12

Телескопический режим катодной линзы

© А.А. Трубицын, Е.Ю. Грачев, Э.Г. Кочергин

Рязанский государственный радиотехнический университет им. В.Ф. Уткина, Рязань, Россия
E-mail: assur@bk.ru

Поступило в Редакцию 14 февраля 2025 г.
В окончательной редакции 25 марта 2025 г.
Принято к публикации 3 апреля 2025 г.

Развит подход численно-аналитического моделирования катодной линзы с практически произвольной конфигурацией электродов в параксиальном приближении, определены условия реализации телескопического режима. Разработана и исследована электронно-оптическая схема телескопической катодной линзы с межэлектродными зазорами конечной ширины.

Ключевые слова: электронная оптика, параксиальная оптика, эмиссионная система, катодная линза.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.13.60701.20284

В катодной линзе катод оказывается погруженным во внешнее поле, созданное потенциалами фокусирующих электродов, чаще всего это электрод Венельта [1], и анода. Рассматриваемая в статье катодная линза предназначена для использования в эмиссионных системах, первеанс которых не превышает величину $10^{-2}\,\mu\mathrm{A/V}^{3/2}$ [2].

Параметры подавляющего большинства электронно-оптических систем могут быть спрогнозированы с достаточной для практики точностью в рамках аксиально-симметричных моделей. Основное уравнение аксиально-симметричной параксиальной электронной оптики, результатом решения которого является траектория частицы $r = r(z)$, представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка и записывается в цилиндрической системе координат $r0z$ следующим образом [1]:

$$r'' + \frac{\Phi'}{2\Phi}r' + \frac{\Phi''}{4\Phi}r = 0, \tag{1}$$

где $\Phi = \Phi(z)$ — распределение потенциала на оси симметрии $0z$.

В отличие от обычных типов электронных линз (иммерсионная, одиночная, линза-диафрагма и др.) в случае катодной линзы при решении уравнения (1) возникают сложности, связанные с математической особенностью вблизи вершины катода с координатой $z = z_c$, так как $\Phi_c = \Phi(z_c) = 0$, причем $\Phi'_c \neq 0$. Здесь и далее для значений всех функций на поверхности катода будем использовать нижний индекс c.

Теория решения дифференциальных уравнений с такого типа особенностью в полной мере разработана (см., например, [3]): одно из частных решений $p = p(z)$ уравнения (1) является аналитической функцией, а другое решение $g = g(z)$ выражается через аналитическую функцию $q = q(z)$

$$g = \sqrt{\Phi}q, \tag{2}$$

причем из (1) и (2) следует, что функция $q = q(z)$ удовлетворяет уравнению

$$q'' + \frac{3}{2}\frac{\Phi'}{\Phi}q' + \frac{3}{4}\frac{\Phi''}{\Phi}q = 0, \tag{3}$$

а на функции $p(z)$ и $q(z)$ автоматически накладываются граничные условия

$$p_c = q_c = 1, \qquad p'_c = q'_c = -\frac{\Phi''_c}{2\Phi'_c}. \tag{4}$$

Уравнение траектории есть общее решение дифференциального уравнения второго порядка, поэтому может быть записано как сумма двух линейно независимых частных решений

$$r(z) = a\,p(z) + bg(z),$$

где a и b — постоянные, определяемые из начальных условий на поверхности $z = z_c$ катода. В работе [4] Якушевым получены выражения a и b для катодной линзы и записано уравнение траектории

$$r(z) = r_c p(z) + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\Phi'_c}\sin\vartheta_c g(z), \tag{5}$$

где ε — начальная энергия вылета электрона из катода, рассматриваемая как математическая величина второго порядка малости, r_c — координата старта электрона с поверхности катода, ϑ_c — начальный угол движения.

