

Модель собственного аномального эффекта Холла в поликристаллических ферромагнетиках

© В.К. Игнатьев, С.В. Перченко, Д.А. Станкевич

Волгоградский государственный университет,
400062 Волгоград, Россия
e-mail: vkignatjev@yandex.ru

Поступило в Редакцию 22 июля 2024 г.

В окончательной редакции 14 апреля 2025 г.

Принято к публикации 15 апреля 2025 г.

Предложен способ оценки коэффициента, не зависящего от рассеяния аномального эффекта Холла, для поликристаллических образцов чистых ферромагнитных металлов. Вычислены поперечные удельные сопротивления, характеризующие собственный аномальный эффект Холла, для железа, кобальта и никеля. Показано, что знак рассчитанного аномального холловского сопротивления всегда совпадает со знаком экспериментального. Для никеля и кобальта результаты в пределах погрешности измерений согласуются с экспериментальными данными, для железа экспериментальное значение превышает расчетное в 2.7 раза.

Ключевые слова: аномальный эффект Холла, спин-орбитальное взаимодействие, приближение сильной связи, приближение ближайших соседей, приближение идеального ферми-газа, метод Хартри–Фока, эффективный заряд.

DOI: 10.61011/JTF.2025.07.60664.237-24

Введение

Аномально большое значение поперечной электропроводности в ферромагнетиках было отмечено еще Э. Холлом в 1881 г. [1] при систематическом исследовании электронного транспорта в различных металлах, находящихся во внешнем магнитном поле. Аномальный эффект Холла (АЭХ) отличает зависимость поперечного удельного сопротивления как от магнитной индукции \mathbf{B} , так и от намагниченности \mathbf{M} :

$$\rho_{xy} = \rho_H = R_0 B_z + R_s \mu_0 M_z, \quad (1)$$

где μ_0 — магнитная постоянная. Здесь коэффициент R_0 , как и в классическом эффекте Холла, определяется в основном концентрацией носителей, тогда как R_s имеет сложную связь со многими параметрами материала, в частности, зависит от продольного удельного сопротивления $\rho_{xx} = \rho$. Микроскопическая теория, объясняющая АЭХ спин-орбитальным взаимодействием поляризованных электронов проводимости, была разработана в 1954 г. Р. Карплусом и Д. Латтинджером [2].

В настоящее время АЭХ описывают тремя конкурирующими механизмами [3–5], которые проявляются или ослабляются в зависимости от проводимости материала и наличия в нем сторонних примесей. Известно, что эти же механизмы отвечают за появление спинового эффекта Холла (СЭХ) в немагнитных материалах [6]. При наличии в металле примесей АЭХ может возникать из-за бокового смещения (side-jump), происходящего перпендикулярно направлению импульса электрона после рассеяния любого типа. Для этого режима характерна низкая продольная проводимость ($\sigma_{xx} < 10^6 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$),

а поперечная проводимость зависит почти квадратично от продольной.

В чистых металлах при $\sigma_{xx} > 10^6 (\Omega \cdot \text{cm})^{-1}$ основным механизмом возникновения АЭХ является несимметричное рассеяние на магнитных моментах (skew-scattering), обусловленное спин-орбитальным взаимодействием [7]. Этот режим достаточно трудно исследовать экспериментально, потому что магнитное поле H , необходимое для насыщения намагниченности M , также дает большой вклад в обычный эффект Холла, а R_0 порядка R_s [8], т.е. обычный эффект Холла при высокой проводимости порядка или выше, чем аномальный.

Режим, когда продольная проводимость лежит в диапазоне $10^6 < \sigma_{xx} < 10^8 (\Omega \cdot \text{m})^{-1}$, называют собственным (внутренним, intrinsic), или независимым от рассеяния. АЭХ в этом режиме определяется зонной структурой материала, а поперечная проводимость слабо зависит от продольной. В современной модели собственного АЭХ зонная структура материала анализируется в терминах интеграла электронной кривизны Берри по занятой части зоны Бриллюэна. В работе [9] показано, что в приближении сильной связи и в представлении Ванье этот интеграл можно свести к интегралу только по поверхности Ферми. Иллюстративный расчет аномальной холловской проводимости по этому методу дал результаты, качественно согласующиеся с экспериментальными [10–12]. Однако в работах [10,11] измерялась не аномальная холловская проводимость σ_{xy} , а коэффициент АЭХ R_s , $[\Omega \cdot \text{cm}/\text{G}]$. В работе [12] приведены только температурные зависимости аномальной холловской проводимости и нет исходных магнитополевых зависимостей.

Следует отметить, что в работах [10–12] не выделен вклад собственного АЭХ. В работе [9] методика такого выделения не приведена. В работе [11] исследования проводились на никеле технической чистоты в диапазоне температур $-200-360^\circ\text{C}$. В работе [10] исследовались монокристаллические вискерсы железа. В такой геометрии возникает дополнительный механизм АЭХ — рассеяние носителей заряда на поверхности образца [13], вклад которого в АЭХ так же не зависит от продольной проводимости, как и для собственного режима. Выделить собственный АЭХ по температурной зависимости поперечной проводимости в области гелиевых температур для тонких пленок и вискерсов нельзя. Поэтому, несмотря на существование развитого теоретического описания механизма собственного АЭХ, его экспериментальное обоснование затруднено. Посвященная этому работа [14] не получила дальнейшего подтверждения [5].

В работе [5] путем сопоставления магнитопольевых и температурных зависимостей аномальной компоненты холловского сопротивления с температурной зависимостью продольного сопротивления получено экспериментальное подтверждение существенной роли собственного механизма АЭХ в двумерной гетеросистеме. Повидимому, двумерный характер движения носителей заряда исключает влияние рассеяния на поверхности пленки. В 3D-структурах экспериментально подтверждать собственный АЭХ целесообразно на макроскопических поликристаллических образцах. Модель собственного АЭХ в таких структурах предполагается получить, дополнив используемые в [9] приближение сильной связи и представление Ванье учетом особенностей поверхности Ферми через константу нормального эффекта Холла [15,16].

