01

Контроль параметров материала и расчет полей постоянных магнитов на основе размагничивающего фактора

© А.В. Подольский

ООО „Магнитные технологии“,
196128 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: avpodolsky@mail.ru

Поступило в Редакцию 29 августа 2024 г.
В окончательной редакции 24 февраля 2025 г.
Принято к публикации 24 февраля 2025 г.

Представлен метод расчета параметров магнитного поля как внутри, так и вне области магнита, базирующийся на величине намагниченности в точке пересечения линии нагрузки с кривой размагничивания. На примерах показано, что расчетные значения близки к наблюдаемым. Для практического использования в процессе контроля параметров магнитного материала построены графические зависимости для определения значения размагничивающего фактора кольцевых постоянных магнитов, аксиально и радиально намагниченных, а также приведены таблицы положения экстремумов и соответствующих значений напряженности поля в отношении к намагниченности. Установлено, что поле, создаваемое постоянным магнитом, как в области магнита, так и вне ее может быть рассчитано с использованием единственного значения намагниченности, близкого к среднему по объему магнита. Это значение определяется на основе размагничивающего фактора. Показано, как размагничивающий фактор постоянного магнита зависит от параметров петли гистерезиса магнитотвердого материала, помимо того, что он зависит от формы, соотношения размеров и направления намагничивания. Получено аналитическое выражение для расчета размагничивающего фактора, которое позволяет построить линию нагрузки магнита.

Ключевые слова: магнитное поле, постоянный магнит, размагничивание, гистерезис.

DOI: 10.21883/0000000000

Введение

Нередко на практике возникает проблема проверки соответствия магнитных свойств экземпляров постоянных магнитов номинальным параметрам указанной марки материала. Задача решается одним из двух способов:

• измерение кривой размагничивания образцов-свидетелей, как правило, в виде дисков со строго определенным соотношением размеров;

• измерение значений напряженности магнитного поля в ряде точек наблюдения и сравнение измеренных значений с расчетными.

Преимущество второго способа — в универсальности: он позволяет оценивать качество постоянного магнита любой формы и размеров.

Настоящая работа посвящена развитию расчетной части этого метода.

Постоянные магниты часто используемых форм — аксиально намагниченные дисковые, аксиально и радиально намагниченные кольцевые — имеют оси, на которых магнитные поля могут быть рассчитаны по достаточно простым формулам.

1. Аксиально намагниченный дисковый магнит.

Аксиальная z-компонента напряженности магнитного поля вдоль аксиальной оси магнита вне области магнита [1]:

$$H_z(p) = -\frac{M_{zq}}{2}\left(\frac{p}{\sqrt{\frac{D^2}{4}+p^2}} - \frac{p+h}{\sqrt{\frac{D^2}{4}+(p+h)^2}}\right), \quad (1)$$

где M_{zq} — намагниченность магнита в некоторой точке q, принадлежащей области магнита Ω, $q \in \Omega$, p — удаление точки наблюдения от поверхности магнита, D — диаметр магнита, h — высота магнита в направлении намагничивания.

2. Аксиально намагниченный кольцевой магнит.

Аксиальная z-компонента напряженности магнитного поля вдоль аксиальной оси магнита [1,2]:

$$H_z(z) = -\frac{M_{zq}}{2}\left(\frac{z-\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{D_2^2}{4}+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}} - \frac{z-\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{D_1^2}{4}+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}} - \frac{z+\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{D_2^2}{4}+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}} + \frac{z+\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{D_1^2}{4}+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}}\right), \quad (2)$$

где M_{zq} — намагниченность магнита в некоторой точке $q \in \Omega$ области магнита, z — координата точки наблюдения, D_1 — внутренний диаметр магнита, D_2 — внешний

диаметр магнита, h — высота магнита в направлении намагничивания.

3. Радиально намагниченный кольцевой магнит.

Аксиальная z-компонента напряженности магнитного поля вдоль аксиальной оси магнита [1,2]:

$$H_z(z) = -\frac{M_{rq}}{2}\left(\frac{\frac{D_1}{2}}{\sqrt{\frac{D_1^2}{4}+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}} - \frac{\frac{D_1}{2}}{\sqrt{\frac{D_1^2}{4}+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}} - \frac{\frac{D_2}{2}}{\sqrt{\frac{D_2^2}{4}+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}} + \frac{\frac{D_2}{2}}{\sqrt{\frac{D_2^2}{4}+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}} + \ln\frac{\left(\frac{D_2}{2}+\sqrt{\frac{D_2^2}{4}+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}\right)\left(\frac{D_1}{2}+\sqrt{\frac{D_1^2}{4}+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}\right)}{\left(\frac{D_2}{2}+\sqrt{\frac{D_2^2}{4}+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2}\right)\left(\frac{D_1}{2}+\sqrt{\frac{D_1^2}{4}+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2}\right)}\right), \tag{3}$$

где M_{rq} — намагниченность магнита в радиальном направлении в некоторой точке $q \in \Omega$ области магнита, z — координата точки наблюдения, D_1 — внутренний диаметр магнита, D_2 — внешний диаметр магнита, h — высота магнита.

Соотношения (1)–(3) были получены в предположении постоянства намагниченности. Однако, как показано в настоящей работе, M_{zq} и M_{rq} должны быть значениями намагниченности в некоторой точке области магнита, положение которой зависит не только от магнитных свойств материала магнита, но и от положения точки наблюдения z. Показано также, что сама допустимость использования приведенных соотношений для расчета полей постоянных магнитов определяется соблюдением ряда условий.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы

• определить условия, при которых известные формулы расчета напряженности магнитного поля (1)–(3) справедливы и, следовательно, позволяют делать оценки качества параметров магнитотвердого материала, из которого выполнен конкретный магнит;

• показать, что в этих формулах может быть использовано одно значение намагниченности для расчета магнитных полей в любой точке как в области магнита, так и вне ее;

• представить табличный и графический материал и пояснения для проведения расчетов, приемлемых в ходе контроля соответствия материала номинальным параметрам;

• на примерах, охватывающих различные виды практически используемых магнитотвердых материалов, показать близость расчетных и измеренных значений магнитных величин.