Увлеченность современных исследователей численными методами и переоценка важности достигаемых там точностей стала препятствием к освоению и широкому применению математического аппарата, изложенного в работе [4], и системному анализу свойств катодных линз. Как результат, на настоящий момент катодные линзы мало исследованы не только в рамках теории аберраций, но даже в параксиальном приближении. Единственным примером, заставляющим по-новому взглянуть на катодную линзу, можно считать работу [5], где на основе

анализа уравнения траектории (5) обнаружены уникальные режимы катодных линз. В то же время результаты работы [5] требуют своего развития и обобщения, поскольку получены в предположении бесконечно малых промежутков между электродами, а осевое распределение потенциала $\Phi(z)$ находилось методом разделения переменных.

Метод разделения переменных позволяет вычислить функцию распределения потенциала лишь для идеализированных электронно-оптических систем с простой конфигурацией границы. Мы развиваем альтернативный, более общий подход, где для поиска осевого распределения потенциала $\Phi(z)$ применяем численный метод граничных элементов с развитой авторской методикой точной оценки сингулярных и квазисингулярных подынтегральных функций [6]. В таком подходе появляется возможность моделировать системы с электродами практически произвольной толщины и формы. Функция распределения осевого потенциала $\Phi(z)$, вычисленная методом граничных элементов в дискретных узлах, интерполируется сплайнами. Для нахождения значений производных $\Phi'(z)$, $\Phi''(z)$, $p'(z)$ и $g'(z)$ используются известные формулы численного дифференцирования.

Решаемая в настоящей работе задача может быть кратко сформулирована следующим образом: исследовать катодные линзы реальных (неидеализированных) конструкций в телескопическом режиме.

Перед тем как приступить к изучению свойств катодной линзы в телескопическом режиме, продифференцируем уравнение (5):

$$r'(z) = r_c p'(z) + \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\Phi'_c} \sin\vartheta_c g'(z). \qquad (6)$$

Именно анализ уравнений (5) и (6) позволяет обнаружить ряд уникальных режимов катодной линзы [5]. В частности, телескопический режим, в котором параллельный поток ($\sin\vartheta_c = 0$) электронов, покидающих поверхность катода, остается параллельным $r'(z) = 0$ в пространстве изображений $z \geqslant z_{im}$ в области однородного поля, будет определяться системой выражений

$$\begin{cases} \sin\vartheta_c = 0, \\ p'(z) = 0, \quad z \geqslant z_{im}, \end{cases} \qquad (7)$$

где z_{im} — граница пространства изображений.

Реализация телескопического режима в параксиальной катодной линзе в конечном счете определяется конкретным видом распределения потенциала $\Phi(z)$ в (1) и (4) и не зависит от начальных значений энергии ε и угла ϑ_c электрона. Для трехэлектродной катодной линзы типа изображенной на рис. 1, *a*, состоящей из дискообразного катода C и двух цилиндрических (промежуточного и ускоряющего) электродов одинакового диаметра d, такой конкретный вид $\Phi(z)$ определяется длиной l и потенциалом V промежуточного электрода при фиксированном потенциале V_{acc} ускоряющего электрода, длина которого значительно превышает диаметр d. Для такой линзы с $l/d = 0.7$ и $V/V_{acc} = 0.141$ графики частных решений $p(z)$ и $g(z)$ демонстрируются на рис. 1, *b*. Обращает на себя внимание участок зависимости $p(z) = \text{const}$ при $z \geqslant z_{im}$ как характерная особенность телескопического режима, где $z_{im} \approx d$.

По результатам расчетов изучаемой катодной линзы в парадигме предлагаемого подхода, базирующегося на решении уравнений (1) и (3), сделан вывод о наличии связи между длиной l и потенциалом V промежуточного электрода (рис. 1, *c*), обеспечивающей телескопический режим (7).

Показанные на рис. 1 зависимости получены в параксиальном приближении для малой величины $\delta = 0.002d$ промежутков между электродами, т. е. для случая $\delta \ll d$. Сравнение данных на рис. 1, *c* и результатов независимых исследований [5] такой же линзы, но в предположении бесконечно малых межэлектродных зазоров показывает, что относительная разница зависимостей $V/V_{acc} = f(l/d)$ в обоих случаях не превышает 0.2 %, что служит косвенным подтверждением корректности соответствующих выводов, касающихся телескопического режима.