1. Динамика электрона проводимости в однодоменном ферромагнетике

Спин-орбитальная добавка в энергию одиночного электрона, находящегося в заданном электрическом поле с потенциалом $\Phi(\mathbf{r})$, имеет вид [17]:

$$\hat{V} = -\frac{\hbar e}{2m^2c^2} \varepsilon_{\beta\gamma\delta} \hat{s}_\beta \frac{\partial \Phi}{\partial r_\gamma} \hat{p}_\delta. \quad (2)$$

Здесь m — масса электрона с зарядом $-e$, \hbar — приведенная постоянная Планка, c — скорость света в вакууме, $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — единичный антисимметричный тензор Леви–Чивитты. В формуле (2) и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам по всему диапазону их изменения. Динамика импульса электрона, создаваемая возмущением (2), описывается уравнением для средних [18]:

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{V}, \hat{p}_\alpha] \rangle = \frac{\hbar e \varepsilon_{\beta\gamma\delta}}{2m^2c^2} \langle \psi | \hat{s}_\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi \rangle. \quad (3)$$

Кристаллит чистого металла можно рассматривать как гомоядерную макромолекулу с металличе-

ской связью. В рамках одноэлектронного приближения Хартри–Фока каждый коллективизированный электрон находится в самосогласованном поле, созданным ионными остатками и другими коллективизированными электронами [18]. Самосогласованное поле обычно строится методом последовательных приближений. В начальном приближении волновая функция коллективизированного электрона рассматривается как молекулярная спин-орбиталь и представляется в виде линейной комбинации атомных спин-орбиталей.

Для любого спинового состояния электрона можно выбрать такое направление оси z , чтобы проекция его спина на эту ось имела определенное значение s_z , т.е. $\psi(\mathbf{r}, \sigma) = \psi(\mathbf{r})\delta(\sigma, s_z)$. При этом вектор среднего значения спина $\mathbf{s} = \langle \hat{\mathbf{s}} \rangle$ будет направлен вдоль оси z [8]. В приближении сильной связи такой комбинацией для координатной части волновой функции $\psi(\mathbf{r})$ может быть функция Ванье [19]:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{R}_n), \quad (4)$$

где $\Psi_C(\mathbf{r})$ — атомарная функция внешнего электрона, \mathbf{R}_n — вектор трансляции, N — количество узлов в кристаллите.

В качестве модельного потенциала начального приближения возьмем потенциал кристаллического поля ионных остатков с эффективным зарядом $+Ze$ и координатами \mathbf{r}_k :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{eZ}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{k=1}^N \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k|}. \quad (5)$$

Здесь ε_0 — электрическая постоянная.

Если в качестве начального приближения атомарную волновую функцию $\Psi(\mathbf{r})$ в соотношении (4) считать водородоподобной, то величину Z можно оценить, приравняв координату максимума радиальной компоненты этой функции к радиусу атома. Приближение эффективного заряда в модельном потенциале (5) совместно с приближением сильной связи (4) означает, что при построении самосогласованного поля для коллективизированного электрона учитывается только его взаимодействие с ядрами и локализованными электронами ионных остатков.

В рамках метода Хартри–Фока учет тождественности электронов, т.е. обменного взаимодействия электрона проводимости с локализованными электронами, производится представлением волновой функции в уравнении (3) в виде детерминанта Слеттера, составленного из спин-орбиталей электрона проводимости и всех локализованных электронов кристаллита. В этом приближении энергия обменного взаимодействия электрона проводимости со всеми локализованными электронами распадается на сумму парных обменных взаимодействий электрона проводимости с каждым из локализованных электронов по отдельности [20]. Аналогичный вывод

можно сделать и о правой части уравнения (3). В следующем приближении следует учесть взаимодействие, включая обменное, коллективизированного электрона с другими электронами проводимости.

Для парного взаимодействия первого и второго электронов среднее в формуле (3) находится в состоянии

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2) = & (\psi_1(\mathbf{r}_1, \sigma_1)\psi_2(\mathbf{r}_2, \sigma_2) \\ & - \psi_1(\mathbf{r}_2, \sigma_2)\psi_2(\mathbf{r}_1, \sigma_1))/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Примем, что (3) описывает динамику импульса первого электрона проводимости, а второй электрон — локализованный. Тогда, учитывая эрмитовость оператора импульса, получим

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{s}_\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi \rangle = & \langle \psi_1 | \hat{s}_\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_1 \rangle \\ & - \text{Re} \left\{ \langle \psi_1 | \hat{s}_\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Квантовое среднее здесь предполагает интегрирование по координатам и суммирование по спиновым переменным. Полагая

$$\psi_1(\mathbf{r}, \sigma) = \psi_1(\mathbf{r})\delta(\sigma, s_{z1}),$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\mathbf{r}, \sigma) = & c_+ \psi_{2+}(\mathbf{r})\delta(\sigma, s_{z1}) + c_- \psi_{2-}(\mathbf{r})\delta(\sigma, -s_{z1}), \\ |c_+|^2 + |c_-|^2 = & 1, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{s}_\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi \rangle = & s_{1\beta} \langle \psi_1 | \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_1 \rangle \\ & - |c_+|^2 s_{1\beta} \text{Re} \left\{ \langle \psi_1 | \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_{2+} \rangle \langle \psi_{2+} | \psi_1 \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|c_+|^2 = 1/2 + 2s_1 s_2$, и, пренебрегая зависимостью координатной части волновой функции локализованного электрона от его спинового состояния, преобразуем эту формулу:

$$\begin{aligned} \langle \psi | \hat{s}_\beta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi \rangle = & s_{1\beta} \left[\langle \psi_1 | \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_1 \rangle - \frac{1}{2} \right] \\ & \times \text{Re} \left\{ \langle \psi_1 | \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \right\} - 2s_{1\beta} s_{1\sigma} s_{2\sigma} \\ & \times \text{Re} \left\{ \langle \psi_1 | \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