Многие исследователи свойств постоянных магнитов фокусируют внимание на размагничивающем факторе [3–6]. Размагничивающий фактор — это параметр, характеризующий линию нагрузки и, вкупе с кривой размагничивания, комплексно описывающий конкретный постоянный магнит.

В настоящей работе показано, что размагничивающий фактор может быть ключевым в определении значений намагниченности, подлежащих использованию в известных соотношениях (1)–(3).

1. Расчет напряженности магнитного поля постоянного магнита

Запишем выражение для расчета напряженности магнитного поля, создаваемого намагниченным постоянным магнитом в любой точке пространства: в области магнита или вне ее [1,2,7,8]:

$$\mathbf{H}_q = -\,grad_q \iiint\limits_{\Omega} \frac{\mathbf{M}_p\mathbf{R}_{pq}}{4\pi R_{pq}^3}\,dV_p = -\iiint\limits_{\Omega} grad_q\,\frac{\mathbf{M}_p\mathbf{R}_{pq}}{4\pi R_{pq}^3}\,dV_p, \tag{4}$$

где $\mathbf{M}_p$ — намагниченность постоянного магнита в точке p области магнита, $\mathbf{R}_{pq}$ — радиус-вектор из точки p области магнита в точку наблюдения q, Ω — область пространства, занятая постоянным магнитом.

Пусть магнит намагничен вдоль оси x, тогда

$$\mathbf{M}_p = M_p\mathbf{e}_x.$$

Ввиду того что дифференцирование под знаком интеграла производится по q, в правосторонней системе координат выражение (4) для компонент вектора напряженности магнитного поля будет иметь вид [8]:

$$H_{xq} = \iiint\limits_{\Omega} M_p K(p,q)dV_p;$$

$$H_{yq} = \iiint\limits_{\Omega} M_p L(p,q)dV_p;$$

$$H_{zq} = \iiint\limits_{\Omega} M_p P(p,q)dV_p. \tag{5}$$

Функции $K(p,q)$, $L(p,q)$, $P(p,q)$ представляют собой ядра интегральных соотношений (5).

Все дальнейшие соотношения будут построены для H_{xq} как компоненты, определяющей распределение намагниченности и поэтому представляющей наибольший интерес.

Рассмотрим точку $q \notin \Omega$. Пусть ядро $K(p,q)$ знакопостоянно по q. Тогда, используя обобщенную теорему о среднем [9], можно записать

$$H_{xq} = M_\xi \iiint\limits_{\Omega} K(p,q)dV_p. \tag{6}$$

В выражении (6) M_ξ — значение намагниченности постоянного магнита в некоторой точке $\xi \in \Omega$. Положение этой точки определяется как функциями, описывающими поведение ядер, так и функцией распределения намагниченности магнита. Для точек $q \in \Omega$ ядро $K(p, q)$ знакопостоянно по своей природе [8].

Из выражения (6) следует, что для постоянного магнита, изготовленного из любого магнитотвердого материала, поле в точке наблюдения q, для которой ядра интегральных соотношений (5) знакопостоянны, может быть вычислено интегрированием ядер $K(p, q)$, $L(p, q)$, $P(p, q)$ при известной величине намагниченности в некоторых точках магнита ξ_i.

Положение точек ξ_i определяется, в частности, положением точки наблюдения q и характером распределения намагниченности.

Значения интеграла от ядра в (6) не зависят от магнитных параметров постоянного магнита. Именно это обстоятельство и позволило получить столь простые выражения для полей ряда форм постоянных магнитов (1)–(3).

Благодаря тому что намагниченность M_p знакопостоянна в области магнита, с помощью обобщенной теоремы о среднем можно записать выражение для компоненты H_{xq} напряженности магнитного поля в виде

$$\begin{aligned} H_{xq} &= \iiint\limits_{\Omega} M_p K(p, q) dV_p \\ &= K(\alpha, q) \iiint\limits_{\Omega} M_p dV_p \\ &= K(\alpha, q) M_{aver} \Omega = M_{aver} K(\alpha, q) \Omega, \end{aligned} \tag{7}$$

где точка α принадлежит области магнита.

Согласно теореме о среднем [9,10], существует такая точка t, для которой выражение (7) можно записать в виде

$$H_{xq} = M_{aver} \iiint\limits_{\Omega} K(p, t) dV_p. \tag{8}$$

Из изложенного следует, что напряженность магнитного поля в любой точке наблюдения q может быть вычислена с использованием одного-единственного значения намагниченности, равного средней намагниченности, и интегралов от ядер, вычисляемых в некоторых точках, отличных от точки наблюдения. Это утверждение справедливо для точек наблюдения, в которых ядра интегральных соотношений (5) знакопостоянны.

Из выражений (6) и (8) следует, что точное значение намагниченности M_ξ определяется как

$$M_\xi = \left(\iiint\limits_{\Omega} K(p, t) dV_p \Big/ \iiint\limits_{\Omega} K(p, q) dV_p \right) \cdot M_{aver}. \tag{9}$$

В полученном соотношении точка t не совпадает с точкой q. Поэтому необходимо определить, насколько M_ξ отличается от M_{aver}. Покажем, что соотношение (9) зависит не только от значений ядра интегрального соотношения (6), но и от магнитных параметров магнитотвердого материала.

Используя решение интегрального уравнения, описывающего распределение намагниченности намагниченного магнита [11], запишем

$$M_p = M_{rfic} \Big/ \left(1 + \chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \right), \tag{10}$$

где M_{rfic} — значение остаточной намагниченности линеаризованной кривой размагничивания, χ — реверсивная восприимчивость линеаризованной кривой размагничивания.

