05

# Несложное уравнение состояния для описания поведения сплошных и пористых образцов алюминия при ударном сжатии и изоэнтропической разгрузке

© Р.К. Бельхеева

Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
e-mails: rumia@post.nsu.ru, rimbel@academ.org

Поступило в Редакцию 25 марта 2023 г.
В окончательной редакции 20 февраля 2025 г.
Принято к публикации 11 марта 2025 г.

Построено малопараметрическое уравнение состояния алюминия, коэффициент Грюнайзена в котором задан в виде логарифмической зависимости от плотности. Определены параметры уравнения состояния алюминия для диапазона плотностей от 1.4 до 7 g/cm$^3$. Пористый материал рассмотрен как простая термодинамически равновесная смесь алюминия и воздуха. Модель использует только параметры уравнений состояния и массовые доли составляющих смеси. Рассчитанные с использованием этой модели ударные адиабаты для образцов алюминия с различными начальными пористостями, кривые повторного сжатия и изоэнтропы разгрузки оказываются близкими к соответствующим экспериментальным данным. Это указывает на применимость предложенного подхода к построению уравнения состояния алюминия для описания свойств этого металла (в чистом виде и в составе смесей) как в области многократного сжатия, так и в области разрежения.

**Ключевые слова:** ударная адиабата, изоэнтропа разгрузки, одноконтинуальное приближение, гетерогенная смесь, термодинамическое равновесие, однотемпературное приближение, односкоростное приближение, коэффициент Грюнайзена.

DOI: 10.61011/JTF.2025.07.60652.54-25

## Введение

Активное использование алюминия основано на таких его свойствах как легкость, пластичность, электропроводность, устойчивость к коррозии, немалую роль играет при этом его невысокая стоимость по сравнению с другими металлами. Большим разнообразием свойств обладают сплавы алюминия, и это разнообразие получается введением в сплавы различных легирующих добавок. Например, в самолетостроении и судостроении большую роль играет уменьшение массы и высокая прочность сплавов алюминия по сравнению со сталью. При строительстве гидросамолетов применяется сварение магнолиевых (алюминиево-магниевых) сплавов, устойчивых к коррозии. Сплавы алюминия с магнием активно используются в нефтяной и химической промышленности, поскольку они обладают высокой коррозионной стойкостью. Благодаря высокой электропроводности и устойчивости к перепадам температуры алюминий широко используется в электротехнической промышленности. Легирующие добавки позволяют получить материалы с заданными свойствами, в которых в качестве основного компонента содержится алюминий. В сжатом виде наиболее полная информация о получении, переработке, применении алюминия, его физических, химических и термодинамических свойствах содержится в [1]. В той же статье энциклопедии показано, как от природы легирующего компонента зависят свойства сплавов и соединений, в которых содержится алюминий. До того, как описывать различные смеси, необходимо получить модель, позволяющую достоверно отображать поведение смесей, а также параметры уравнений состояния каждой составляющей этих смесей. Появление новых моделей для описания поведения сплошных и пористых образцов смесей [2–5] вызвано задачами современной науки: это задачи динамического компактирования, ударно-волнового синтеза и других взрывных технологий. Исходя из того, что смеси различаются большим разнообразием составов, необходимо иметь для их описания наиболее простую модель, использующую только параметры уравнений состояния самих составляющих и их массовые доли в смеси. В этой связи проводится данное исследование, нацеленное на получение параметров несложного уравнения состояния для алюминия при высоких давлениях и температурах.

В обзоре [6] рассмотрены проблемы и методы построения уравнений состояния веществ, изложены принципы построения полуэмпирических моделей, перечислены основные требования к уравнениям состояния. Построению уравнения состояния алюминия посвящено много исследований (см., например, работы [6–13] и ссылки в них). В частности, в [7] предложено довольно сложное уравнение состояния этого металла с учетом фазовых превращений (плавления и испарения) в широком диапазоне плотностей и температур. В [13] разработано более

простое уравнение состояния алюминия в форме зависимости давления от удельного объема и внутренней энергии, также хорошо согласующееся с данными ударно-волновых экспериментов со сплошными и пористыми образцами. В настоящей работе построено уравнение состояния алюминия на основе предложенной ранее несложной модели [4] (в переменных удельный объем и температура), которую удобно использовать в расчетах термодинамических характеристик смесей (сплавов), в состав которых входит этот металл.