В формуле (6) квантовое среднее вычисляется интегрированием по координатам. Формула (3) записана для динамики импульса одного электрона проводимости. Чтобы найти динамику среднего импульса для

ансамбля электронов проводимости, формулу (6) следует усреднить по спиновым состояниям этих электронов. Если электроны проводимости не поляризованы, то в макроскопически изотропной среде $\langle s_{1\beta} \rangle = 0$, $\langle s_{1\beta} s_{1\sigma} \rangle = \delta_{\beta\sigma}/4$. Тогда

$$\frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\hbar \epsilon \beta \gamma \delta}{4m^2 c^2} s_{2\beta} \text{Re} \left\{ \langle \psi_1 | \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r_\alpha \partial r_\gamma} \hat{p}_\delta | \psi_2 \rangle \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle \right\}. \quad (7)$$

Левая часть соотношения (7) равна силе, действующей на электрон. Ее можно представить как результат действия на электрон стороннего электрического поля \mathbf{E}_{AH} . Правая часть соотношения (7) обусловлена парным взаимодействием электрона проводимости с одним локализованным электроном. Чтобы найти полное поле \mathbf{E}_{AH} , формулу (7) следует просуммировать по всем локализованным электронам с учетом их спинов. В ферромагнетике спины локализованных электронов намагниченности из-за обменного взаимодействия в пределах домена ориентированы одинаково, для них можно положить, что все $s_{2\beta} = s_\beta$. Спины остальных локализованных электронов ориентированы произвольно, и их суммарный вклад в поле \mathbf{E}_{AH} равен нулю.

Пусть в каждом узле находится только один локализованный электрон с волновой функцией $\psi_2(\mathbf{r}) = \Psi_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$. Здесь \mathbf{r}_i — координата i -го узла, за начало отсчета принят узел, которому принадлежит коллективизированный электрон проводимости с волновой функцией вида (4). Тогда для потенциала эффективного поля вида (5), выполнив замену переменных $\mathbf{r} - \mathbf{r}_k \rightarrow \mathbf{r}$, получаем

$$\begin{aligned} E_{AH\alpha} = & \frac{\hbar \epsilon Z s_\beta}{16\pi \epsilon_0 m^2 c^2 N} \text{Re} \left\{ \exp(i\mathbf{k}(\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_m)) \langle \Psi_C(\mathbf{r} + \mathbf{r}_k - \mathbf{R}_n) | \right. \\ & \times \left(3 \frac{\epsilon \beta \gamma \delta r_\alpha r_\gamma}{r^5} + \frac{\epsilon \alpha \beta \delta}{r^3} \right) \hat{p}_\delta | \Psi_L(\mathbf{r} + \mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i) \rangle \\ & \left. \times \langle \Psi_L(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) | \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{R}_m) \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Атомарные функции экспоненциально малы при $r > R_a = na_B/Z$, n — главное квантовое число. При этом расстояние между атомами в кристалле существенно больше, чем R_a . Поэтому в соотношении (8) в первом приближении можно оставить только слагаемые с $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_k$. Различные атомарные волновые функции ортогональны, поэтому при $\mathbf{R}_m - \mathbf{r}_k = 0$ правая часть (8) равна нулю. Оператор

$$\left(3 \frac{\epsilon \beta \gamma \delta r_\alpha r_\gamma}{r^5} + \frac{\epsilon \alpha \beta \delta}{r^3} \right) \hat{p}_\delta$$

в правой части соотношения (8) является нечетным. Если волновые функции Ψ_L и Ψ_C имеют одинаковую четность ($s-d$ -взаимодействие), при $\mathbf{R}_m - \mathbf{r}_k = 0$ правая часть (8) равна нулю. Можно ограничиться приближением ближайших соседей и оставить в правой части только

слагаемые, для которых $\mathbf{R}_n - \mathbf{r}_k = \mathbf{a}_i$, а $\mathbf{R}_m - \mathbf{r}_k = \mathbf{a}_j$, где \mathbf{a}_i — вектор, проведенный от рассматриваемого атома с центром в точке $\mathbf{r} = 0$ к ближайшему соседу. Тогда в соотношении (8) в первом порядке малости по \mathbf{ka} получаем:

$$E_{AH\alpha} = \frac{\hbar Z e s \beta k_\mu}{8\pi \epsilon_0 m^2 c^2} (a_{i\mu} - a_{j\mu}) \text{Im} \left\{ \langle \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \right. \\ \left. \times \left(3 \frac{\epsilon_{\beta\gamma\delta} r_\alpha r_\gamma}{r^5} + \frac{\epsilon_{\alpha\beta\delta}}{r^3} \right) \hat{p}_\delta | \Psi_L \rangle \langle \Psi_L | \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) \rangle \right\}. \quad (9)$$

Рассматривая АЭХ только в металлах, воспользуемся для электронов проводимости приближением идеального ферми-газа. Применимость этой модели для электронов проводимости в металлах обоснована тем, что термодинамика ферми-системы определяется ее микроскопической структурой только вблизи поверхности Ферми и совершенно не зависит от того, что делается за пределами размытия порядка $k_B T$, где k_B — постоянная Больцмана, T — температура. В результате, чем плотнее ферми-газ в металле, тем он идеальнее [21]. Экспериментальные исследования температурной зависимости электронной теплоемкости в металлах показывают, что она хорошо соответствует модели идеального ферми-газа со скалярной эффективной массой m^* .