Тогда среднее значение намагниченности есть

$$\begin{aligned} M_{aver} &= \frac{1}{\Omega} \iiint\limits_{\Omega} \left(M_{rfic} \Big/ \left(1 + \chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \right) \right) dV_p \\ &= M_{rfic} \Big/ \left(1 + \chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{t,\xi} dV_\xi \right| \right), \ t \in \Omega. \end{aligned} \tag{11}$$

Точное значение намагниченности

$$\begin{aligned} M_\xi &= \iiint\limits_{\Omega} M_p K_{p,q} dV_p \Big/ \iiint\limits_{\Omega} K_{p,q} dV_p \\ &= M_{rfic} \Big/ \left(1 + \chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{r,\xi} dV_\xi \right| \right), \end{aligned} \tag{12}$$

где точка q может как принадлежать области магнита, так и быть вне его, и $r \in \Omega$.

Из соотношений (11) и (12) получаем

$$\begin{aligned} M_\xi &= M_{aver} \left(1 + \chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{t,\xi} dV_\xi \right| \right) \\ &\Big/ \left(1 + \xi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{r,\xi} dV_\xi \right| \right). \end{aligned} \tag{13}$$

Определенная таким образом намагниченность позволяет точно вычислять поля как в области магнита, так и вне ее.

Очевидно, что положение точки r определяется через точку наблюдения q, хотя она и принадлежит области магнита. Отметим, что r, $t \in \Omega$. Следовательно, оценка допустимости и погрешность замены точного значения M_ξ приближенным M_{aver} может быть сделана для любой точки наблюдения с учетом формы, соотношения размеров магнита, направления намагничивания и, разумеется, магнитных параметров магнитотвердого материала.

Анализ выражения (13) дает

$$\text{если } \chi\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{r,\xi}dV_\xi\right| \ll 1 \text{ то } M_\xi \approx M_{aver},$$

$$\text{если } \chi\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{r,\xi}dV_\xi\right| \approx 1 \text{ то } M_\xi \approx M_{aver},$$

$$\text{если } \chi\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{r,\xi}dV_\xi\right| \gg 1 \text{ то}$$

$$M_\xi \approx M_{aver}\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{t,\xi}dV_\xi\right| \Big/ \left|\iiint\limits_{\Omega} K_{r,\xi}dV_\xi\right|.$$

Таким образом, в любой точке пространства напряженность магнитного поля, созданного любым постоянным магнитом, изготовленным из магнитотвердого материала любого типа, может быть рассчитана через одно-единственное значение намагниченности, а именно, среднее значение намагниченности в области магнита.

2. Размагничивающий фактор и определение среднего значения намагниченности

Среднее значение намагниченности в области магнита определяется параметрами материала постоянного магнита, которые представлены зависимостью намагниченности от размагничивающего поля, так называемой кривой размагничивания, а также формой, соотношением размеров и направлением намагничивания магнита. В свою очередь, распределение напряженности размагничивающего магнитного поля в магните может быть определено при помощи соотношения (4) через распределение намагниченности. Определить среднее значение намагниченности можно путем решения магнитостатической задачи.

Интегральное уравнение, описывающее линеаризованную магнитостатическую задачу, имеет вид [11]:

$$M_p - \chi \iiint\limits_{\Omega} M_\xi K_{p,\xi} dV_\xi = M_{rfic}.$$

Решение этого уравнения, согласно [11], описывается выражением (10).

При этом значение намагниченности в рассматриваемой точке $p \in \Omega$ вычисляется в соответствии с выражением (10) в точке $\varsigma \in \Omega$, связанной с точкой p соотношением

$$K_{p,\delta}\Omega = \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi.$$

Для начального участка кривой размагничивания (рис. 1):

$$M_q = M_r + \chi_r H_q \tag{14}$$

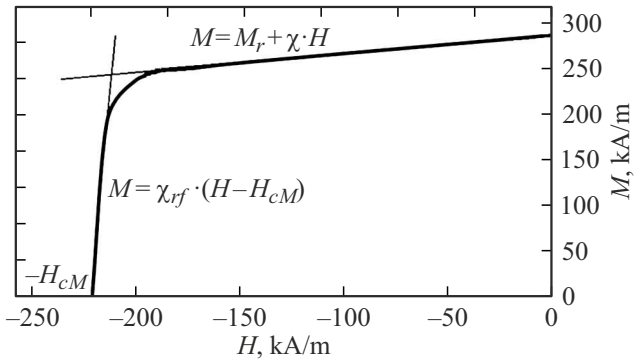

Рис. 1. Линеаризация кривой размагничивания.

и

$$M_{rfic} = M_r, \quad \chi = \chi_r, \quad H_q = \frac{M_q - M_r}{\chi}.$$

Тогда

$$M_{aver} = \frac{1}{\Omega}\iiint\limits_{\Omega} M_p dV_p$$

$$= \frac{1}{\Omega}\iiint\limits_{\Omega}\left(M_r \Big/ \left(1 + \chi\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi\right|\right)\right) dV_p.$$

При этом

$$H_{Maver} = \frac{M_{aver} - M_r}{\chi}$$

$$= \frac{1}{\Omega_\chi}\iiint\limits_{\Omega}\left(M_r \Big/ \left(1 + \chi\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi\right|\right)\right) dV_p$$

$$- \frac{M_r}{\chi}.$$

Таким образом, размагничивающий фактор [12,13], определяющий среднее значение намагниченности, равен

$$N_{Maver} = -\frac{H_{Maver}}{M_{aver}}$$

$$= \frac{1}{\chi}\left(\left(\Omega \Big/ \iiint\limits_{\Omega}\left(dV_p \Big/ \left(1 + \chi\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi\right|\right)\right)\right) - 1\right).$$

Ввиду того что интегрирование проводится по всем точкам $p \in \Omega$, его можно выразить как

$$N_{Maver} = \frac{1}{\Omega}$$

$$\times\left(\left(\Omega \Big/ \iiint\limits_{\Omega}\left(dV_p \Big/ \left(1 + \chi\left|\iiint\limits_{\Omega} K_{p,\xi} dV_{zeta}\right|\right)\right)\right) - 1\right), \tag{15}$$

т. е. через интегрирование по точкам p.

Для участка кривой размагничивания, задаваемого соотношением (рис. 1):

$$M = \chi_{rf}(H - H_{cM}) \tag{16}$$

и

$$M_{rfic} = -\chi_{rf} H_{cM}, \quad \chi = \chi_{rf}, \quad H = \frac{M}{\chi_{rf}} + H_{cM},$$

где H_{cM} — коэрцитивная сила по намагниченности.