## 1. Математическая модель и методика расчета

В [14] отмечено, что задача получения уравнения состояния конденсированного тела неразрешима методами статистической термодинамики в точной математической постановке. В литературе существует большое число подходов к выбору уравнения состояния при описании ударно-волновых процессов [5–18]. При конструировании полуэмпирических уравнений состояния задается вид функциональной зависимости, а параметры этого уравнения выбираются так, чтобы наилучшим образом соответствовать экспериментальным данным [6,14].

В [16] отмечено, что при математическом моделировании ударно-волновых явлений для описания поведения конденсированных веществ может быть использовано уравнение состояния в форме уравнения Ми–Грюнайзена

$$P = P_X + \rho\gamma E_T, \tag{1}$$

где $P_X$ — упругая составляющая давления; второе слагаемое в правой части ($P_T$) — тепловая составляющая давления, $P_T = \gamma\rho E_T$; $\rho$ — плотность среды; $\gamma$ — коэффициент Грюнайзена; $E_T$ — тепловая составляющая внутренней энергии. Для описания тепловой части давления в [4] предлагается логарифмическая зависимость коэффициента Грюнайзена от плотности

$$\gamma = \gamma_0 r^{-\ln r}. \tag{2}$$

Здесь $r = \rho/\rho_0$ — степень сжатия; $\rho_0$ — параметр уравнения состояния (в случае конденсированного вещества это его плотность при нормальных условиях); $\gamma_0$ — постоянная величина, параметр уравнения состояния. Зависимость (2) позволяет адекватно отражать поведение коэффициента Грюнайзена как для сплошных, так и для сильнопористых материалов. В [5,14,16] отмечено, что в работах, посвященных ударно- волновому нагружению, коэффициент Грюнайзена может быть описан формулой

$$\gamma = \gamma_0 r^{-l}, \tag{3}$$

где $l > 0$, $l = \text{const}$. При расчете ударных адиабат для материалов с высокой пористостью использование выражения (3) для описания коэффициента Грюнайзена приводит к тому, что коэффициент Грюнайзена возрастает с ростом интенсивности ударной волны. Это вызвано тем, что при аномальном поведении ударных адиабат, при котором конечная плотность ударно-сжатого вещества оказывается меньше нормальной плотности, отношение $r$ становится меньше единицы ($r^{-1} > 1$). В [19] на примере меди показано, что использование коэффициента Грюнайзена в виде (3) с показателем $l > 0$ для описания пористого материала не согласуется с экспериментальными данными. В [4] обсуждаются недостатки уравнений состояния с коэффициентом Грюнайзена (3) при описании поведения пористых материалов и приведены ссылки на работы, в которых предприняты попытки использования другой формы зависимости для коэффициента Грюнайзена (из числа опубликованных после [4] работ следует упомянуть также [13,20–29]). Еще в [4] была продемонстрирована способность уравнения состояния с коэффициентом Грюнайзена (2) адекватно описывать поведение меди при ударном сжатии, и проведено сравнение с расчетными адиабатами других авторов, использующих уравнение состояния меди с большим количеством параметров. В настоящей работе показана возможность применения модели уравнения состояния, предложенного в [4], к описанию поведения алюминия при импульсной нагрузке и последующей разгрузке.

Использование логарифма в показателе в соотношении (2) приводит к тому, что коэффициент Грюнайзена уменьшается при любом поведении адиабат, так как знак логарифма зависит от величины аргумента, и при $r^{-1} > 1$ показатель становится отрицательным. При описании упругой части давления с помощью уравнения Тета уравнение состояния (1) принимает вид

$$P = P_X + \gamma_{)}\rho_0 r^{1-\ln r} c_{V0} T,$$

$$P_X = A[r^n - 1] - \gamma_0\rho_0 r^{1-\ln r} c_{V0} T_0, \tag{4}$$

где $c_{V0}$ — удельная теплоемкость при постоянном объеме (полагаемая в настоящей работе константой); $T$ — температура; $T_0$ — нормальная температура, $T_0 = 293$ K; $A$ и $n$ — константы, характеризующие холодное (при $T = 0$) сжатие вещества. Параметр $A$ можно найти по формуле $A = c_0^2\rho_0/n$, где $c_0$ — объемная скорость звука при нормальных условиях. Простота и удобство использования этих уравнений обусловлены тем, что для описания свойств индивидуального вещества используется набор из небольшого числа параметров ($\rho_0, c_0, n, c_{V0}, \gamma_0$).