2. Не зависящий от рассеяния АЭХ в поликристаллическом ферромагнетике

Рассмотрим однородную и изотропную макроскопическую область поликристаллического ферромагнетика, в пределах которой плотность тока и намагниченность можно считать постоянными. Положим в рамках метода эффективной массы в (9) $\mathbf{k} = -\mathbf{j}m^*/(\hbar n_e e)$, где \mathbf{j} — плотность зарядового тока, n_e — концентрация электронов проводимости. Усредним в пределах этой области уравнение (8) по спиновым моментам локализованных электронов. Каждый кристаллит разбивается на домены, намагниченные до насыщения $M_S = B_S/\mu_0$, где B_S — индукция насыщения, и можно положить в пределах кристаллита $\langle \mathbf{s} \rangle = -\mathbf{M}/(\mu_B n_a)$, где μ_B — магнетон Бора, n_a — концентрация атомов. Тогда

$$E_{AH\alpha} = \frac{Zm^* M_\beta j_\mu (a_{i\mu} - a_{j\mu})}{8\pi \epsilon_0 m^2 c^2 \mu_B n_e n_a} \text{Im} \left\{ \langle \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \right. \\ \left. \times \left(3 \frac{\epsilon_{\beta\gamma\delta} r_\alpha r_\gamma}{r^5} + \frac{\epsilon_{\alpha\beta\delta}}{r^3} \right) \hat{p}_\delta | \Psi_L \rangle \langle \Psi_L | \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) \rangle \right\}. \quad (10)$$

Энергия электрона в атоме, находящемся в электрическом поле, зависит от проекции его орбитального момента на направление поля [8]. Поэтому ориентация атомных орбиталей определяется положением кристаллофизических осей кристаллита, и можно считать, что

соотношение (10) записано в системе координат, связанной с осями симметрии кристаллита. Введем лабораторную систему координат, связанную с приборами, которые задают ток проводимости и намагниченность и измеряют компоненты электрического поля. Поэтому векторы плотности тока, намагниченности и электрического поля следует считать заданными в лабораторной системе координат. Компоненты векторов и тензоров в лабораторной системе будем обозначать штрихованными индексами, а в системе координат, связанной с кристаллическими осями домена, нештрихованными.

Преобразуем в пределах кристаллита вектор плотности тока и вектор намагниченности из лабораторной системы в систему кристаллофизических осей $j_\mu = p_{\mu\mu'} j_{\mu'}$, $M_\beta = p_{\beta\beta'} M_{\beta'}$, а вектор холловского электрического поля из системы к кристаллофизических осей в лабораторную $E_{H\alpha'} = p_{\alpha'\alpha}^{-1} E_{H\alpha}$, где $p_{\alpha'\alpha}$ — унитарная матрица поворота. Подставив это преобразование в уравнение (10), усредним вектор \mathbf{E}_{AH} в макроскопической области по случайным ориентациям кристаллитов. Матрицу поворота удобно выразить через углы Эйлера:

$$p_{ij} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \cos(\gamma) - & -\cos(\alpha) \sin(\gamma) - & \sin(\alpha) \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) & \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) & \\ \sin(\alpha) \cos(\gamma) + & -\sin(\alpha) \sin(\gamma) + & -\cos(\alpha) \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \cos(\gamma) & \\ \sin(\beta) \sin(\gamma) & \sin(\beta) \cos(\gamma) & \cos(\beta) \end{bmatrix},$$

где $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ — угол прецессии, $0 \leq \beta \leq \pi$ — угол нутации, $0 \leq \gamma \leq 2\pi$ — угол собственного вращения. Тогда для макроскопически изотропного поликристаллического ферромагнетика усреднение по случайным ориентациям кристаллита сводится к усреднению по случайным равномерно распределенным углам Эйлера

$$E_{H\alpha'} = \frac{Zm^* \mu_0 M_{\beta'} j_{\mu'} p_{\alpha'\alpha}^{-1} p_{\beta\beta'} p_{\mu\mu'}}{8\pi m^2 \mu_B n_e n_a} (a_{i\mu} - a_{j\mu}) \\ \times \text{Im} \left\{ \langle \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \left(3 \frac{\epsilon_{\beta\gamma\delta} r_\alpha r_\gamma}{r^5} + \frac{\epsilon_{\alpha\beta\delta}}{r^3} \right) \right. \\ \left. \times \hat{p}_\delta | \Psi_{L0} \rangle \langle \Psi_{L0} | \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) \rangle \right\}. \quad (11)$$

Здесь

$$\bar{p} = \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin(\beta) p(\alpha, \beta, \gamma) d\alpha d\beta d\gamma. \quad (12)$$

При аналитическом усреднении уравнения (11) интегралы вида (12) вычислялись в координатной форме, а затем результат преобразовывался в инвариантную форму. В результате получаем

$$\mathbf{E}_{AH} = R_1 [\mathbf{j} \times \mu_0 \mathbf{M}],$$

$$R_1 = \frac{\hbar e Z}{48\pi m \mu_B n_a} \frac{m^*/m}{en_e} \operatorname{Re} \left\{ \langle \Psi_C(\mathbf{r}-\mathbf{a}_i) | \right. \\ \times \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) - (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)r^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \\ \left. \times |\Psi_{L0}\rangle \langle \Psi_{L0} | \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) \rangle \right\}. \quad (13)$$

3. Расчет коэффициента АЭХ

Первое соотношение (13) совпадает по форме с выражением для классического эффекта Холла, если заменить вектор $\mu_0 \mathbf{M}$ вектором магнитной индукции \mathbf{B} . Поэтому можно ожидать, что коэффициент R_1 собственного АЭХ так же зависит от эффективной массы электронов проводимости, включая ее знак, и их концентрации, как и коэффициент R_0 классического эффекта Холла. Тогда вторую часть формулы (13) можно записать в виде

$$R_1 = \frac{\hbar e Z R_0}{48\pi m \mu_B n_a} \operatorname{Re} \left\{ \langle \Psi_C(\mathbf{r}-\mathbf{a}_i) | \right. \\ \times \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j) - (\mathbf{a}_i - \mathbf{a}_j)r^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \\ \left. \times |\Psi_L\rangle \langle \Psi_L | \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_j) \rangle \right\}. \quad (14)$$