Тогда

$$H_{Maver} = \frac{M_{aver}}{\chi_{rf}} + H_{cM},$$

$$H_{Maver} = \frac{1}{\chi_{rf}\Omega} \times \iiint\limits_{\Omega} \left(M_{rfic} \Big/ \left(1 + \chi_{rf} \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \right) dV_p \right) + H_{cM}$$

и

$$N_{Maver} = \frac{1}{\chi_{rf}} \times \left(\Omega \Big/ \iiint\limits_{\Omega} \left(dV_p \Big/ \left(1 + \chi_{rf} \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \right) \right) - 1 \right). \tag{17}$$

Из выражений (15), (17) следует, что размагничивающий фактор определяется и геометрическими параметрами, и физическими свойствами материала магнита и имеет одинаковое выражение для всех участков петли гистерезиса.

Проанализируем выражения (15), (17), полученные для размагничивающего фактора.

Если

$$\chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \ll 1,$$

то

$$N_{Maver} \approx \frac{1}{\chi} \left(\Omega \Big/ \left(\Omega - \Omega\chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{p,\xi} dV_\xi \right| \right) - 1 \right) \approx \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right|_{aver}.$$

Если

$$\chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \gg 1,$$

то

$$N_{Maver} \approx \frac{1}{\chi} \left(\Omega \Big/ \Omega \Big/ \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\theta,\xi} dV_\xi \right| \right) - 1 \approx \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\theta,\xi} dV_\xi \right|.$$

Отсюда следуют выводы:

1) На начальном участке кривой размагничивания

$$\chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \ll 1,$$

размагничивающий фактор по средней намагниченности определяется геометрическими параметрами магнита: формой, соотношением размеров и направлением намагничивания

$$N_{Maver} \approx \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right|_{aver}, \tag{18}$$

и равен среднему значению ядра интегрального выражения.

На конечном участке кривой размагничивания

$$\chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \gg 1$$

размагничивающий фактор по средней намагниченности определяется геометрическими параметрами магнита: формой, соотношением размеров и направлением намагничивания

$$N_{Maver} \approx \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\theta,\xi} dV_\xi \right|. \tag{19}$$

Точка θ — некоторая точка, принадлежащая области магнита. Значение

$$\left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\theta,\xi} dV_\xi \right|$$

строго говоря, не совпадает с

$$\left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right|_{aver}.$$

3) На криволинейном участке кривой

$$\chi \left| \iiint\limits_{\Omega} K_{\varsigma,\xi} dV_\xi \right| \approx 1$$

размагничивающий фактор по средней намагниченности определяется физическими параметрами магнетика

$$N_{Maver} \approx \frac{1}{\chi}. \tag{20}$$

Из соотношений (18)–(20) следует, что возможно табулирование значений размагничивающего фактора для различных форм, соотношений размеров и магнитных параметров постоянных магнитов. Для кольцевых магнитов, аксиально или радиально намагниченных, эти значения в виде графических зависимостей представлены на рис. 2–5. Снятое с графика значение размагничивающего фактора может быть использовано для определения средней намагниченности и последующего расчета магнитных полей как в области магнита, так и вне ее.

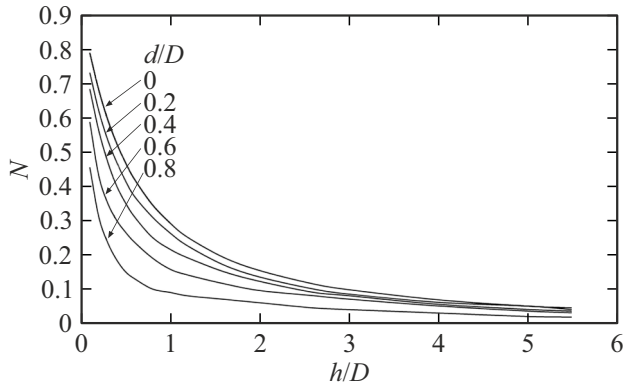

Рис. 2. Размагничивающий фактор аксиально намагниченного кольцевого магнита при условии $\chi \cdot N \ll 1$ или $\chi \cdot N \gg 1$.

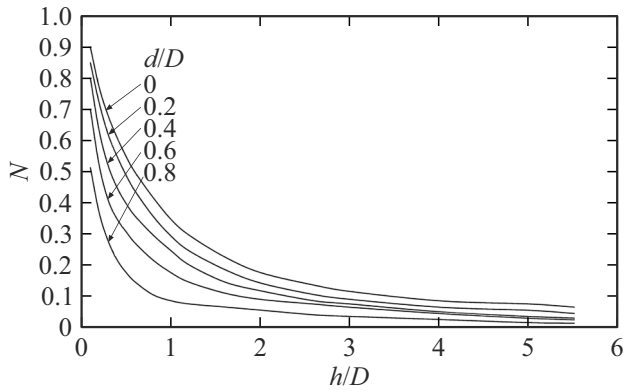

Рис. 3. Размагничивающий фактор аксиально намагниченного кольцевого магнита при условии $0.8 < \chi \cdot N < 1.2$.

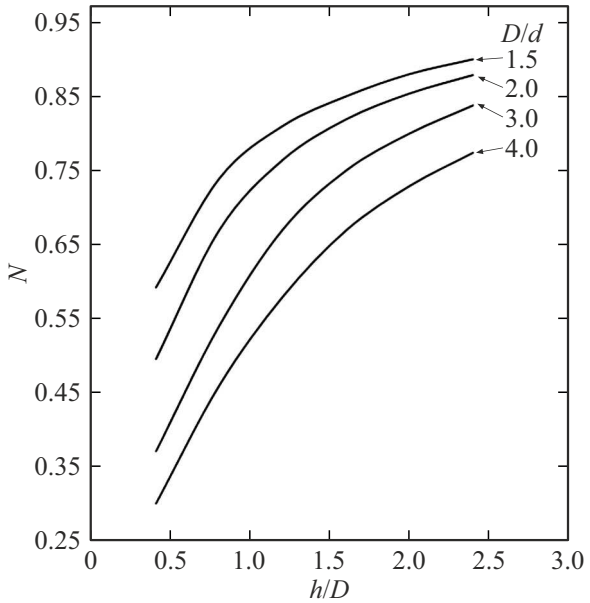

Рис. 4. Размагничивающий фактор радиально намагниченного кольцевого магнита при условии $\chi \cdot N \ll 1$ или $\chi \cdot N \gg 1$.

