06

Статистический метод определения границ диапазонов неразрушающих нагрузок и деформаций синтетических нитей

© Л.Ф. Вьюненко, Е.С. Цобкалло, Т.Б. Кольцова

Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: Viunenko.LF@suitd.ru

Поступило в Редакцию 9 апреля 2025 г.
В окончательной редакции 13 мая 2025 г.
Принято к публикации 15 мая 2025 г.

Предложен новый метод оценки предельных, не вызывающих разрушения значений нагрузок и деформаций при растяжении элементарных синтетических нитей, основанный не на критических разрывных значениях, а на статистическом анализе значений разрывной нагрузки и деформации, определяемых экспериментально. Изложенный метод оценки безопасных диапазонов нагрузок и деформаций при механических воздействиях, использующий трехпараметрическое распределение Вейбулла, может быть распространен на широкий круг материалов.

Ключевые слова: синтетические нити, неразрушающие нагрузки, неразрушающие деформации, распределение Вейбулла–Гнеденко, трехпараметрическое распределение Вейбулла.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.15.60810.20340

Полимерные материалы, в том числе синтетические волокна и нити, относятся к важнейшим конструкционным материалам, так как являются основой для создания композиционных материалов и других востребованных технических изделий, в которых несущими нагрузку элементами являются нити и волокна. Подходы, основанные на выполнении условий прочности и жесткости, представляются устоявшимися в расчетах надежности изделий и содержат важнейшие характеристики механических свойств — величины допускаемых значений напряжений и допускаемых значений деформаций. Эти величины, зависящие от свойств материалов, как правило, определяются экспериментально для различных конструкционных материалов и представляют собой критические значения напряжения (для условия прочности) и деформации (для условия жесткости) при разрушении, уменьшенные в определенное число раз. Они являются справочными для традиционных конструкционных материалов. Однако для полимерных конструкционных материалов, в том числе волокон и нитей, задача определения допускаемых величин требует особого подхода, что связано с особенностями механических свойств (выраженными релаксационными свойствами, нелинейностью кривой растяжения и др.). Особую актуальность решение задачи корректного определения безопасных значений напряжений и деформаций приобретает для тонких элементарных синтетических нитей (составляющих комплексные нити) ввиду большой относительной ошибки в определении размеров площадей поперечного сечения.

Для описания и моделирования значений разрывных характеристик материалов в качестве вероятностной модели часто применяют распределение Вейбулла, имеющее различные формы и нотации. Обычно используется двухпараметрическая форма (распределение Вейбулла–Гнеденко) с функцией плотности вероятностей [1–3]:

$$f(x;a,k)=\frac{a}{k}\left(\frac{x}{k}\right)^{a-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{k}\right)^{a}\right),\qquad x\geqslant 0,\quad (1)$$

где a — параметр формы, k — параметр масштаба.

В работе [1] показано, что распределение прочностных характеристик удовлетворительно описывается в рамках модели Вейбулла, в [1,2] с использованием модели (1) показаны особенности статистических распределений экспериментальных значений разрывных усилий и деформаций элементарных нитей полиамида-6, которые, возможно, связаны с различной локализацией процесса разрушения. В работе [3] с использованием двухпараметрического распределения Вейбулла проведен анализ надежности полимеров и композиционных материалов из полимерных смесей на прочность при растяжении и изгибе. Для синтетических материалов такая модель может применяться для описания статистических распределений значений разрывных напряжений в исследованных ориентированных полимерных монофиламентных и полифиламентных волокнах [4]. Модель (1) достаточно хорошо описывает характеристики центра распределения, но непригодна для корректной оценки минимальных значений случайной величины. Для этой цели нами предложено использовать трехпараметрическую форму распределения Вейбулла, которая содержит параметр сдвига x_0:

$$f(x;x_0,a,k)=\begin{cases}\frac{a}{k}\left(\frac{x-x_0}{k}\right)^{a-1}\exp\left(-\left(\frac{x-x_0}{k}\right)^{a}\right), & x\geqslant x_0>0,\\ 0, & x<x_0.\end{cases}\quad (2)$$