Преобразуем в формуле (14) двойную сумму в фигурных скобках в произведение сумм:

$$3 \left(\sum_{\mu=1}^3 \sum_{i=1}^N A_{i\mu} \right) \left(\sum_{i=1}^N C_i \right) - \left(\sum_{\mu=1}^3 \sum_{i=1}^N B_{i\mu} \right) \left(\sum_{i=1}^N C_i \right) \\ - 3 \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{D}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i C_i \right) + \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{E}_i \right) \left(\sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i C_i \right). \quad (15)$$

Здесь

$$A_{i\mu} = \langle a_{i\mu} \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \frac{r_\mu}{r^5} \left(\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) | \Psi_L \rangle, \\ B_{i\mu} = \langle a_{i\mu} \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r_\mu} | \Psi_L \rangle, \\ C_i = \langle \Psi_L | \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) \rangle, \\ \mathbf{D}_i = \langle \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \frac{\mathbf{r}}{r^5} \left(\mathbf{r} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) | \Psi_L \rangle, \\ \mathbf{E}_i = \langle \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} | \Psi_L \rangle. \quad (16)$$

Перейдем к сферической системе координат и напомним в каждом из средних (15) полярную ось z вдоль вектора \mathbf{a}_i . Тогда в каждом из слагаемых в (15) есть только одна ненулевая компонента этого вектора $a_{iz} = a_i = |\mathbf{a}_i|$. При этом в первом и втором слагаемых формулы (15) остаются только

$$A_{iz} = A_i = a_i \langle \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \frac{\cos(\theta)}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} | \Psi_L \rangle$$

и

$$B_{iz} = B_i = a_i \langle \Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) | \frac{1}{r^3} \left(\cos(\theta) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) | \Psi_L \rangle.$$

Рассмотрим взаимодействие $4s$ электрона проводимости с волновой функцией

$$W_C(\rho) = R_{40}(\rho) = \frac{1}{768} (-\rho^3 + 24\rho^2 - 144\rho + 192) \exp\left(-\frac{\rho}{4}\right),$$

где $\rho = \frac{rZ}{a_B}$, и $3d$ электрона намагниченности с волновой функцией

$$W_L(\rho) = \sum_{m=-2}^2 c_m W_{Lm}(\rho),$$

$$W_{Lm}(\rho) = R_{32}(\rho) Y_{2m}(\theta) \exp(im\varphi),$$

$$R_{32}(\rho) = \frac{4}{81\sqrt{30}} \rho^2 \exp\left(-\frac{\rho}{3}\right).$$

Здесь m — магнитное квантовое число. Тогда

$$\Psi_C(\mathbf{r} - \mathbf{a}_i) = R_{40}(\rho_i),$$

$$\rho_i = \sqrt{\rho^2 + b_i^2 - 2\rho b_i \cos(\theta)}, \quad b_i = Z a_i / a_B,$$

и ненулевой вклад во все величины (16) вносит только состояние

$$W_{L0}(\rho) = \sqrt{5/16\pi} R_{32}(\rho) (1 - 3\cos^2(\theta)).$$

В этом состоянии векторы \mathbf{D}_i и \mathbf{E}_i направлены вдоль вектора \mathbf{a}_i .

Экспериментальные значения доли орбитальной составляющей магнитного момента электрона намагниченности при 300 К для железа составляют (0.0918 ± 0.003) ; для кобальта — (0.1472 ± 0.003) ; для никеля — (0.0507 ± 0.0027) [22,23]. Поэтому можно считать, что состояния с различными значениями проекции орбитального момента на произвольную ось квантования равновероятны, и доля состояний Ψ_{L0} с магнитным квантовым числом $m = 0$, вносящих вклад в (15), составляет 1/5. Тогда в формулах (16) получаем

$$A_i = \frac{2\pi Z^3 b_i}{a_B^3 \sqrt{16\pi}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \frac{dR_{32}(\rho)/d\rho}{\rho} R_{40}(\rho_i) (1 - 3y^2) y d\rho dy,$$

$$\mathbf{D}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{a_i^2} A_i,$$

$$B_i = \frac{2\pi Z^3 b_i}{a_B^3 \sqrt{16\pi}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 \left\{ \frac{(1 - 3y^2) dR_{32}(\rho)/d\rho}{\rho} - \frac{6R_{32}(\rho)}{\rho^2} \right\}$$

$$\times R_{40}(\rho_i) y d\rho dy, \quad \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{a}_i}{a_i^2} B_i,$$

$$C_i = \frac{2\pi}{\sqrt{16\pi}} \int_0^\infty \int_{-1}^1 R_{32}(\rho) R_{40}(\rho_i) (1 - 3y^2) d\rho dy. \quad (17)$$

Здесь $y = \cos(\theta)$. Из формул (17) видно, что величины A_i, B_i и C_i вида (16), входящие в суммы (15), зависят только от расстояния от рассматриваемого атома до ближайшего соседа, поэтому при их вычислении можно разбить ближайших соседей рассматриваемого атома на группы с одинаковыми расстояниями от него. Если решетка симметричная и каждому соседу с координатой \mathbf{a} , соответствует сосед с координатой $-\mathbf{a}_i$, то третье и четвертое слагаемые в формуле (15) равны нулю. Заметим, что $n_a = N_A/v_m$, где v_m — молярный объем, $N_A = 6.02214 \cdot 10^{23}$ — число Авогадро. Формула (14) при этом принимает вид

$$\frac{R_1}{R_0} = \frac{\hbar e Z v_m}{48 \pi m \mu_B N_A} \left(\sum_i m_i (3A_i - B_i) \right) \left(\sum_i m_i C_i \right). \quad (18)$$

Здесь m_i — число ближайших соседей рассматриваемого атома на расстоянии a_i от него.