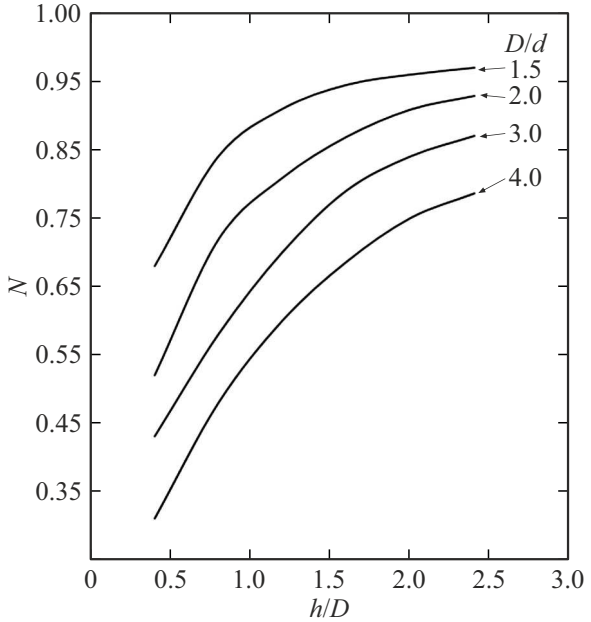

Рис. 5. Размагничивающий фактор радиально намагниченного кольцевого магнита при условии $0.8 < \chi \cdot N < 1.2$.

3. Экспериментальные и расчетные результаты

Эксперименты проводились с дисковыми и кольцевыми постоянными магнитами, изготовленными из ферритового, литого и редкоземельного магнитотвердых материалов.

Измерения магнитных полей проводились магнитометром ИМИ-641 класса 2.5, т.е. поля измерялись с погрешностью, составляющей 2.5% в конце шкалы каждого диапазона измерений: 1–200 mT, 200–2000 mT. В паспорте прибора указано, что он предназначен „для измерения... магнитной индукции постоянных магнитных полей в зазорах и на поверхностях магнитных систем,... а также для измерения остаточной намагниченности материалов при сборке, монтаже, эксплуатации... магнитных систем в машиностроении, приборостроении, электротехнике, энергетике...“.

Магнитные поля дисковых магнитов измерялись плоским зондом толщиной 1 mm с датчиком Холла. Магнитные поля кольцевых магнитов измерялись круглым зондом диаметром 4 mm с датчиком Холла. В процессе измерений положение зонда в осевом направлении фиксировалось прокладками, суммарная толщина которых измерялась с погрешностью не более 0.1 mm. В радиальном направлении положение зонда определялось исходя из того факта, что осевые точки в магнитах обследуемой формы — это точки экстремума индукции магнитного поля.

Для каждого магнита по его форме, соотношению размеров, направлению намагничивания и параметрам магнитотвердого материала определялся размагничива-

Таблица 1. Размагничивающий фактор, реверсивная восприимчивость и их произведение в Примере 1

Размагничивающий фактор (из рис. 2, 3)		Реверсивная восприимчивость		Произведение размагничивающего фактора и реверсивной восприимчивости	
N_1	N_2	χ_{dif1}	χ_{dif2}	$N_1 \cdot \chi_{dif1}$	$N_2 \cdot \chi_{dif2}$
0.68	0.73	1.45	1.50	0.986	1.095

ющий фактор по характеристикам, приведенным на рис. 2–5. На кривых размагничивания материала строилась линия нагрузки по соответствующему размагничивающему фактору и определялась намагниченность магнита. Ее значение использовалась при расчете магнитных полей по формулам (1) и (2).

Расчет проводился и для тех точек наблюдения, где не выполняется условие знакопостоянства ядра $K(p, q)$ интегрального выражения (6). Эти результаты некорректны и демонстрируют недопустимость проведения измерений в таких точках для оценки качества параметров магнитотвердого материала посредством сравнения с расчетными значениями.

3.1. Пример 1

Аксиально намагниченный магнитный диск с размерами $D = 30$ mm, $h = 6$ mm. Здесь $d/D = 0$, $h/D = 0.2$. Результаты для значений размагничивающего фактора и реверсивной восприимчивости для рассматриваемого магнитотвердого материала (рис. 6) приведены в табл. 1. Магнит изготовлен из ферритового магнитотвердого материала. Размагничивающий фактор такого магнита следует принять равным $N = 0.73$, так как $\chi \cdot N$ близко к единице (рис. 3), и значение намагниченности, вытекающее из вида кривой размагничивания (рис. 6), равно $\mu_0 \cdot Maver = 0.36$ T. Результаты измерения и расчета индукции магнитного поля в точках на оси рассматриваемого магнитного элемента приведены на рис. 6. Расчет выполнен по формуле (1).

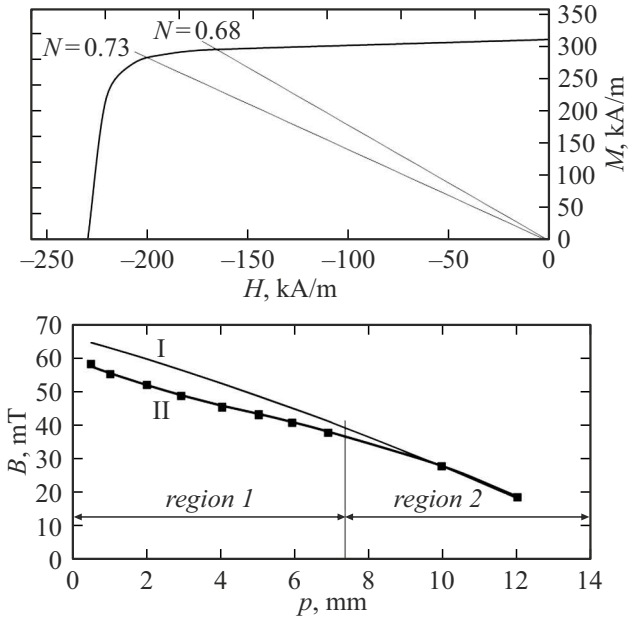

Рис. 6. Кривая размагничивания ферритового магнитотвердого материала. Расчетные I и измеренные II значения магнитной индукции на оси дискового магнита. В области *1* условие знакопостоянства ядра интегрального соотношения не выполняется, в области *2* — выполняется.

