03

Влияние шумов с различными спектрами на устойчивость течений с вращением

© Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова

Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: jilenko@imec.msu.ru

Поступило в Редакцию 31 января 2025 г.
В окончательной редакции 11 апреля 2025 г.
Принято к публикации 11 апреля 2025 г.

Численно исследовано воздействие двух видов шума с различающимися спектрами на устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости во вращающемся сферическом слое. Рассматривается неустойчивость, приводящая к образованию вторичного течения с парой вихрей Тейлора. Шум вносится в течение путем добавления к постоянной средней скорости вращения внутренней сферы случайных во времени флуктуаций с нулевым средним значением. Установлено, что при равных амплитудах разным видам спектра шума соответствуют разные значения предела устойчивости.

Ключевые слова: шум, управление неустойчивостью, сферическое течение Куэтта.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.14.60760.20271

Течения в природе и технических системах, как правило, подвержены воздействию внешнего шума [1]. Шум также может использоваться при получении энергии из волновых и ветровых потоков [2]. Наклон спектра шума в логарифмических координатах (см., например, рис. 1) принято представлять как $1/f^{\alpha}$, в природных системах случайные во времени флуктуации часто аппроксимируются „цветным“ шумом [3,4] с диапазоном изменения $0 < \alpha < 2$ [5]. Такой шум в динамических системах может вызывать бифуркации и переходы к хаосу [6,7]. В сферическом течении Куэтта (СТК) — течении вязкой несжимаемой жидкости между коаксиально расположенными сферами, которое вызвано вращением границ, — добавление шума с равными амплитудами, но с различными видами спектра приводит к генерации средних течений различной интенсивности [8,9]. В случае добавления белого шума с $\alpha = 0$ [10,11] генерация средних течений в СТК сопровождается уменьшением значений критических чисел Рейнольдса, соответствующих пределу устойчивости. Вопрос о влиянии шума со спектрами с $\alpha \neq 0$ на положение предела устойчивости течений в СТК в работах [8,9] не рассматривался и пока не изучен, что и определяет цель настоящей работы. Исследуется хорошо изученная ранее при стационарных граничных условиях как экспериментально, так и численно [12,13] неустойчивость так называемого основного течения в тонком сферическом слое $\delta = (r_2 - r_1)/r_1 = 0.11$, r_1 и r_2 — радиусы внутренней и внешней границ соответственно. До потери устойчивости в меридиональной плоскости течения от полюса до экватора наблюдается только меридиональная циркуляция. После потери устойчивости формируется вторичное течение, в котором меридиональная циркуляция оттесняется от экватора симметричными относительно оси вращения и плоскости экватора вихрями Тейлора. Условия их формирования изучались не только в случае стационарного вращения, но и при периодической модуляции скорости вращения [14–16]. Изотермические течения вязкой несжимаемой жидкости описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{U} \times \operatorname{rot} \mathbf{U} - \operatorname{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{U}^2}{2}\right) - \nu \operatorname{rotrot} \mathbf{U}, \ \operatorname{div} \mathbf{U} = 0,$$

$\mathbf{U}$ — поле скорости, p — давление, ρ — плотность, ν — кинематическая вязкость жидкости в слое. На границах слоя ставятся условия прилипания и непротекания, далее они записаны в сферической системе координат с радиальным (r), полярным (θ) и азимутальным (φ) направлениями

$$u_{\varphi}(r = r_k) = \Omega_k(t) r_k \sin\theta,$$

$$u_r(r = r_k) = 0, \quad u_{\theta}(r = r_k) = 0, \quad k = 1, 2,$$

$k = 1$ — внутренняя сфера, $k = 2$ — внешняя, u_{φ}, u_r, u_{θ} — соответственно азимутальная, радиальная и полярная компоненты скорости, Ω_1 и Ω_2 — угловые скорости вращения границ. Численный метод решения основан на конечно-разностной схеме дискретизации уравнений Навье–Стокса по пространству и полунеявной схеме Рунге–Кутты третьего порядка точности для интегрирования по времени [17,18]. Расчеты проведены при размерных параметрах, близко соответствующих условиям проведения экспериментов [12]: $\nu = 5 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m^2/s}$, $r_2 = 0.15\,\mathrm{m}$, $r_1 = 0.1351\,\mathrm{m}$. Общее количество узлов $5.4 \cdot 10^3$ при двумерных (2D) расчетах с условиями симметрии относительно оси вращения и плоскости экватора и $8.64 \cdot 10^4$ при трехмерных (3D) расчетах и отсутствии указанных выше условий симметрии. В 2D-расчетах дискретизация по пространству проводилась с уменьшением размера ячеек вблизи границ по