Для никеля $Z = 10.5$; $v_m = 6.6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$. Численный расчет отношения R_1/R_0 по формулам (17) и (18) дает значение 0.16. Для кобальта $Z = 10.42$; $v_m = 6.7 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$; $R_1/R_0 = 0.35$. Для железа $Z = 10.3$; $v_m = 7.1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$; $R_1/R_0 = 0.33$.

4. Сравнение с экспериментом

Из формулы (1), полагая, что $M(B \gg B_S) = M_S$, получаем

$$R_0 = \lim_{B \gg B_S} \left(\frac{d\rho_H}{dB} \right),$$

$$R_S = \frac{\rho_H(B=0, M=M_S)}{B_S} = \frac{\lim_{B \gg B_S} (\rho_H(B) - R_0 B)}{B_S}. \quad (19)$$

Графики, иллюстрирующие формулы (19), приведены в работе [24]. В работе [25] коэффициент АЭХ вычислялся по формуле $R_S = \lim_{B \rightarrow 0} (d\rho_H/dB) - R_0$ в предположении, что $\lim_{B \rightarrow 0} (\mu_0 M/B) = 1$. Для ферромагнетиков в рэлеевской области это условие может не выполняться. Поэтому значения R_S были пересчитаны по приведенным в [25] на рис. 2, 3, 6 и 7 данным.

При $T = 4.2 \text{ К}$ для никеля

$$R_0 = -0.34 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{С},$$

$$\rho_H(B = 2.08 \text{ Т}) = -0.73 \cdot 10^{-10} \Omega \cdot \text{м},$$

$$B_S = 0.61 \text{ Т}.$$

Тогда

$$R_S = -0.035 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{С},$$

$$R_S/R_0 = 0.11.$$

Для кобальта

$$R_0 = -1.0 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{С},$$

$$\rho_H(B = 2.5 \text{ Т}) = -2.96 \cdot 10^{-10} \Omega \cdot \text{м},$$

$$B_S = 1.7 \text{ Т},$$

$$R_S = -0.27 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{С},$$

$$R_S/R_0 = 0.27.$$

Для железа

$$R_0 = 0.052 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{С},$$

$$\rho_H(B = 2.84 \text{ Т}) = 0.25 \cdot 10^{-10} \Omega \cdot \text{м},$$

$$B_S = 2.15 \text{ Т},$$

$$R_S = 0.048 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3/\text{С},$$

$$R_S/R_0 = 0.92.$$

Для никеля $\rho_{292}/\rho_{4.2} = 57.2$; для кобальта $\rho_{292}/\rho_{4.2} = 66.3$. Для никеля и кобальта проводимость при $T = 4.2 \text{ К}$ около 10^9 С/м , и в пределах точности измерений можно положить $R_S \approx R_1$. Расчетные значения отношения R_1/R_0 превышают измеренные значения R_S/R_0 примерно на 25%. Это расхождение согласуется с погрешностью измерения, поскольку по второй формуле (18) величина R_S находится как малая разница двух близких величин. Для железа $\rho_{292}/\rho_{4.2} = 11.45$; проводимость при $T = 4.2 \text{ К}$ равна $1.2 \cdot 10^8 \text{ С/м}$, а константа АЭХ и расчетное значение коэффициента собственного АЭХ в 20 раз меньше, чем для кобальта. Измеренное значение отношения R_S/R_0 превышает расчетное отношение R_1/R_0 в 2.7 раза. Для чистого железа $\rho_{292}/\rho_{10} \approx 10^4$ [26], и можно предположить, что при чистоте железа 99.998% вклад в АЭХ обусловленного примесями рассеяния существенно превышает не зависящий от рассеяния, поэтому R_S существенно больше, чем R_1 .

Заключение

Перспективным направлением для реализации нового поколения устройств информационных и сенсорных технологий является антиферромагнитная спинтроника, основанная на АЭХ [27]. Обоснование методов проектирования систем спинтроники, расчета и оптимизации их характеристик требует дополнительных предположений о системе. Такими предположениями являются представление волновой функции коллективизированного электрона проводимости в виде функции Ванье, приближение эффективного заряда и приближение ближайших соседей в соотношении (8), а также модель идеального ферми-газа для электронов проводимости и учет структуры поверхности Ферми через константу нормального эффекта Холла. Рассчитанные в рамках этих моделей коэффициенты СЭХ в немагнитных металлах согласуются с измеренными [15,16].

Для анализа АЭХ эти предположения дополнены предположением о возможности рассматривать кристаллит ферромагнетика как гомоядерную макромолекулу в рамках одноэлектронного метода Хартри–Фока.

Магнитную структуру планарного антиферромагнетика можно представить как две подрешетки, сдвинутые на вектор решетки и намагниченные до насыщения в противоположных направлениях. Магнитную структуру гелимагнетика можно представить как результат кручения центрально-симметричной решетки намагниченного до насыщения ферромагнетика вокруг оси хиральности [28]. Соответствие рассчитанных в этих предположениях коэффициентов АЭХ в ферромагнетиках с измеренными позволяет использовать предложенный метод для построения модели АЭХ в антиферромагнетиках.