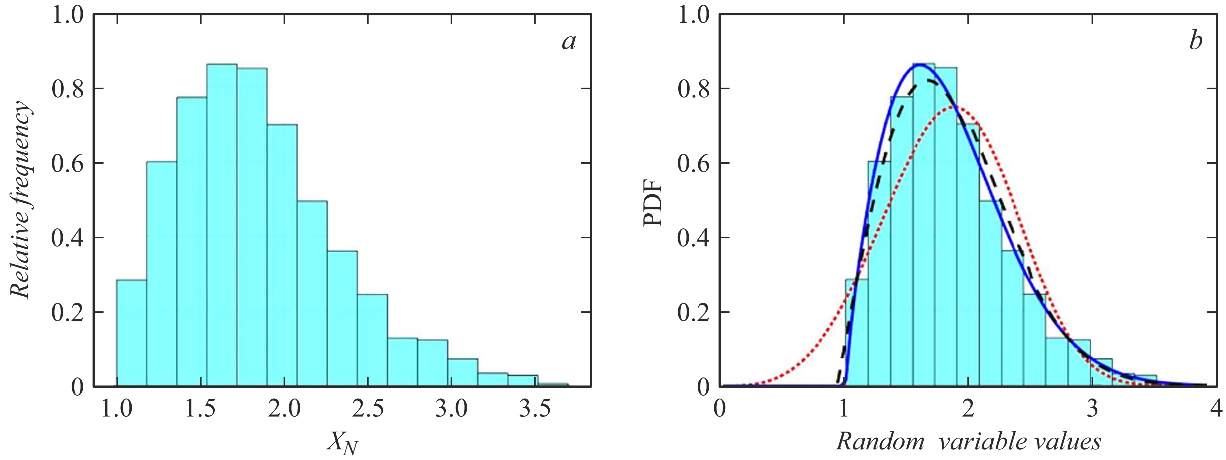

Рис. 1. Результаты статистической обработки выборки из трехпараметрического распределения Вейбулла W $(x_0 = 1,\ k = 0.95,\ a = 1.8)$. *a* — гистограмма относительных частот, *b* — графики функций плотности вероятностей (PDF) двухпараметрического (пунктирная линия), полуэмпирического трехпараметрического (штриховая линия) и теоретического трехпараметрического (сплошная линия) распределений.