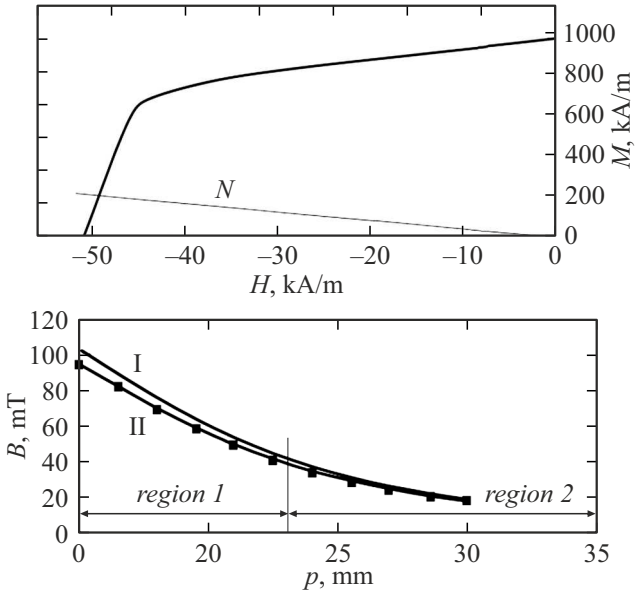

Рис. 7. Кривая размагничивания литого магнитотвердого материала типа ALNIKO. Расчетные I и измеренные II значения магнитной индукции на оси дискового магнита. В области *1* условие знакопостоянства ядра интегрального соотношения не выполняется, в области *2* — выполняется.

3.2. Пример 2

Аксиально намагниченный магнитный диск с размерами $D = 22.6$ mm, $h = 30$ mm. Здесь $d/D = 0$, $h/D = 1.33$. Магнит изготовлен из литого магнитотвердого материала типа ALNICO с кривой размагничивания, представленной на рис. 7. Здесь $\chi_{dif} \cdot N = 36$. Размагничивающий фактор такого магнита $N = 0.28$ (рис. 2), и значение намагниченности $\mu_0 \cdot Maver = 0.221$ T. Результаты измерения и расчета индукции магнитного поля в точках на оси рассматриваемого магнитного элемента приведены на рис. 7. Расчет выполнен по формуле (1).

Таблица 2. Относительные положения точек экстремумов z/d и соответствующие относительные экстремальные значения индукции поля $B/(\mu_0 \cdot Maver)$ для радиально намагниченного кольцевого магнита

h/d	D/d								
	Расчетные величины	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0
0.05	z/d	0. 300	0.329	0.354	0.366	0.385	0.387	0.395	0.400
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.014	0.021	0.024	0.027	0.028	0.029	0.030	0.030
0.10	z/d	0.302	0.334	0.356	0.371	0.381	0.391	0.040	0.402
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.028	0.042	0.049	0.053	0.056	0.058	0.060	0.061
0.15	z/d	0.305	0.337	0.359	0.375	0.386	0.394	0.400	0.405
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.042	0.062	0.073	0.080	0.084	0.087	0.089	0.091
0.20	z/d	0.310	0.341	0.363	0.379	0.390	0.398	0.404	0.410
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.055	0.082	0.096	0.105	0.111	0.115	0.118	0.120
0.25	z/d	0.316	0.347	0.369	0.384	0.396	0.404	0.410	0.416
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.068	0.101	0.119	0.130	0.138	0.143	0.147	0.149
0.30	z/d	0.323	0.354	0.375	0.393	0.403	0.411	0.417	0.422
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.080	0.119	0.141	0.180	0.164	0.170	0.174	0.178
0.35	z/d	0.331	0.362	0.383	0.399	0.410	0.419	0.426	0.434
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.091	0.137	0.162	0.178	0.189	0.196	0.201	0.205
0.40	z/d	0.340	0.371	0.392	0.408	0.418	0.428	0.434	0.439
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.102	0.153	0.183	0.201	0.213	0.222	0.228	0.232
0.45	z/d	0.351	0.381	0.403	0.418	0.429	0.438	0.445	0.450
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.112	0.169	0.202	0.223	0.237	0.246	0.253	0.258
0.50	z/d	0.363	0.392	0.413	0.429	0.440	0.449	0.456	0.462
	$B/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.121	0.184	0.220	0.233	0.259	0.270	0.277	0.283

Примечание: . D — внешний, d — внутренний диаметры, h — высота кольца. Расчет выполнен по формуле (3).

3.3. Пример 3

Аксиально намагниченный магнитный диск с размерами $D = 30\,\text{mm}$, $h = 10\,\text{mm}$. Здесь $d/D = 0$, $h/D = 0.33$. Магнит изготовлен из магнитотвердого материала типа Nd-Fe-B с кривой размагничивания, представленной на рис. 8. Здесь $\chi_{dif} \cdot N = 0.54$. Размагничивающий фактор $N = 0.64$ (рис. 2), значение намагниченности $\mu_0 \cdot Maver = 1.32\,\text{T}$. Результаты измерения и расчета индукции магнитного поля в точках на оси рассматриваемого магнитного элемента приведены на рис. 8. Расчет выполнен по формуле (1).