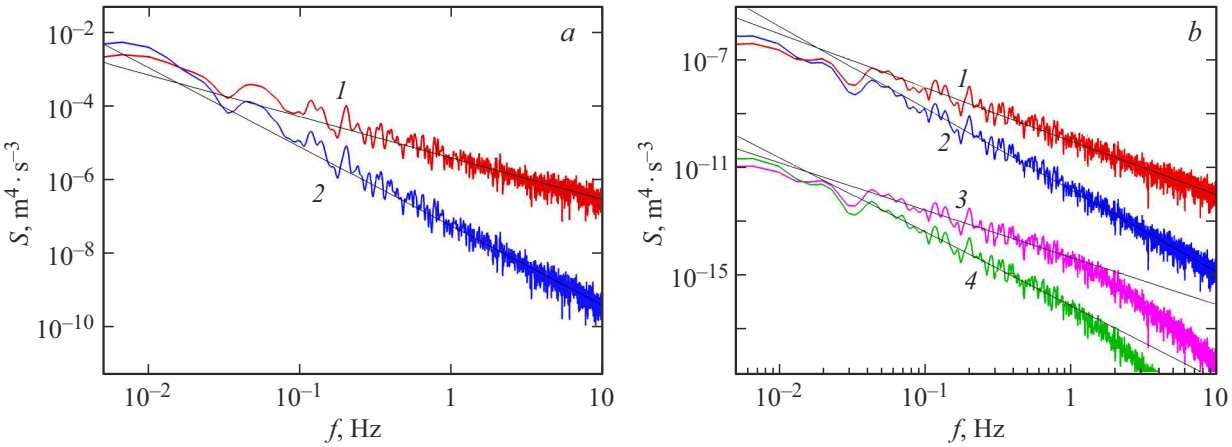

Рис. 1. *a* — спектры флуктуаций скорости вращения. *1* — с наклоном $\alpha = 1$, *2* — с наклоном $\alpha = 2$. Черные прямые линии — аппроксимация спектров. *b* — спектры флуктуаций компонент кинетической энергии: E_φ $(1,2)$, E_ψ $(3,4)$; $\alpha = 1$ $(1,3)$ и 2 $(2,4)$. $N = 0.06$, $\mathrm{Re}_1 = 1000$.

r, в 3D-расчетах — с уменьшением размера ячеек не только по r вблизи границ, но и по θ вблизи экватора. Отношение максимального размера ячейки к минимальному в первом случае составляло 4, во втором — 2. На таких сетках в пограничном слое в зависимости от числа Рейнольдса расположено от 6 до 9 узлов, что достаточно для разрешимости пограничного слоя. Сходимость результатов 2D-расчетов по мере увеличения количества узлов расчетной сетки приведена в таблице.

Здесь

$$K_\varphi = E_\varphi/(\Omega_1 r_1)^2, \quad K_\psi = E_\psi/(\Omega_1 r_1)^2,$$

$$E_\varphi = \int u_\varphi^2(r,\theta,t), \quad E_\psi = \int \left(u_r^2(r,\theta,t) + u_\theta^2(r,\theta,t)\right),$$