Однако остается открытым вопрос об условиях и границах применимости параксиального приближения при исследованиях катодной линзы.

Еще раз отметим, что из уравнения (5) следует отсутствие влияния энергии ε на ход траекторий $r(z)$ в телескопическом режиме (7). В то же время численный „эталонный“ анализ изучаемой линзы средствами программы Focus Pro [7], когда электрическое поле в рабочей области линзы (а не только на оси $0z$) определяется численно, а траектории являются результатом интегрирования по времени стандартной системы ньютоновских уравнений движения, вызывает необходимость корректировки сделанного утверждения. На самом деле зависимость от энергии может быть ощутимой, но по мере снижения относительной энергии ε/V_{acc} ее влияние уменьшается и ниже уровня 10^{-3} может считаться практически незначительным, что демонстрируется зависимостью $\beta = \beta(\varepsilon/V_{acc})$ на рис. 2, *a*, где β — угол наклона прямолинейного участка крайней траектории электрона к оси $0z$ при пересечении плоскости $z = z_{out} = l + 2d$. Здесь имеется в виду траектория с начальной координатой $r_c = d_{in}/2$ в численном эксперименте, где $d_{in} = 0.2d$ — начальный диаметр электронного потока при эмиссии с катода. Еще раз напомним, что в параксиальном приближении во всем диапазоне энергий угол $\beta = \text{arctg}[r'(z_{out})] = 0$. Отмеченный выше уровень относительной энергии $\varepsilon/V_{acc} = 10^{-3}$, во-первых, конкретизирует порядок малости величины ε, а во-вторых, является характерным для большинства известных эмиссионных систем, например электронных микроскопов и микрофокусных рентгеновских трубок, и важно то, что параксиальное приближение для этих систем оказывается адекватным.