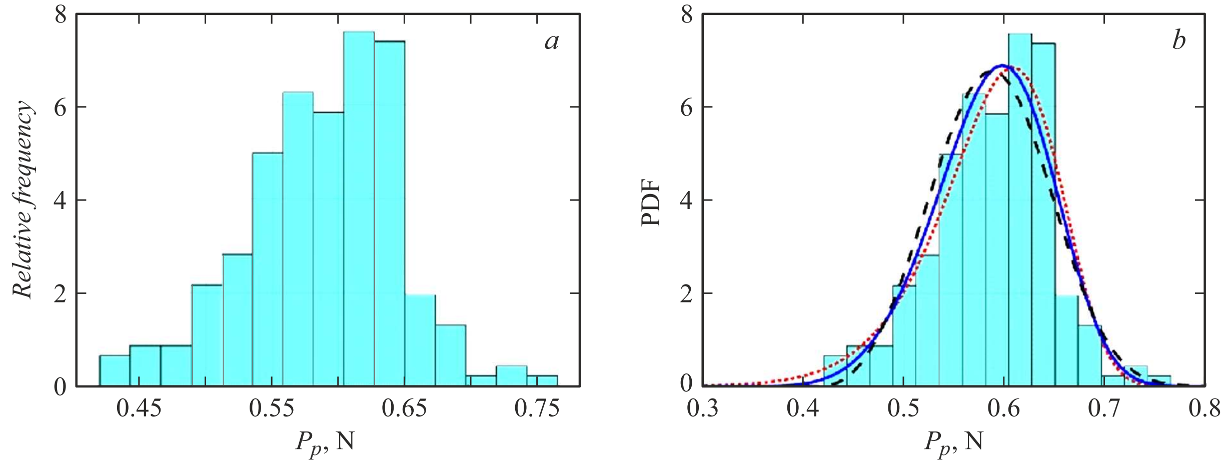

Рис. 2. Результаты статистической обработки экспериментальных значений разрывных нагрузок элементарных нитей полиамида-6. *a* — гистограмма относительных частот, *b* — графики функций плотности вероятностей двухпараметрического (пунктирная линия), полуэмпирического трехпараметрического (штриховая линия) и теоретического трехпараметрического (сплошная линия) распределений.

Физический смысл x_0 — пороговое (наименьшее) значение случайной величины. Такая модель используется для оценок вероятности безотказной работы технических устройств [5], эксплуатационных рисков [6], в некоторых прикладных экономических и медицинских задачах [7]. В работе [8] предложен способ прогнозирования с помощью модели (2) разрушения в стальных пластинах, содержащих поверхностные трещины. Для оценки характеристик свойств синтетических полимерных материалов, в том числе и механических, подобный статистический подход ранее не применялся. Преимущество модели (2) при изучении механического поведения синтетических ориентированных полимерных материалов (волокон, нитей) состоит в том, что она дает возможность оценить предельное значение нагрузки или деформации, не вызывающее разрушения. Общие рекомендации по расчету доверительных границ параметров трехпараметрического распределения Вейбулла, изложенные в ГОСТ 11.007–75 [9], не позволяют построить необходимую для рассматриваемого случая оценку параметра сдвига. В [9] оценкой значения этого параметра предлагается считать меньшее из двух значений: минимальное из наблюдаемых в эксперименте и полученное в рекомендованном расчете. Для оценки границ диапазона неразрушающих нагрузок и деформаций такой подход неприемлем. Кроме того, современные численные методы позволяют получать более точное решение соответствующей вычислительной задачи. Цель настоящей работы состоит в разработке вероятностного метода оценки диапазона безопасных, не вызывающих разруше-

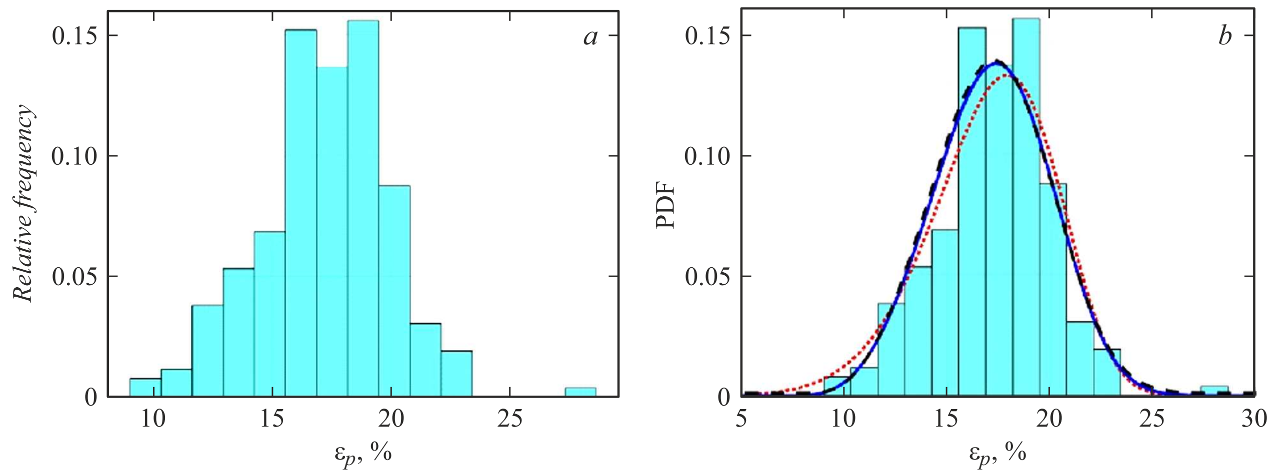

Рис. 3. Результаты статистической обработки экспериментальных значений разрывных деформаций элементарных нитей полиамида-6. *a* — гистограмма относительных частот; *b* — графики функций плотности вероятностей двухпараметрического (пунктирная линия), полуэмпирического трехпараметрического (штриховая линия) и теоретического трехпараметрического (сплошная линия) распределений.