3.4. Пример 4

Аксиально намагниченное магнитное кольцо, имеющее размеры $D = 30\,\text{mm}$, $d = 16\,\text{mm}$, $h = 10\,\text{mm}$. Здесь $d/D = 0.53$, $h/D = 0.33$. Магнит изготовлен из магнитотвердого материала типа ALNICO с кривой размагничивания, представленной на рис. 9. Здесь $\chi_{dif} \cdot N = 3.2$. Размагничивающий фактор $N = 0.4$ (рис. 2), и значение намагниченности $\mu_0 \cdot Maver = 0.32\,\text{T}$. Результаты измерения и расчета индукции магнитного поля в точках на оси рассматриваемого магнитного элемента приведены на рис. 9. Расчет выполнен по формуле (2).

При контроле параметров материала постоянных магнитов на практике удобно пользоваться табл. 2, 3.

3.5. Пример использования табл. 2

Радиально намагниченное магнитное кольцо с размерами $D = 50\,\text{mm}$, $d = 25\,\text{mm}$, $h = 10\,\text{mm}$. Размагничивающий фактор $N = 0.5$ (рис. 4). Пусть значение намагниченности при данном размагничивающем факторе составляет $\mu_0 \cdot Maver = 1\,\text{T}$. Тогда, согласно табл. 2[2], максимум магнитной индукции достигается при $z/d = 0.371$ ($z = 9.275\,\text{mm}$), и ее значение в этой точке равно $B = 0.153 \cdot 1\,\text{T} = 0.153\,\text{T}$.

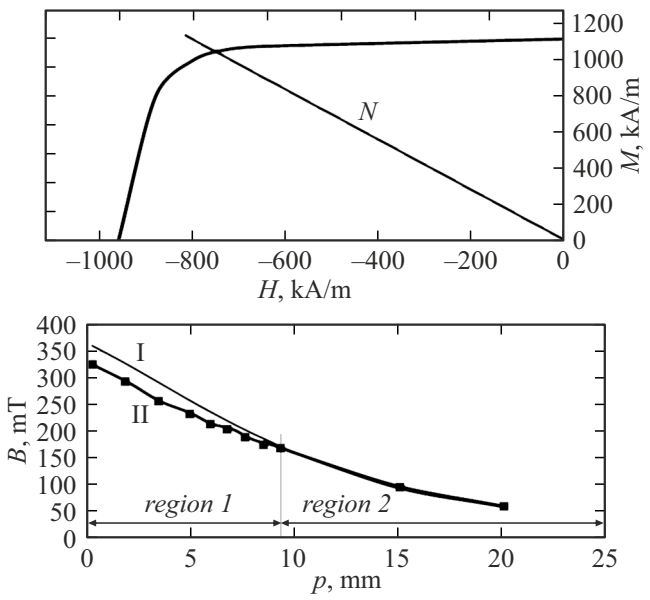

Рис. 8. Кривая размагничивания редкоземельного магнитотвердого материала типа Nd-Fe-B. Расчетные I и измеренные II значения магнитной индукции на оси дискового магнита. В области *1* условие знакопостоянства ядра интегрального соотношения не выполняется, в области *2* — выполняется.

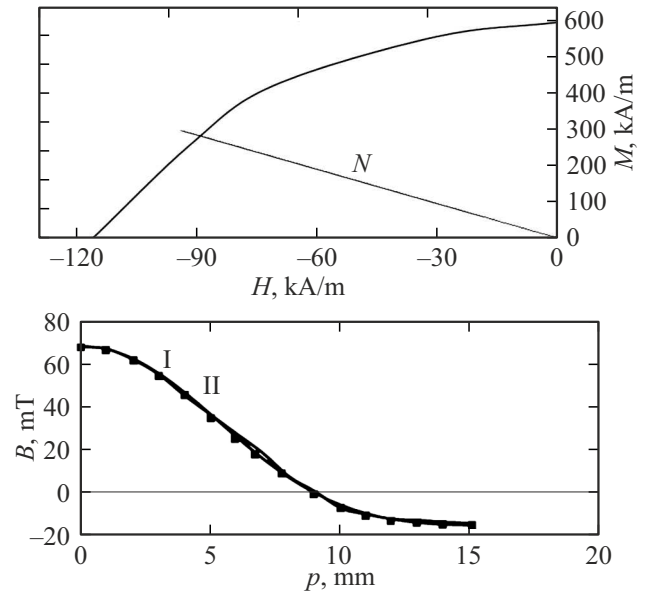

Рис. 9. Кривая размагничивания литого магнитотвердого материала типа ALNIKO. Расчетные I и измеренные II значения магнитной индукции на оси кольцевого магнита.

3.6. Примеры использования табл. 3

3.6.1. Пример 1

Аксиально намагниченное магнитное кольцо с размерами $D = 50\,\text{mm}$, $d = 25\,\text{mm}$, $h = 7.5\,\text{mm}$. Размагничивающий фактор $N = 0.6$ (рис. 2). Пусть значение намагниченности при этом составляет $\mu_0 \cdot Maver = 1\,\text{T}$. Тогда, согласно табл. 3, экстремумы магнитной индукции достигаются при $z_1 = 0$, и ее значение в этой точке равно $B = 0.139 \cdot 1\,\text{T} = 0.139\,\text{T}$, и при $z_3/d = 0.895$ ($z_3 = 22.4\,\text{mm}$), со значением магнитной индукции в точке $B = -0.191 \cdot 0.139\,\text{T} = -0.0265\,\text{T}$.

3.6.2. Пример 2

Аксиально намагниченное магнитное кольцо с размерами $D = 50\,\text{mm}$, $d = 25\,\text{mm}$, $h = 50\,\text{mm}$. Размагничивающий фактор $N = 0.12$ (рис. 2). Пусть значение намагниченности при этом составляет $\mu_0 \cdot Maver = 1\,\text{T}$. Тогда, согласно табл. 3, экстремумы магнитной индукции достигаются:

• в точке $z_1 = 0$, где значение магнитной индукции равно

$$B = 0.187 \cdot 1\ \text{T} = 0.187\,\text{T};$$

• в точке $z_2/d = 0.38$ ($z_2 = 9.5\,\text{mm}$), где значение магнитной индукции равно

$$B = 1.019 \cdot 0.187\,\text{T} = 0.1906\,\text{T};$$

• в точке $z_3/d = 1.52$ ($z_3 = 38\,\text{mm}$), где значение магнитной индукции равно

$$B = -0.556 \cdot 0.187\,\text{T} = -0.104\,\text{T}.$$

Заключение

Примеры расчетов и измерений полей постоянных магнитов, изготовленных из магнитотвердых материалов различных типов (ферритовые, литые и редкоземельные), демонстрируют, что значения средней намагниченности для любого участка кривой размагничивания, полученные на основе величины размагничивающего фактора, позволяют рассчитывать магнитные поля в различных точках наблюдения.