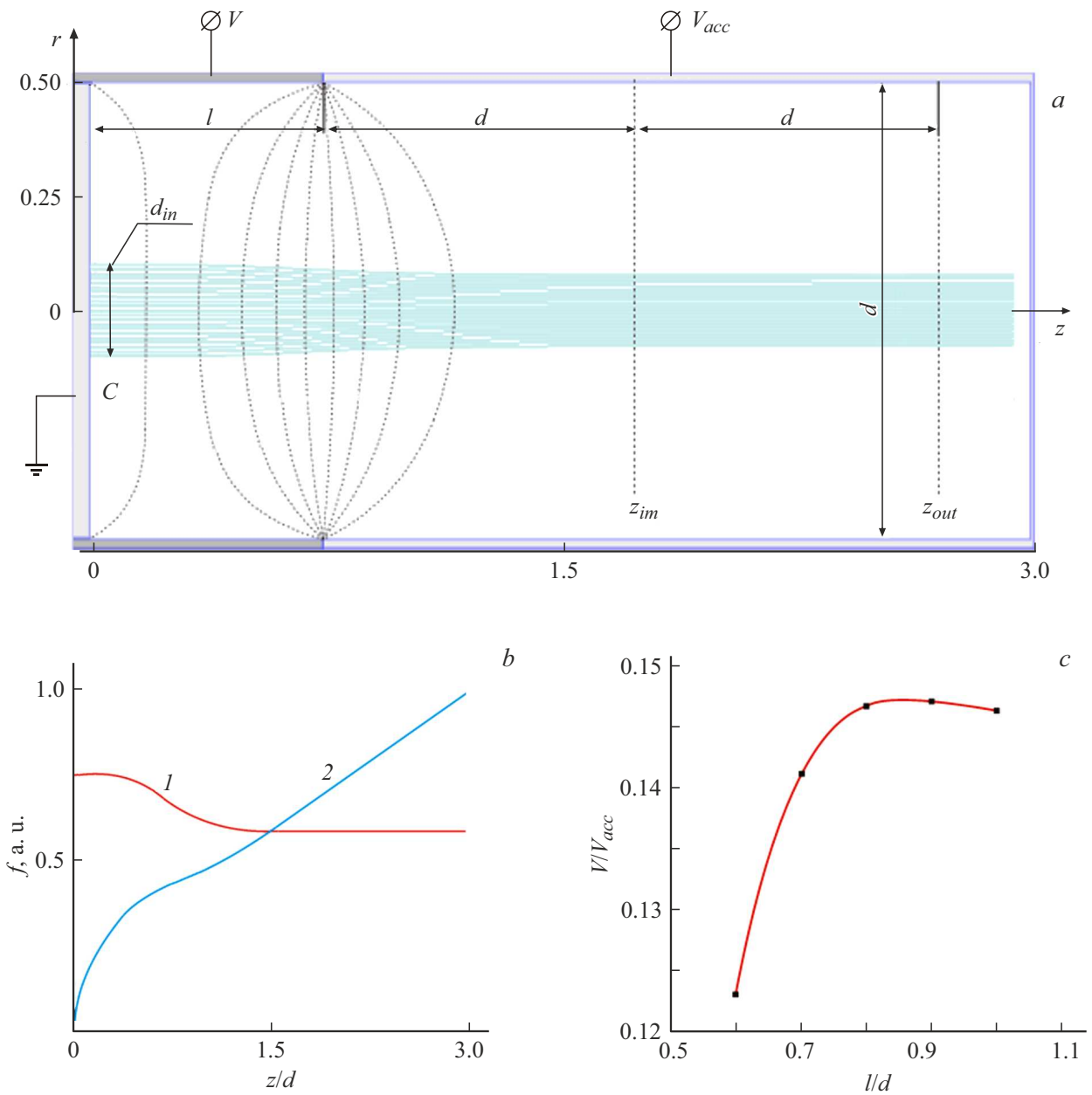

Рис. 1. Моделирование трехэлектродной катодной линзы в параксиальном приближении. *a* — траектории (5) электронов с $\vartheta_c = 0$ и $r_c = 0{-}0.2d$ в телескопическом режиме; *b* — частные решения: *1* — *p*, *2* — *g*; *c* — связь между потенциалом промежуточного электрода V и его длиной l, обеспечивающая телескопический режим (7).

В телескопическом режиме начальные углы $\vartheta_c = 0$, однако в реальности при эмиссии с катода электроны распределены по закону косинуса во всем диапазоне ϑ_c от -90 до $+90°$. Влияние начального углового разброса на выходные параметры электронного потока исследовалось численными методами (не в параксиальном приближении) в среде Focus Pro [7]. По результатам траекторного анализа (рис. 2, *b*) в диапазоне полярных углов ϑ_c от -70 до $+70°$, который выбран с целью исключения неинформативных „хвостов" вблизи границ -90 и $+90°$ полного диапазона, может быть сделан вывод о существенном влиянии начального углового разброса на ход траекторий электронов, однако степень влияния сокращается при уменьшении относительной энергии ε/V_{acc}. Действительно, из данных рис. 2, *b* следует, что угловой разброс (для произвольной начальной радиальной координаты $r_c \leqslant d_{in}$) относительно центральной горизонтальной траектории $\vartheta_c = 0°$ на выходе из системы в плоскости $z = z_{out} = l + 2d$ уменьшается с $\pm 2.5°$ при $\varepsilon/V_{acc} = 10^{-3}$ до $\pm 0.07°$ при $\varepsilon/V_{acc} = 10^{-6}$. Таким образом, при эмиссии электронов с поверхности катода в полном телесном угле 2π sr в телескопическом режиме катодной линзы при малых относительных энергиях ($\varepsilon/V_{acc} < 10^{-4}$) на выходе формируется элек-