В настоящее время АЭХ активно изучается в сплавах типа Гейслера, которые принадлежат группе полуметаллов Вейля, в том числе со структурой кагоме, и рассматриваются наряду с металлическими антиферромагнетиками как перспективные материалы для элементов спинтроники. В объемном монокристалле вейловского ферромагнитного полуметаллического ферромагнетика (ПМФМ) Co_2MnAl при комнатной температуре зарегистрирована аномальная холловская проводимость (АХП) $1.3 \cdot 10^5 \text{ S/m}$ при рекордном значении $\tan(\theta_{AH}) = 0.21$. Сравнением температурных зависимостей продольного удельного сопротивления и АХП показано, что АЭХ является собственным [29]. В ПМФМ LiMn_6Sn_6 с кагоме структурой обнаружена собственная АХП $3.8 \cdot 10^4 \text{ S/m}$ при $T = 50 \text{ K}$. При комнатной температуре АХП уменьшается примерно в 2 раза [30]. Большой АЭХ авторы объясняют наличием в зонной структуре LiMn_6Sn_6 нескольких пересечений зон, включая спин-поляризованную точку Дирака в точке К, близкой к энергии Ферми. В антиферромагнитном полуметалле Вейля HoAgGe с искаженной решеткой кагоме зарегистрирована АХП $2.8 \cdot 10^5 \text{ S/m}$ при $T = 45 \text{ K}$ [31]. По мнению авторов, искажение идеальной решетки кагоме путем вращения треугольников в противоположных направлениях приводит к образованию нецентросимметричной структуры. В результате дважды вырожденный конус Дирака решетки кагоме превращается в пару точек Вейля, которые могут генерировать большую кривизну Берри и соответственно большой собственный АЭХ.

Обзор теоретических и экспериментальных работ по свойствам ПМФМ приведен в [32]. Отмечено, что одной из причин нетривиальной топологии электронной зонной структуры вейлевских полуметаллов, проявляющейся в гигантском АЭХ, является сильное спин-орбитальное взаимодействие [33]. Гигантский АЭХ в сочетании со СЭХ и спиновым эффектом Нернста обнаружен в перспективных для спинтроники полуметаллах на основе марганца [34]. Можно считать, что собственный АЭХ в ПМФМ, так же как и АЭХ в металлических ферромагнетиках, и СЭХ в немагнитных проводниках имеет спин-орбитальную природу. Топология электронной зонной структуры определяет все транспортные свойства ПМФМ, в том числе его продольную и поперечную проводимости. Приведенные в работах [29–31] экспериментальные температурные и магнитопольевые

зависимости продольной и поперечной проводимости для ПМФМ подобны соответствующим зависимостям для металлического ферромагнетика [10–13,24,25]. Это позволяет предположить, что предложенный метод можно использовать для построения модели АЭХ в ПМФМ. При этом нужно модифицировать формулу (7), полученную в справедливом для металлических ферромагнетиков предположении, что электроны проводимости не поляризованы. В ПМФМ при низких температурах электроны проводимости, напротив, сильно поляризованы [32,35]. Кроме того, определенную сложность может вызвать наличие в ПМФМ неквазичастичных состояний.

Кристаллическая решетка ПМФМ, особенно со структурой кагоме, гораздо сложнее, чем у металлов. Целесообразно рассматривать ее как наложение нескольких гомоядерных подрешеток. Так, представление сложной решетки $\text{A15 } \beta$ -вольфрама как наложение двух простых подрешеток позволило проанализировать гигантский СЭХ в нем с удовлетворительной точностью [16]. Здесь может быть перспективным развитый в работе [36] подход.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] E.H. Hall. *Philos. Mag.*, **12**, 157 (1881).
- [2] R. Karplus, J.M. Luttinger. *Phys. Rev.*, **95**, 1154 (1954). DOI: 10.1103/PhysRev.95.1154
- [3] N. Nagaosa, J. Sinova, S. Onoda, A.H. MacDonald, N.P. Ong. *Rev. Mod. Phys.*, **82**, 1539 (2010). DOI: 10.1103/RevModPhys.82.1539
- [4] N.A. Sinitsyn. *J. Phys.: Condens. Matter.*, **20**, 023201 (2008). DOI: 10.1088/0953-8984/20/02/023201
- [5] Л.Н. Овешников, В.А. Кульбачинский, А.Б. Давыдов, Б.А. Аронзон. *Письма в ЖЭТФ*, **100**(9), 648 (2014). DOI: 10.7868/S0370274X14210073. [L.N. Oveshnikov, V.A. Kulbachinskii, B.A. Aronzon, A.B. Davydov. *JETP Lett.*, **100**(9), 570 (2015). DOI: 10.1134/S0021364014210127]
- [6] J. Sinova, S.O. Valenzuela, J. Wunderlich, C.H. Back, T. Jungwirth. *Rev. Mod. Phys.*, **87**, 1213 (2015). DOI: 10.1103/RevModPhys.87.1213
- [7] J. Smit. *Physica (Amsterdam)*, **24**, 39 (1958). DOI: 10.1016/S0031-8914(58)93541-9
- [8] R. Schad, P. Beliën, G. Verbanck, V.V. Moshchalkov, Y. Bruynseraede. *J. Phys.: Condens. Matter*, **10**, 6643 (1998). DOI: 10.1088/0953-8984/10/30/005
- [9] X. Wang, D. Vanderbilt, J.R. Yates, I. Souza. *Phys. Rev. B.*, **76**, 195109 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevB.76.195109
- [10] P.N. Dheer. *Phys. Rev.*, **156**, 637 (1967). DOI: 10.1103/PhysRev.156.637
- [11] J.M. Lavine. *Phys. Rev.*, **123**, 1273 (1961). DOI: 10.1103/PhysRev.123.1273
- [12] T. Miyasato, N. Abe, T. Fujii, A. Asamitsu, S. Onoda, Y. Onose, N. Nagaosa, Y. Tokura. *Phys. Rev. Lett.*, **99**, 086602 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevLett.99.086602