ния нагрузок и деформаций синтетических материалов с использованием трехпараметрического распределения Вейбулла. В качестве объекта исследования были выбраны элементарные нити полиамида-6, составляющие комплексную нить технического назначения, диаметр нитей $9 \pm 0.5\,\mu$m. Процесс разрушения нитей изучался в режиме активного растяжения на приборе Instron 1122 со скоростью растяжения 20 mm/min в соответствии с ГОСТ 6611.2–73 [10]. Экспериментально определены значения усилия при разрыве (P_p, N) и относительного удлинения при разрыве (ε_p, %). Количество испытанных образцов — 200 штук.

Предлагаемый метод определения границ диапазонов неразрушающих нагрузок и деформаций применим в том случае, когда есть достаточные основания предполагать, что полученные в эксперименте величины подчиняются закону распределения Вейбулла, и состоит в следующем. Рассматривая экспериментальные данные как выборочные значения случайной величины с функцией плотности вероятностей (2), построим оценку ее минимального возможного значения. Для этого при статистической обработке экспериментальных данных используем три вероятностные модели. Первая — двухпараметрическая (1), параметры которой определяются методом максимального правдоподобия (ММП) [11]. Вторая — трехпараметрическая (2), параметр сдвига x_0 которой определяется по полуэмпирической формуле [12], а остальные два параметра (a и k) — методом ММП (далее полуэмпирическая трехпараметрическая модель). Третья — трехпараметрическая (2), все три параметра которой одновременно определяются методом ММП (далее теоретическая трехпараметрическая модель). Вторая и третья модели позволяют рассчитать оценки минимального значения анализируемой случайной величины. Затем в качестве границы безопасных значений следует выбрать меньшую. Поясним предлагаемый метод на следующем примере. Смоделируем выборку X_N объема $N = 1000$ из трехпараметрического распределения Вейбулла с функцией плотности вероятностей (2) и следующими значениями параметров: $x_0 = 1$, $k = 0.95$, $a = 1.8$. Значения случайной величины будем считать безразмерными, поскольку предлагаемый метод оценки параметра сдвига применим к любым данным, подчиняющимся распределению Вейбулла, и не зависит от единиц измерения. Результат моделирования представлен на рис. 1, *a* в виде гистограммы относительных частот. На рис. 1, *b* она показана вместе с графиками функций плотности вероятностей, отвечающими трем перечисленным выше моделям. Параметры моделей получены численно путем поиска максимума логарифмической функции правдоподобия выборки X_N заданной вероятностной модели. В расчете получены следующие значения параметров: для двухпараметрической модели $x_0 = 0$, $k = 2.0189$, $a = 3.9491$, для полуэмпирической трехпараметрической модели $x_0 = 0.9182$, $k = 1.0360$, $a = 2.0248$, для теоретической трехпараметрической модели $x_0 = 0.9978$, $k = 0.9403$, $a = 1.8064$. Наибольшее значение логарифмической функции правдоподобия соответствовало теоретической трехпараметрической модели.