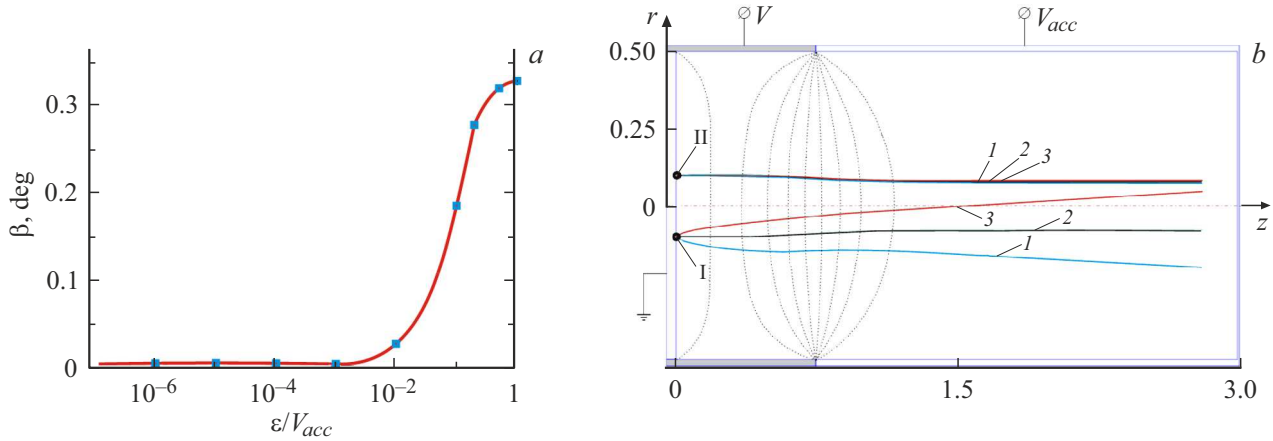

Рис. 2. Влияние начальной энергии и начальных углов на параллельность траекторий на выходе из катодной линзы в телескопическом режиме. *a* — угловой разброс при $\vartheta_c = 0$; *b* — вид траекторий $\varepsilon/V_{acc} = 10^{-3}$ (I) и 10^{-6} (II), $\vartheta_c = -70$ (*1*), 0 (*2*) и $+70^\circ$ (*3*).

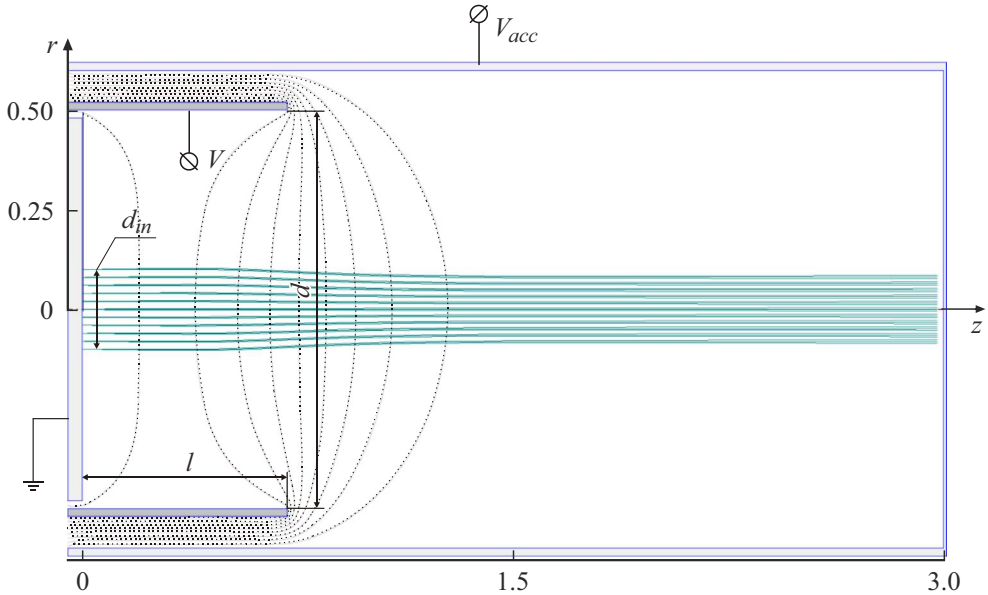

Рис. 3. Результаты численного анализа катодной линзы реальной конструкции в телескопическом режиме. $\varepsilon/V_{acc} = 10^{-6}$, $d_{in}/d = 0.2$, $r_c = 0{-}d_{in}$, ϑ_c составляет от -70 до $+70^\circ$.