E_φ и E_ψ — соответственно азимутальная и меридиональная компоненты кинетической энергии течения, а K_φ и K_ψ — их нормированные значения. Исследовались нестационарные течения, вызванные вращением внутренней границы $\Omega(t_j) = \Omega_0 + Nrn(j)$, внешняя сфера неподвижна. Значение средней угловой скорости Ω_0 соответствовало числам Рейнольдса $\mathrm{Re}_1 = \Omega_0 r_1^2/\nu$ от 1000 до 1500, N — амплитуда шума, $N = \frac{1}{\Omega_0}\sqrt{\frac{1}{K-1}\sum\limits_{j=1}^{K}\left(\Omega(t_j)-\Omega_0\right)^2}$, $rn(j)$ — псевдослучайное число из последовательности длиной K со стандартным нормальным распределением и нулевым средним значением, j — счетчик шагов по времени. Шаг по времени выбирался постоянным $\Delta t = 0.01$ s, что обеспечивало от 153 до 229 шагов по времени за один оборот сферы, $K = 30\,000$. В алгоритме [17,18] имеется возможность контроля величины шага в ходе расчетов, но нами после предварительных расчетов выбиралась такая величина Δt, при которой контроль шага не менял его значение. Постоянное значение Δt позволяет сохранить в расчетах заданные значения наклона спектра и/или амплитуды шума. Продолжительность каждого варианта расчета с шумом составляет $600\,\mathrm{s} = 2K\Delta t$. За первые 300 s расчета система выходит на статистически стационарное состояние, осредненные величины вычисляются по результатам расчетов за последующие 300 s. Начальными данными при расчетах с шумом служили результаты расчета без шума в течение не менее 500 s. Использовалось два вида шума: с наклонами спектра $\alpha = 1$ и 2, в расчетах с одним значением α использовалась одна и та же последовательность случайных чисел. Так же как и в [9], последовательность чисел rn рассчитывалась для выбранного вида спектра заранее. Способы получения таких последовательностей представлены, например, в [5].

Зависимость нормированных величин азимутальной (K_φ) и меридиональной (K_ψ) компонент кинетической энергии течения от количества узлов расчетной сетки G в 2D-расчетах $(\mathrm{Re}_1 = 1000, N = 0.06, \alpha = 2)$

$G\cdot 10^{-3}$	K_φ	K_ψ
0.864	0.325188	0.000935
3.456	0.325133	0.000925
4.374	0.325118	0.000922
5.400	0.325108	0.000920
6.144	0.325103	0.000919

В присутствии шума течение становится нестационарным во времени, но остается симметричным относительно экватора и оси вращения [9]. Рассмотрим сначала свойства нестационарных устойчивых течений, в которых вихри Тейлора отсутствуют. На рис. 1 представлены полученные при 2D-расчетах спектры величин $\Omega(t)$, $E_\varphi(t)$, $E_\psi(t)$ при различных α. Так же как и в случае сонаправленного вращения сферических границ в широких слоях [9], наклон спектров $\Omega(t)$ α меньше наклона спектров $E_\varphi(t)$ α_φ, и для рассматриваемых значений α выполняется соотношение $\alpha_\varphi - \alpha \sim 1$

