой G_0^h и антиэрмитовой $i G_0^a$ частей¹, $G_0 \equiv G_0^h + i G_0^a$, где $G_0^h = (G_0 + G_0^\dagger)/2$, а $G_0^a = (G_0 - G_0^\dagger)/2i$, причем символ

¹ В литературе нет общепринятых обозначений для выделения эрмитовой и антиэрмитовой компонент оператора A (см. обсуждение терминологии в Приложении Е в работе [23]). В наших обозначениях антиэрмитова часть A^a является эрмитовым оператором (подобно тому, как мнимая часть $\text{Im} z$ комплексного числа z является вещественным числом).

„†“ означает эрмитово сопряжение (см., например, [20]). В этих обозначениях выражение для энергетической мощности W_{ii} (17) с учетом (14) дает

$$W_{ii} = \int_v w_{ii} d\mathbf{r} = (1/2\omega\mu_0) \text{Im} \int_v \mathbf{q}_i^* G_0 \mathbf{q}_i d\mathbf{r} = (1/2\omega\mu_0) \mathbf{q}_i^\dagger G_0^a \mathbf{q}_i, \quad (50)$$

представляющее собой с точностью до множителя диагональный матричный элемент антиэрмитовой части оператора свободного распространения G_0^a , отвечающий источнику \mathbf{q}_i . Таким образом, энергетические мощности W_{ii} зависят лишь от антиэрмитовой части G_0^a оператора свободного распространения G_0 , и не зависят от его эрмитовой части. Это свойство сохраняется и для симметризованной суммы $W_{ij} + W_{ji}$ с $i \neq j$, которая возникает при рассмотрении взаимодействия пары источников \mathbf{q}_i и \mathbf{q}_j с использованием основного соотношения (12). В общем случае при использовании недиагональных величин W_{ij} с $i \neq j$ в качестве источников экстинкции в них фигурирует полный оператор Грина G_0 , а не его антиэрмитова часть, так что

$$W_{ij} = (1/2\omega\mu_0) \text{Im} \mathbf{q}_j^\dagger G_0 \mathbf{q}_i. \quad (51)$$

Матричное ядро $G_0^a(r, r_0)$ оператора G_0^a в отличие от ядра G_0 не содержит особенности в нуле, т.е. при $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, причем $G_0^a(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_0) = 1k_0/(6\pi)$, где 1 — единичная матрица [21]. Это позволяет избежать необходимости регуляризации для вычисления мощностей в случае точечных рассеивателей [21], в отличие от описания поля, использующего полный волновой оператор G_0 .

Оператор G_0^a является неотрицательным, т.е. все его диагональные матричные элементы неотрицательны [20], $\mathbf{q}^\dagger G_0^a \mathbf{q} \geq 0$. Это условие вытекает из физических соображений, отражает наличие в системе (неотрицательных) радиационных потерь и обеспечивает неотрицательность всех энергетических мощностей W_{ii} (в отличие от знакопеременных интерференционных мощностей W_{ij} , $i \neq j$). Так, если рассмотреть в качестве заданного источника одиночный диполь с дипольным моментом \mathbf{p} , полагая $\mathbf{q}_0 = \omega^2 \mu_0 \mathbf{p} \delta(\mathbf{r})$, то мощность (50) принимает привычный вид мощности излучения точечного диполя с заданным дипольным моментом \mathbf{p} , $W_{00} = (\omega^4 \mu_0 |\mathbf{p}|^2 / 12\pi c)$ (обычно это выражение выводится интегрированием потока мощности по охватывающий рассеиватель сфере бесконечного радиуса).

Заключение

В работе рассмотрены локальные и интегральные условия энергетического баланса для произвольной системы взаимодействующих между собой через рассеянные поля рассеивателей. Описание парциальных компонент энергетических потоков, которые сохраняются в процессе распространения между рассеивателями,

существенно использует полученную в работе „лемму дуальности“ (12), определяющую связь средних по времени потоков с источниками с учетом интерференции рассеянных полей. Рассмотрены формы оптической теоремы для кластеров, входящих в рассматриваемую систему рассеивателей. Показано, в частности, что поток экстинкции и рассеяния для кластера зависят от выбора входящих в него частиц и в отличие от поглощаемого потока не сводится к простой сумме аналогичных потоков экстинкции для его компонент.

Полученная наглядная картина энергетического баланса призвана улучшить понимание процессов энергообмена при когерентном рассеянии на системе рассеивающих частиц, позволяя, в отличие от традиционного подхода, описывающего баланс энергии для системы как целого, рассмотреть энергообмен между входящими в систему кластерами. Подход, использующий локальные условия (12), можно распространить и на другие задачи теории рассеяния, связанные с более сложными геометриями задачи. Он применим также и для широко распространенной модели точечных рассеивателей и источников [21,23], когда вместо непрерывных распределений диэлектрической проницаемости и токов используются соответствующие дельта-функции.