тронный поток, параллельный оптической оси линзы с угловым разбросом в десятые доли градуса.

Конструкция исследованной выше линзы является малопрактичной, поскольку зазоры между электродами малы и не способны выдержать высокие напряжения порядка нескольких десятков киловольт и больше, прикладываемые между электродами в типовых эмиссионных системах. Развиваемый в работе подход к моделированию катодных линз пригоден для анализа линз с любой электродной конфигурацией, в том числе с широкими промежутками между электродами. Примером такой электродной системы, обеспечивающей высокий уровень электрической прочности, может служить линза, схема которой представлена на рис. 3.

Поиск условий телескопического режима заключается в повторении алгоритма: задаем длину l промежуточного электрода, находим такой потенциал V этого электрода, который обеспечивает выполнение второго условия системы (7), причем осевое распределение потенциала, используемое для нахождения частного решения $p(z)$ из (1), рассчитывается методом граничных элементов. В частности, расчеты показывают, что для $l/d = 0.7$ (рис. 3) телескопический режим обеспечивается подачей потенциала $V = 0.137V_{acc}$, который лишь незначительно отличается от соответствующего потенциала $V = 0.141V_{acc}$ идеализированной конструкции (рис. 1, *a*).

С целью более глубокого изучения свойств линзы в телескопическом режиме необходимо провести ее траекторный анализ.

Рис. 3 демонстрирует результаты численного (не в параксиальном приближении) траекторного анализа линзы в диапазоне углов ϑ_c от -70 до $+70^\circ$ с начальной относительной энергией электронов $\varepsilon = 10^{-6} V_{acc}$ и начальным диаметром потока, равным $d_{in} = 0.2d$. По результатам расчетов может быть сделан вывод, что на выходе из системы в плоскости $z = l + 2d$ электронный поток сохраняет высокий уровень параллельности, при этом:

— угол наклона центральных траекторий, соответствующих $\vartheta_c = 0$, растет с увеличением r_c, но не превышает 0.02° при $r_c = d_{in}/2$;

— суммарный разброс углов двух крайних траекторий с $\vartheta_c = -70$ и $+70^\circ$ относительно центральной траектории не превышает 0.17° вне зависимости от r_c.

Телескопический режим окажется полезным при построении эмиссионных систем с плоскими катодами, в которых требуется транспортировка электронных потоков на большие расстояния.

Следует заметить, что в оптике интенсивных электронных пучков также решались задачи для электронно-лучевых пушек триодного типа, формирующих электронные потоки разной пространственной конфигурации, в том числе параллельные потоки [2].

Благодарности

Авторы выражают благодарность С.Б. Бимурзаеву за помощь в работе.

Финансирование работы

Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда (грант № 25-29-00124).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] П. Хокс, *Электронная оптика и электронная микроскопия*, пер. с англ. (Мир, М., 1974), с. 49, 114. [P.W. Hawkes, *Electron optics and electron microscopy* (Taylor & Francis, Ltd., London, 1972).].

[2] А.Д. Сушков, *Вакуумная электроника. Физико-технические основы* (Лань, СПб., 2022), с. 214, 233.

[3] В.И. Смирнов, *Курс высшей математики* (Наука, М., 1974), т. 3, ч. 2, с. 98–474.

[4] E.M. Yakushev, in *Advances in imaging and electron physics*, ed. by P.W. Hawkes (Academic Press, London, 2013), vol. 178, p. 147–247. DOI: 10.1016/B978-0-12-407701-0.00003-0

[5] Е.М. Якушев, С.Б. Бимурзаев, М.А. Холодов, Вестн. Актюбинск. регион. гос. ун-та им. К. Жубанова, **44** (2), 32 (2016).

[6] А.А. Трубицын, Журн. вычислит. математики и мат. физики, **35** (4), 532 (1995). [A.A. Trubitsyn, Comp. Math. Math. Phys., **35** (4), 421 (1995).].

[7] A. Trubitsyn, E. Grachev, V. Gurov, I. Bochkov, V. Bochkov, Proc. SPIE, **10250**, 102500V (2017). DOI: 10.1117/12.2256570