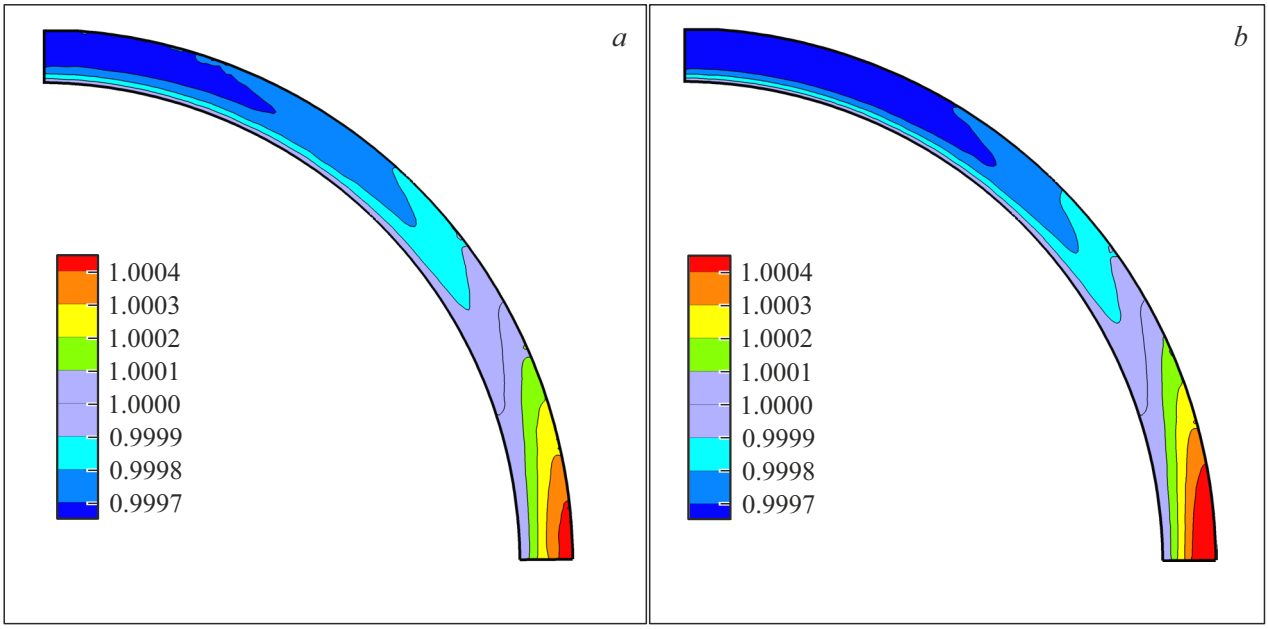

Рис. 2. Распределение величины V в меридиональной плоскости течения при $N = 0.04$, $\mathrm{Re}_1 = 1000$. $\alpha = 1$ (a) и 2 (b). Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

(рис. 1, a). В отличие от [9] наклон спектров $E_\psi(t)$ α_ψ при частотах менее 1 Hz зависит от α: $\alpha_\psi - \alpha \sim 0.77$ (рис. 1, b). Добавление шума приводит к генерации средних течений [8–10], которую будем рассматривать на примере изменения относительной азимутальной скорости течения $V = u_{\varphi N}/u_\varphi$, где $u_{\varphi N}$ — азимутальная скорость течения в присутствии шума. Распределение V в меридиональной плоскости устойчивого течения показано на рис. 2. Видно, что при $\alpha = 1$ и 2 распределения V качественно подобны: в почти вертикальном слое, параллельном оси вращения и соприкасающемся с внутренней сферой, изменения скорости минимальны. Скорость V уменьшается в направлении оси вращения и внешней сферы и увеличивается в направлении к плоскости экватора и внешней сферы. Таким образом, при смещении по меридиональному углу в направлении от экватора к оси вращения прирост скорости под действием шума непрерывно снижается. Вместе с тем есть и отличия: при $\alpha = 2$ (рис. 2, b) площадь областей течения, соответствующих максимальному изменению скорости, больше, чем при $\alpha = 1$ (рис. 2, a). С учетом того, что вблизи плоскости экватора значения азимутальной скорости на порядок выше, чем в приполярной области, обнаруженная разница указывает на более интенсивную генерацию средних течений под влиянием шума с бóльшим наклоном спектра ($\alpha = 2$). Это полностью соответствует полученным ранее результатам для течений в широких слоях, вызванных вращением границ в одном и том же направлении [9], в соответствии с которыми увеличение значений α приводит к более интенсивной генерации средних течений под действием шума.

В экспериментах [12] при стационарных граничных условиях потеря устойчивости течением в тонком слое ($\delta = 0.1096$) с формированием пары вихрей Тейлора вблизи экватора происходила при значении числа $\mathrm{Re}_{1c} = 1225$. Гистерезис не был обнаружен, точность определения числа Рейнольдса составляла ± 12. В расчетах [12] с условиями симметрии относительно оси вращения и экватора также получено $\mathrm{Re}_{1c} = 1225$, но только при условии добавления конечных возмущений. Как показано далее, добавление возмущений приводит к снижению расчетных значений Re_{1c}. Согласно расчетам [13], в осесимметричном приближении в слое $\delta = 0.11$ течение остается устойчивым до $\mathrm{Re}_1 = 1500$. Там же в трехмерных расчетах формирование вихрей Тейлора происходило при $\mathrm{Re}_{1c} = 1262.2$, а обратный переход — при 1261.1, величина гистерезиса составляла $d\mathrm{Re}_{1c} = 1.1$. При увеличении количества тестовых функций Лежандра в меридиональном направлении и количества узлов в радиальном направлении в расчетах [13] значения Re_{1c} и $d\mathrm{Re}_{1c}$ уменьшались.

В наших расчетах при $\delta = 0.11$ неустойчивость течения определялась, так же как и в [15], по появлению вихрей Тейлора при визуализации азимутальной компоненты завихренности в меридиональной плоскости течения (рис. 3):

$$\omega_\varphi = \frac{1}{rr'}\frac{\partial r u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r\theta'}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}.$$

При стационарном вращении без внесения дополнительных возмущений в 3D-расчетах получено значение $\mathrm{Re}_{1c} = 1263.5$, что хорошо согласуется с результатами [13]. В этом случае переход от основного течения к