Заметим, что постановка задачи, описывающая одну монохроматическую компоненту поля, отвечает установившемуся процессу и не использует разделения токов на „причину“ (источники поля \mathbf{q}_0) и „следствия“ (индуцированные источники \mathbf{q}_j), так что в изложенной выше схеме токи \mathbf{q}_0 и \mathbf{q}_j фигурируют вполне симметрично (если только отвлечься от знаков полных потоков исходящих от них энергий). Заметим также, что в литературе во многих работах рассматривались аналогичные, но не тождественные (12), соотношения (так, например, при рассмотрении случая одиночного рассеивателя сходный вывод был приведен в работе [13] применительно к конкретному выбору в качестве \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 полей падающей и рассеянной волн, а также в статье [24] при построения оптической теоремы во временной области). Однако, по мнению авторов, именно использование простого соотношения (12) позволяет получить наиболее лаконичное описание рассматриваемой задачи.

Благодарности

Авторы благодарны анонимным рецензентам за полезные конструктивные замечания.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] J.D. Jackson. *Classical electrodynamics*, 3-rd eds. (Wiley, NY, 1999)

- [2] Л. Новотный, Б. Хехт. *Основы нанооптики* (Физматлит, М., 2009)
- [3] B.A. Lippmann, J. Schwinger. *Phys. Rev. Lett.*, **79** (3), 469 (1950). DOI: 10.1103/PhysRev.79.469
- [4] С. Чандрасекар. *Перенос лучистой энергии* (Изд-во ИЛ, М., 1953)
- [5] Л.А. Апресян, Ю.А. Кравцов. *Теория переноса излучения: статистические и волновые аспекты* (Наука, М., 1983; Engl. expanded ed.: Gordon and Breach, Amsterdam, 1996)
- [6] H. Shim, Z. Kuang, Z. Lin, O.D. Miller. *Nanophotonics*, **13** (12), 2107 (2024). DOI: 10.1515/nanoph-2023-0630
- [7] Z. Kuang, L. Zhang, O.D. Miller. *Optica*, **7**, 1746 (2020). DOI: 10.1364/OPTICA.398715
- [8] Y. Ivanenko, M. Gustafsson, S. Nordebo. *Opt. Express*, **27** (23), 34323 (2019). DOI: 10.1364/OE.27.0347323
- [9] S. Boyd, L. Vandenberghe. *Convex optimization* (Cambridge Univ. Press, 2004)
- [10] J.R. Taylor. *Scattering theory. The quantum theory of nonrelativistic collisions* (Wiley, NY, 1972)
- [11] R.G. Newton. *Am. J. Phys.*, **44** (7), 639 (1976).
- [12] M. Venkatapathi. *JQSRT*, **113** (13), 1705 (2012). DOI: 10.1016/j.jqsrt.2012.04.019
- [13] A.E. Moskalensky, M.A. Yurkin. *Phys. Rev.*, **A 99**, 053824 (2019). DOI: 10.1103/PhysRevA.99.053824
- [14] L.A. Apresyan. *J. Ac. Soc. Am.*, **150**, 2024 (2021). DOI: 10.1121/10.0005915
- [15] L.A. Apresyan, T.V. Vlasova, V.I. Krasovskii. *Phys. Wave Phen.*, **32**, 19 (2024). DOI: 10.3103/S1541308X24010011
- [16] Л.А. Апресян. *ЖТФ*, **93** (3), 332 (2023). DOI: 10.21883/JTF.2023.03.54843.254-22
- [17] Л.А. Вайнштейн. *Электромагнитные волны (Радио и связь, М., 1988)*
- [18] Г. Иос. *Курс теоретической физики. Ч. 1. Механика и электродинамика* (Наука, М., 1963)
- [19] C.R. Simovski. *Opt. Lett.*, **44** (11), 2697 (2019). DOI: 10.1364/OL.44.002697
- [20] Ф.П. Гантмахер. *Теория матриц* (Наука, М., 1966)
- [21] P. de Vries, D.V. van Coevorden, A. Lagendijk. *Rev. Mod. Phys.*, **70** (2), 447 (1998). DOI: 10.1103/revmodphys.70.447
- [22] V.S. Asadchy, M.S. Mirmoosa, A. Diaz-Rubio, S. Fan, S.A. Tretyakov. *Proc. IEEE*, **108** (10), 1684 (2020). DOI: 10.1109/JPROC.2020.3012381
- [23] A.E. Moskalensky, M.A. Yurkin. *Rev. Phys.*, **6**, 100047 (2021). DOI: 10.1016/j.revip.2020.100047
- [24] E.A. Marengo, J. Tu. *Progr. Electromagn. Res.*, **B 65**, 1 (2016). DOI: 10.2528/PIERB15110506