При обработке результатов моделирования для каждой модели фиксировали минимальное значение и вычисляли математическое ожидание MX, медиану $\operatorname{Med} X$, моду $\operatorname{Mod} X$ — характеристики центра распределения [13]:

$$MX = k\Gamma\left(1 + \frac{1}{a}\right) + x_0, \quad \Gamma(z) = \int\limits_0^{+\infty} t^{z-1} e^t dt$$

— гамма-функция,

$$\operatorname{Med} X = k(\ln 2)^{1/a} + x_0,$$

Таблица 1. Характеристики центра распределения и минимальное значение для вероятностных моделей

	Математическое ожидание	Медиана	Мода	Минимальное значение
Теоретические значения	1.8448	1.7750	1.6054	1
Выборочные значения	1.8344	1.7694	1.6048	1.0164
Двухпараметрическая модель	1.8286	1.8400	1.8750	0
Трехпараметрическая модель (полуэмпирическая)	1.8337	1.7647	1.5972	0.9182
Трехпараметрическая модель (теоретическая)	1.8338	1.7654	1.5995	0.9978

Таблица 2. Значения характеристик центра распределения и минимальное значение для вероятностных моделей усилий при разрыве P_p и разрывных деформаций ε_p синтетических нитей полиамида-6

	Среднее значение		Медиана		Мода		Минимальное значение	
	P_p, N	$\varepsilon_p, \%$	P_p, N	$\varepsilon_p, \%$	P_p, N	$\varepsilon_p, \%$	P_p, N	$\varepsilon_p, \%$
Выборочные значения	0.59	17.20	0.60	17.40	0.63	17.52	0.43	9.60
Двухпараметрическая модель	0.59	17.10	0.59	17.35	0.61	17.89	0	0
Трехпараметрическая модель (полуэмпирическая)	0.59	17.17	0.59	17.18	0.59	17.27	0.42	8.29
Трехпараметрическая модель (теоретическая)	0.59	17.17	0.59	17.22	0.60	17.37	0.34	7.62

$$\operatorname{Mod} X = k\frac{(a-1)^{1/a}}{a^{1/a}} + x_0, \ \ a > 1.$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1. Из полученных результатов следует, что для смоделированных данных лучшее согласие с результатами моделирования и наиболее точную оценку минимального значения дает теоретическая трехпараметрическая модель. Полуэмпирическая трехпараметрическая модель дает меньшее значение параметра сдвига, поэтому к нему можно относиться как к оценке „с запасом“. Отметим, что двухпараметрическая модель завышает значения $\operatorname{Med} X$ и $\operatorname{Mod} X$ и в принципе не позволяет оценить наименьшее возможное значение случайной величины. Применим предложенный метод для оценки диапазона неразрушающих нагрузок элементарных синтетических нитей полиамида-6. На рис. 2, *a* показана гистограмма относительных частот, построенная по данным измерений усилия при разрыве P_p. Графики функций плотности вероятностей двухпараметрического, полуэмпирического трехпараметрического и теоретического трехпараметрического распределений приведены на рис. 2, *b*. Минимальные значения P_p и характеристики центра распределения, полученные на основе трех вероятностных моделей, представлены в табл. 2. Из двух значений минимального P_p меньшим оказалось полученное на основе теоретической трехпараметрической модели. Согласно предложенному вероятностному методу оценки границы диапазона безопасных нагрузок, не вызывающих разрушения исследуемого материала, можно принять значение $P_p = 0.34\,\mathrm{N}$.