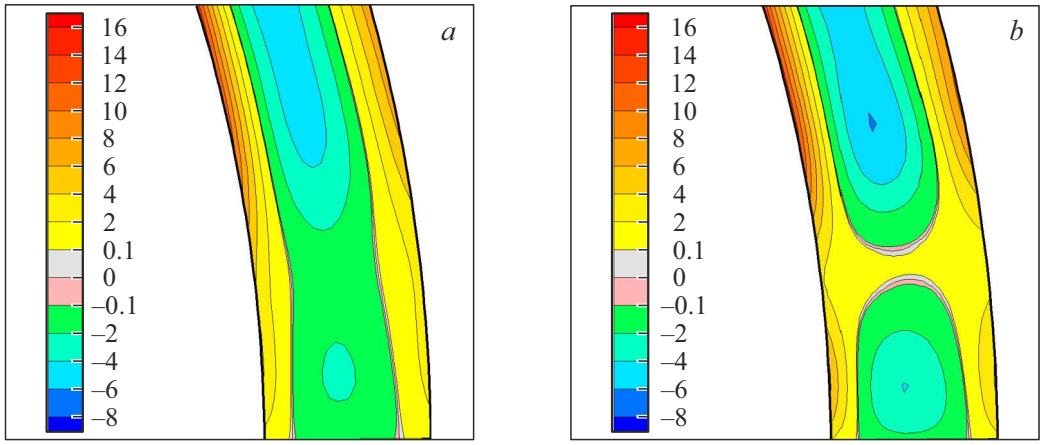

Рис. 3. Распределение азимутальной компоненты завихренности в меридиональной плоскости течений при $\alpha = 1$ и $N = 0.06$. *a* — основное течение (без вихрей Тейлора), $\mathrm{Re}_1 = 1220$; *b* — вторичное течение после потери устойчивости (с вихрем Тейлора у плоскости экватора), $\mathrm{Re}_1 = 1258$. Цветной вариант рисунка представлен в электронной версии статьи.

вихрям Тейлора происходил без нарушения симметрии течения относительно оси вращения и экватора. Гистерезис, так же как и в [12], не обнаружен ($d\mathrm{Re}_{1c} < 0.25$). Результаты 2D- ($\mathrm{Re}_{1c} = 1263.75$) и 3D-расчетов практически совпадают, во всех рассматриваемых случаях гистерезис не обнаружен как при $N = 0$, так и при $N \neq 0$. Таким образом, в наших вычислениях при стационарном вращении получены результаты, которые по ряду параметров соответствуют ранее полученным экспериментальным и расчетным данным. Это подтверждает возможность использования в настоящей работе условий симметрии течения относительно оси вращения и экватора. Зависимость положения предела устойчивости от вида и амплитуды добавленного шума далее исследовалась в 2D-расчетах. Визуализация течения выполнялась по осредненному за 300 s полю скорости. Зависимость Re_{1c} от амплитуды и вида шума показана на рис. 4. При числах Рейнольдса выше предела устойчивости при стационарном вращении сферы (горизонтальная линия на рис. 4) течение становится неустойчивым относительно предельно малых по амплитуде возмущений. При числах Рейнольдса выше наклонных кривых (рис. 4) течение становится неустойчивым по отношению к возмущениям скорости вращения конечной амплитуды. Но во всех рассматриваемых случаях переход к неустойчивости происходит „мягко“, без гистерезиса. Так же как и в случае добавления „белого“ шума ($\alpha = 0$) [10,11], увеличение N приводит к снижению Re_{1c}. По сравнению с результатами [10,11], в которых снижение Re_{1c} не превышало нескольких единиц, показанные на рис. 4 изменения Re_{1c} значительно больше. При одних и тех же амплитудах шума N значения Re_{1c} значительно ниже при $\alpha = 2$, чем при $\alpha = 1$. Таким образом, более интенсивная генерация средних течений до потери устойчивости при большем наклоне спектра $\Omega(t)$ приводит к снижению критических значений чисел Рейнольдса, соответствующих потере устойчивости.