Приведены графические зависимости для определения значений размагничивающего фактора аксиально и радиально намагниченных кольцевых магнитов для различных соотношений размеров. Также для магнитов кольцевой формы построены таблицы положения экстремумов магнитного поля и значения полей в отношении к намагниченности для точек экстремумов.

Таким образом, использование представленных в работе формул, графиков и таблиц дает возможность успешно решать практическую задачу оценки магнитных параметров конкретного постоянного магнита и тем самым существенно облегчить контроль соответствия материала заявленным параметрам.

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Таблица 3. Относительное экстремальное значение индукции поля $B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$ в точке $z_1 = 0$, относительные положения точек других экстремумов z_2/d, z_3/d и соответствующие отношения B_2/B_1, B_3/B_1 индукции поля в этих точках к индукции в точке $z_1 = 0$ для аксиально намагниченного кольцевого магнита

h/d	D/d						
	Расчетные величины	1.5	2.0	3.0	4.0	6.0	8.0
0.1	z3/d	0.755	0.880	1.084	1.264	1.580	1.850
	B_3/B_1	−0.196	−0.183	−0.157	−0.136	−0.106	−0.087
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.033	0.050	0.066	0.075	0.083	0.087
0.2	z_3/d	0.765	0.880	1.088	1.270	1.584	1.560
	B_3/B_1	−0.200	−0.186	−0.160	−0.138	−0.108	−0.088
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.064	0.097	0.130	0.146	0.163	0.171
0.3	z_3/d	0.775	0.895	1.100	1.280	1.592	1.866
	B_3/B_1	−0.207	−0.191	−0.164	−0.142	−0.111	−0.091
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.091	0.139	0.188	0.213	0.237	0.250
0.6	z_3/d	0.850	0.960	1.156	1.320	1.620	1.900
	B_3/B_1	−0.241	−0.220	−0.186	−0.160	−0.125	−0.102
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.143	0.227	0.318	0.366	0.415	0.440
0.8	z_3/d	0.918	1.016	1.200	1.364	1.656	1.920
	B_3/B_1	−0.277	−0.248	−0.208	−0.178	−0.139	−0.113
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.154	0.253	0.367	0.429	0.493	0.525
1.0	z_3/d	0.993	1.100	1.260	1.416	1.700	1.960
	B_3/B_1	−0.322	−0.283	−0.234	−0.200	−0.155	−0.126
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.152	0.260	0.391	0.465	0.543	0.583
2.0	z_3/d	1.449	1.520	1.656	1.776	2.000	2.224
	B_3/B_1	−0.693	−0.556	−0.416	−0.342	−0.258	−0.209
	Z_2/d	0.510	0.380				
	B_2/B_1	1.094	1.019				
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.094	0.187	0.340	0.447	0.578	0.652
3.0	z_3/d	1.938	2.012	2.120	2.224	2.412	2.600
	B_3/B_1	−1.309	−0.992	−0.682	−0.534	−0.386	−0.308
	Z_2/d	1.050	1.000	0.820	0.636		
	B_2/B_1	1.626	1.338	1.098	1.022		
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.054	0.117	0.242	0.349	0.501	0.598
4.0	z_3/d	2.433	2.504	2.612	2.700	2.868	3.028
	B_3/B_1	−2.172	−1.599	−1.039	−0.778	−0.536	−0.419
	Z_2/d	1.560	1.500	1.372	1.256	0.980	
	B_2/B_1	2.459	1.904	1.386	1.174	1.032	
	$B_1/(\mu_0 \cdot Maver)$	0.034	0.076	0.170	0.263	0.415	0.522

Примечание: D — внешний, d — внутренний диаметры, h — высота кольца. Расчет выполнен по формуле (2).

Список литературы

[1] А.В. Куневич, А.В. Подольский, И.Н. Сидоров. *Ферриты. Энциклопедический справочник* (Лик, СПб., 2004)

[2] С.И. Левченко, И.В. Литвинова, С.А. Цатурян. Электронная техника, серия 7, Ферритовая техника, **1**, 107 (1967).

[3] D.X. Chen, J.A. Brug, R.B. Goldfarb. IEEE Trans. Magnetics, **21** (4), 3601 (1991).

[4] D.X. Chen, E. Pardo, A. Sanchez. IEEE Trans. Magnetics, **41** (6), 2077 (2005).

[5] K. Etse, X. Mininger. J. Magn. Magn. Mater., **564** (2), (2022). Электронный ресурс. Режим доступа: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0304885322010368

[6] C.R.H. Bahl. AIP Adv., **11** (7), (2021). Электронный ресурс. Режим доступа: https://pubs.aip.org/aip/adv/article/11/7/075028/989699/Estimating-the-demagnetization-factors-for-regular

[7] В. Смайт. *Электростатика и электродинамика* (Рипол Классик, М., 2014)

[8] А.В. Подольский. ЖТФ, **46** (12), 2465 (1976). [A.V. Podol'skii. Tech. Phys., **21** (12), 1459 (1976).]

[9] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений* (Наука, М., 1974)

[10] В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. *Основы математического анализа* (Наука, М., 1965)

[11] С.Г. Михлин. *Лекции по линейным интегральным уравнениям* (Физматлит, М., 1959)

[12] С.Г. Сандомирский. *Расчет и анализ размагничивающего фактора ферромагнитных тел* (Белорусская наука, Минск, 2015)

[13] Ю.В. Афанасьев. *Феррозондовые приборы* (Энергоатомиздат, Л., 1986)