Для проведения корректных расчетов механической надежности работы конструкций во многих практических случаях требуется также определение границы безопасных значений деформаций. В настоящей работе предложенный подход применен и для определения границы диапазона неразрушающих деформаций. На рис. 3, *a* показана гистограмма относительных частот, построенная по результатам измерений деформаций при разрыве ε_p. Графики функций плотности вероятностей двухпараметрического, полуэмпирического трехпараметрического и теоретического трехпараметрического распределений приведены на рис. 3, *b*. Минимальные значения ε_p и характеристики центра распределения, полученные на основе трех вероятностных моделей, представлены в табл. 2. В соответствии с предложенным методом оценки границы диапазона безопасных, не вызывающих разрушения деформаций исследуемого материала можно принять значение $\varepsilon_p = 7.62\,\%$. В задачах „повышенной ответственности“ для обеспечения большей надежности возможно введение коэффициента запаса прочности и коэффициента запаса жесткости. Таким образом, предложен метод определения безопасных значений напряжений и деформаций при механическом нагружении материалов, основанный не на критических разрывных значениях, а на статистическом подходе определения диапазона неразрушающих нагрузок и деформаций. Показано, что для статистической оценки границ безопасных диапазонов нагрузки и деформации материалов требуется использование трехпараметрической модели Вейбулла. Предложено производить расчет параметров трехпараметрической модели двумя способами — полуэмпирическим и теоретическим, дающими различающиеся оценки параметра сдвига, и определять границы безопасных нагрузок и деформаций, основываясь на наименьшей из двух оценок параметра сдвига. Результаты исследования могут быть использованы при сертификации изделий из синтетических материалов, при разработке технологий их получения и определения режимов использования, при разработке новых стандартов и технических условий, устанавливающих научно обоснованные нормы показателей.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Ю.М. Бойко, В.А. Марихин, О.А. Москалюк, Л.П. Мясникова, Е.С. Цобкалло, Письма в ЖТФ, **45** (8), 37 (2019). DOI: 10.21883/PJTF.2019.08.47620.17711 [Yu.M. Boiko, V.A. Marikhin, O.A. Moskalyuk, L.P. Myasnikova, E.S. Tsobkallo, Tech. Phys. Lett., **45**, 404 (2019). DOI: 10.1134/S1063785019040229].

[2] Т.Б. Кольцова, Е.С. Цобкалло, О.А. Москалюк, Изв. вузов. Технология легкой промышленности, № 2, 9 (2021). DOI: 10.46418/0021-3489_2021_52_02_02

[3] R.K. Sundaram, K.S. Senthil, S.P. Edwin, R. Pandiyarajan, J. Chin. Inst. Eng., **45** (7), 588 (2022). DOI: 10.1080/02533839.2022.2101538

[4] Ю.М. Бойко, В.А. Марихин, Л.П. Мясникова, Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования, № 6, 3 (2022). DOI: 10.31857/S1028096022060073 [Yu.M. Boiko, V.A. Marikhin, L.P. Myasnikova, J. Surf. Investig., **16** (3), 321 (2022). DOI: 10.1134/S1027451022030247].

[5] A. Shangguan, N. Feng, R. Fei, X. Hei, Y. Jin, L. Mu, Eksploatacja Niezawodność — Maintenance Reliability, **27** (3) (2025). DOI: 10.17531/ein/199426

[6] М.Ю. Прус, Технологии техносферной безопасности, **96** (2), 161 (2022). DOI: 10.25257/TTS.2022.2.96.161-179

[7] N.T. Thomopoulos, *Statistical distributions: applications and parameter estimates* (Springer, Cham, 2017). DOI: 10.1007/978-3-319-65112-5

[8] X. Gao, R.H. Dodds, Jr., R.L. Tregoning, J.A. Joyce, R.E. Link, Fatigue Fracture Eng. Mater. Struct., **22** (6), 481 (1999). DOI: 10.1046/j.1460-2695.1999.00202.x

[9] *Прикладная статистика. Правила определения оценок и доверительных границ для параметров распределения Вейбулла*, ГОСТ 11.007–75. https://www.russiangost.com/p-224011-gost-11007-75.aspx

[10] *Нити текстильные. Методы определения разрывной нагрузки и удлинения при разрыве*, ГОСТ 6611.2–73. https://meganorm.ru/Data2/1/4294823/4294823030.pdf

[11] С.А. Айвазян, В.С. Мхитарян, *Прикладная статистика и основы эконометрики* (ЮНИТИ, М., 1998).

[12] Л.Ф. Вьюненко, Обозрение прикладной и промышленной математики, **8** (2), 561 (2001).

[13] Р.Н. Вадзинский, *Справочник по вероятностным распределениям* (Наука, СПб., 2001), с. 159.