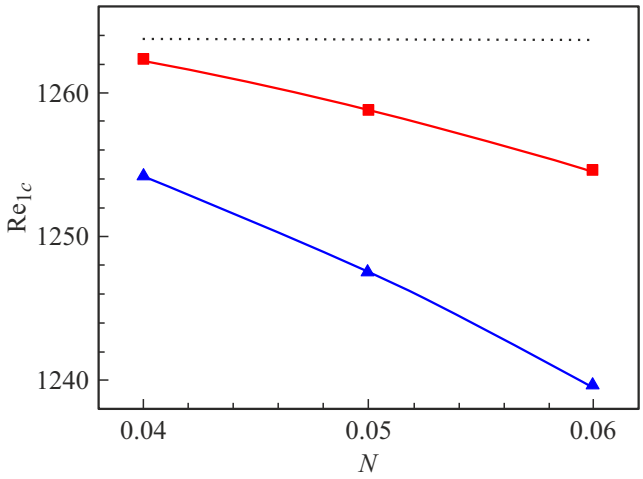

Рис. 4. Зависимость критических значений предела устойчивости Re_{1c} от амплитуды шума N при наклоне спектра $\alpha = 1$ (квадраты) и 2 (треугольники). Горизонтальная линия соответствует стационарному вращению границ.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 25-27-00044).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-induced transitions* (Springer, Berlin, 1984).

[2] T. Morita, T. Omori, Y. Nakayama, S. Toyabe, T. Ishikava, Phys. Rev. E, **101**, 063101 (2020). DOI: 10.1103/PhysRevE.101.063101

[3] Ю.Г. Марков, И.Н. Синицын, ДАН, **427** (3), 326 (2009). [Yu.G. Markov, I.N. Sinitsyn, Dokl. Phys., **54** (7), 350 (2009). DOI: 10.1134/S1028335809070118].
[4] G. Smadja, Y. Copin, W. Hillerbrandt, C. Saunders, C. Tao, Astron. Astrophys., **682**, A121 (2024). DOI: 10.1051/0004-6361/202245497
[5] M. Schroeder, *Fractals, chaos, power laws: minutes from an infinite paradise* (Dover Publ., N.Y., 1991).
[6] Y. Xu, R. Gu, H. Zhang, W. Xu, J. Duan, Phys. Rev. E, **83**, 056215 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevE.83.056215
[7] L.B. Ryashko, A.N. Pisarchik, Phil. Trans. Roy. Soc. A, **380**, 20200313 (2022). DOI: 10.1098/rsta.2020.0313
[8] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖТФ, **49** (8), 21 (2023). DOI: 10.21883/PJTF.2023.08.55132.19506 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova, Tech. Phys. Lett., **49** (4), 62 (2023). DOI: 10.21883/TPL.2023.04.55881.19506].
[9] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, ЖТФ, **94** (2), 189 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.02.57072.246-23 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova, Tech. Phys., **69** (2), 179 (2024).].
[10] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, ЖТФ, **91** (6), 935 (2021). DOI: 10.21883/JTF.2021.06.50862.345-20 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova, Tech. Phys., **66** (6), 903 (2021). DOI: 10.1134/S1063784221060232].
[11] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, ЖТФ, **92** (6), 789 (2022). DOI: 10.21883/JTF.2022.06.52506.22-22 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova, Tech. Phys., **67** (5), 376 (2022). DOI: 10.1134/S1063784222060093].
[12] Ю.Н. Беляев, И.М. Яворская, в кн: *Итоги науки и техники*. Сер. Механика жидкости и газа (ВИНИТИ, М., 1980), т. 15, с. 3–80.
[13] O. Zikanov, J. Fluid Mech., **310**, 293 (1996). DOI: 10.1017/S0022112096001814
[14] A.J. Youd, C.F. Barenghi, Phys. Rev. E, **72**, 056321 (2005). DOI: 10.1103/PhysRevE.72.056321
[15] Д.Ю. Жиленко, О.Э. Кривоносова, Письма в ЖТФ, **44** (11), 3 (2018). DOI: 10.21883/PJTF.2018.11.46191.17049 [D.Yu. Zhilenko, O.E. Krivonosova, Tech. Phys. Lett., **44** (6), 457 (2018). DOI: 10.1134/S1063785018060147].
[16] M.H. Choujaa, M. Riahi, S. Aniss, Phys. Fluids, **36**, 014101 (2024). DOI: 10.1063/5.0178263
[17] N. Nikitin, J. Comp. Phys., **217**, 759 (2006). DOI: 10.1016/j.jcp.2006.01.036
[18] К.Э. Абдульманов, Н.В. Никитин, Изв. РАН, Механика жидкости и газа, № 5, 25 (2022). DOI: 10.31857/S0568528122050097 [K.E. Abdul'manov, N.V. Nikitin, Fluid Dyn., **57** (5), 571 (2022). DOI: 10.1134/S0015462822050093].