Приложение

„Лемма дуальности“ для перекрестных потоков

В электродинамике при обсуждении условий взаимности для уравнений Максвелла, а также в различных приложениях, широко используется классическая лемма Лоренца, связывающая значения полей, создаваемой в фиксированной среде двумя различными сторонними токами \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 [17]:

$$\nabla(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1) = (-\mathbf{E}_1 \mathbf{j}_2 + \mathbf{E}_2 \mathbf{j}_1)/(i\omega\mu_0). \quad (\text{П1})$$

При наличии анизотропии это соотношение выполняется лишь для взаимных сред, для которых тензоры

диэлектрической и магнитной проницаемости удовлетворяют определенными условиями симметрии, и нарушается, например, в случае гиротропии (подробное описание невзаимных сред рассмотрено в недавнем обзоре [22]). Рассмотрим вывод аналогичного условия, ассоциированного со средними по времени значениями потоков энергии.

Как и при выводе леммы Лоренца, рассмотрим уравнения Максвелла (2) и (3) для двух полей, создаваемых двумя различными заданными сторонними токами \mathbf{j}_1 и \mathbf{j}_2 . Запишем эти уравнения в виде

$$\nabla \times \mathbf{E}_\alpha = (i\omega\mu_0)\mathbf{H}_\alpha, \quad (\text{П2})$$

$$\nabla \times \mathbf{H}_\alpha = (q_\alpha + k_0^2\mathbf{E}_\alpha)/(i\omega\mu_0), \quad (\text{П3})$$

где $\alpha = 1, 2$, а источники \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 будем здесь рассматривать как произвольные (для полного \mathbf{E}_t поля $\mathbf{q}_\alpha = i\omega\mu_0\mathbf{j}_0(\mathbf{r}) + k_0^2(\varepsilon(\mathbf{r}) - 1)\mathbf{E}_\alpha$, падающая волна \mathbf{E}_0 отвечает случаю $\varepsilon(\mathbf{r}) = 1$, а парциальные рассеянные волны — случаю $q_\alpha = (\varepsilon_i(\mathbf{r}) - 1)\theta_\alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}_t$, где нахождение поля \mathbf{E}_t требует полного решения задачи рассеяния).

Рассмотрим выражение $\nabla(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1^*)$. Используя векторное соотношение $\nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}\nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{A}\nabla \times \mathbf{B}$ и учитывая (П2) и (П3), имеем

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1^*) &= \mathbf{H}_2^*\nabla \times \mathbf{E}_1 \\ &\quad - \mathbf{E}_1\nabla \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{H}_1^*\nabla \times \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_2\nabla \times \mathbf{H}_1^*. \end{aligned} \quad (\text{П4})$$

Выразим входящие в правую часть этого выражения роторы согласно (П2) и (П3):

$$\begin{aligned} \nabla(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1^*) &= (i\omega\mu_0)(\mathbf{H}_2^*\mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_1^*\mathbf{H}_2) \\ &\quad + (k_0^2/(i\omega\mu_0))(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2^* + \mathbf{E}_2\mathbf{E}_1^*) - (\mathbf{E}_1\mathbf{q}_2^* + \mathbf{E}_2\mathbf{q}_1^*)/(i\omega\mu_0). \end{aligned}$$

Взяв теперь вещественную часть от обеих частей этого равенства, получаем соотношение, эквивалентное (12):

$$\nabla \text{Re}(\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_2^* + \mathbf{E}_2 \times \mathbf{H}_1^*) = \text{Re}[(\mathbf{E}_1\mathbf{q}_2^* + \mathbf{E}_2\mathbf{q}_1^*)/(i\omega\mu_0)], \quad (\text{П5})$$

которое мы назовем „леммой дуальности“ для перекрестных потоков.

В отличие от леммы Лоренца (П1), правая часть (П5) содержит вместо сторонних токов \mathbf{j}_α полные токи \mathbf{q}_α , учитывающие диссипацию внутри среды (при наличии мнимой части у диэлектрической проницаемости). Еще одно отличие от леммы Лоренца, связанной с взаимностью полей, состоит в том, что условие (П5), обобщающее условие сохранения средних потоков (15), выполняется и в случае невзаимных сред.