- [13] D. Hou, Y. Li, D. Wei, D. Tian, L. Wu, X. Jin. *J. Phys.: Condens. Matter*, **24**, 482001 (2012). DOI: 10.1088/0953-8984/24/48/482001
- [14] S.H. Chun, Y.S. Kim, H.K. Choi, I.T. Jeong, W.O. Lee, K.S. Suh, Y.S. Oh, K.H. Kim, Z.G. Khim, J.C. Woo, Y.D. Park. *Phys. Rev. Lett.*, **98**, 026601 (2007). DOI: 10.1103/PhysRevLett.98.026601
- [15] В.К. Игнатъев, С.В. Перченко, Д.А. Станкевич. Письма в ЖТФ, **49**(6), 25 (2023). DOI: 10.21883/PJTF.2023.06.54812.19437 [V.K. Ignatjev, S.V. Perchenko, D.A. Stankevich. *Tech. Phys. Lett.*, **49**(3), 60 (2023).]
- [16] В.К. Игнатъев, С.В. Перченко, Д.А. Станкевич. РЭНСИТ, **16**(1), 53 (2024). DOI: 10.17725/rensit.2024.16.053 [V.K. Ignatjev, S.V. Perchenko, D.A. Stankevich. *RENSIT*, **16**(1), 53 (2024).]
- [17] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. *Квантовая электродинамика* (Физматлит, М., 1989) [V.B. Berestetskii, E.M. Lifshitz, L.P. Pitaevskii. *Quantum electrodynamics* (Course of Theoretical Physics, v. 4), Second edition (Butterworth-Heinemann, 1982)]
- [18] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория* (Физматлит, М., 1974) [L.D. Landau, E.M. Lifshitz. *Quantum mechanics, Non-Relativistic Theory* (Course of Theoretical Physics, v. 3), Third Edition (Butterworth-Heinemann, 1981)]
- [19] О. Маделунг. *Теория твердого тела* (Наука, М., 1980) [пер. с нем. О. Madelung. *Festkorpertheorie I, II* (Springer-Verlag, Berlin, 1972)]
- [20] Р. Фларри. *Квантовая химия. Введение*. (Мир, М., 1985). [R.L. Flurry. *Quantum chemistry. An Introduction*. (Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1983)]
- [21] И.А. Квасников. *Теория равновесных систем: Статистическая физика* (Едиториал УРСС, М. 2002) [I.A. Kvasnikov. *A Theory of Equilibrium Systems: Statistical Physics* (Editorial, M., 2002)]
- [22] R.A. Reck, D.L. Fry. *Phys. Rev.*, **184**(2), 492 (1969). DOI: 10.1103/PhysRev.184.492
- [23] H.P.J. Wijn (editor). *Magnetic Properties of Metals. Sub volume a. 3d, 4d, 5d Elements, Alloys and Compounds*. Landolt-Bornstein, New Series Group 3, Vol. 19, Pt. a (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1986)
- [24] J. Kötzler, W. Gil. *Phys. Rev. B*, **72**, 060412(R) (2005). DOI: 10.1103/PhysRevB.72.060412
- [25] Н.В. Волькенштейн, Г.В. Федоров. *ЖЭТФ*, **38**, 64 (1960). [N.V. Volkenshtein, G.V. Fedorov. *Sov. Phys. JETP*, **11**(1), 48 (1960).]
- [26] Г.К. Уайт. *Экспериментальная техника в физике низких температур* (Физматлит, М., 1961) [G.K. White. *Experimental techniques in low-temperature physics* (Clarendon press, Oxford, 1959)]
- [27] J. Han, R. Cheng, L. Liu, H. Ohno, S. Fukami. *Nature Mater.*, **22**, 684 (2023). DOI: 10.1038/s41563-023-01492-6
- [28] В.К. Игнатъев. *ЖТФ*, **94**(4), 529 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.04.57522.159-23 [V.K. Ignatjev. *Tech. Phys.*, **69**(4), 497 (2024).]
- [29] P. Li, J. Koo, W. Ning, J. Li, L. Miao, L. Min, Y. Zhu, Y. Wang, N. Alem, C.-X. Liu, Z. Mao, B. Yan. *Nat. Commun.*, **11**, 3476 (2020). DOI: 10.1038/s41467-020-17174-9
- [30] D. Chen, C. Le, C. Fu, H. Lin, W. Schnelle, Y. Sun, C. Felser. *Phys. Rev. B*, **103**, 144410 (2021). DOI: 10.1103/PhysRevB.103.144410
- [31] S. Roychowdhury, K. Samantaa, S. Singha, W. Schnellea, Y. Zhangc, J. Nokya, M.G. Vergniorya, C. Shekhara, C. Felsera. *PNAS*, **121**(30), e2401970121 (2024). DOI: 10.1073/pnas.2401970121
- [32] В.В. Марченко, В.Ю. Ирхин. *ФММ*, **122**(12), 1221 (2021). DOI: 10.31857/S0015323021120068 [V.V. Marchenkov, V.Yu. Irkhin. *Physio Metals Metallography*, **122**(12), 1133 (2021). DOI: 10.1134/S0031918X21120061]
- [33] P.A. Igoshev, D.E. Chizhov, V.Yu. Irkhin, S.V. Streltsov. *Phys. Rev. B*, **110**, 115110 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevB.110.115110
- [34] V.V. Marchenkov, V.Y. Irkhin. *Materials*, **16**, 6351 (2023). DOI: 10.3390/ma16196351
- [35] A.A. Semiannikova, Yu.A. Perevozchikova, V.Yu. Irkhin, E.B. Marchenkova, P.S. Korenistov, V.V. Marchenkov. *AIP Adv.*, **11**(1), 015139 (2021). DOI: 10.1063/9.0000118
- [36] P.A. Igoshev, V.Yu. Irkhin. *Phys. Lett. A*, **438**, 128107 (2022). DOI: 10.1016/j.physleta.2022.128107