Внутренняя энергия также представляется в виде суммы двух составляющих:

$$E = E_X + c_{V0} T. \tag{5}$$

Здесь $E_X$ — упругая часть энергии сжатия, связанная с упругой составляющей давления соотношением $P_X = \rho^2 dE_X/d\rho$. После интегрирования выражение для

упругой части энергии принимает следующий вид:

$$E_X = \frac{A}{(n-1)\rho_0}[r^{n-1} - 1] + \frac{A}{\rho_0}[r^{-1} - 1] - \gamma_0 c_{V0} T_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(\ln r) - c_{V0} T_0,$$

где $\operatorname{erf}(x)$ — функция ошибок,

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt,$$

для которой в недавней работе [26] приведено аппроксимационное выражение, обладающее достаточно высокой точностью; оно и было использовано в расчетах, представленных далее. Тепловая часть внутренней энергии (5) задается соотношением $E_T = c_{V0} T$.

В работе [30] предложен метод построения уравнения состояния равновесной $N$-компонентной смеси, в котором уравнение состояния каждой составляющей задается в одинаковой форме. В [31] обосновано применение уравнения состояния вида (4) для воздуха.

В данном исследовании пористая $N$-компонентная смесь рассматривается как гетерогенная среда, поры в которой заполнены воздухом. Поры считаются замкнутыми и изолированными, так что газообразная составляющая не просачивается из системы твердое вещество–воздух, не учитывается испарение твердого вещества и увеличение массовой доли газообразного вещества под действием ударной волны. Под пористостью $m$ понимается отношение нормальной плотности монолита ($\rho_{T0}$) к начальной плотности пористого образца ($\rho_{00}$). Вне рамок рассмотрения в настоящей работе остаются эффекты фазовых переходов (плавления и испарения). Как показывают расчеты по более сложным моделям уравнений состояния [7,32,33], в которых фазовые переходы учтены, эффект плавления вещества в ударной волне мало заметен на ударных адиабатах в переменных, входящих в уравнения Гюгонио, для образцов различной начальной пористости. Результаты расчетов [33] по уравнению состояния алюминия с учетом плавления и испарения свидетельствуют о том, что при ударном сжатии сплошных и пористых образцов с исходным состоянием в твердой фазе металла достигаются заметно более высокие давления, чем на кривой испарения при тех же температурах. Следовательно, границей области применимости по давлению снизу (при плотностях меньше, чем плотность жидкого алюминия в точке плавления при атмосферном давлении) для представленной модели уравнения состояния можно полагать изобару, проходящую через критическую точку перехода жидкость–пар.

Давление в критической точке ($P_{\text{cr}}$) по разным оценкам для алюминия составляет 0.197 [7], 0.329 [34], 0.3988 [35], 0.45 [36], 0.597 GPa [37]. Следует заметить, что по всем указанным оценкам $P_{\text{cr}}$ не превышает 1 GPa. Плотность жидкого алюминия в точке плавления при атмосферном давлении, согласно уравнению состояния [7], приблизительно равна 2.4 g/cm$^3$. Получается, что при плотностях меньше 2.4 g/cm$^3$ и давлениях ниже 1 GPa представленная модель лишь качественно описывает метастабильные состояния алюминия (включая область растягивающих напряжений [37]).

При описании многокомпонентных смесей необходимо учитывать взаимодействие и взаимовлияние составляющих, что сильно усложняет математические модели, так как приходится описывать как процессы в отдельных компонентах, так и эффекты взаимодействия между этими компонентами. Но в некоторых случаях многокомпонентную смесь можно рассматривать как один континуум, что значительно упрощает задачу. Например, при распространении сильных ударных волн, давления в которых существенно выше напряжений, связанных с прочностью, в качестве условий совместного движения используются условия равенства давлений фаз. При этом в случае, когда эффекты относительного движения компонентов несущественны и смесь находится в термодинамическом равновесии, выполняются условия $P_i = P$, $T_i = T$, $u_i = u$ ($P_i, T_i, u_i$ — давление, температура и массовая скорость компонента $i$; $P, T, u$ — то же самое для смеси). Тогда движение среды можно описать как движение единого континуума с особым уравнением состояния, учитывающим свойства компонентов смеси и их массовые доли. Это приводит к значительному сокращению числа уравнений. В рамках такого способа описания смеси принято, что уравнения состояния компонентов в смеси такие же, как в свободном состоянии. Для простых смесей, не образующих связей в атомарном масштабе, в работе [38] изложены принципы построения модели взаимодействующих и взаимопроникающих континуумов. Способ описания смеси единым континуумом рассмотрен в работах [19,39,40] и др. В рамках такого способа описания смеси континуумов, находящихся в термодинамическом равновесии, в [19,30] предложен метод построения уравнения состояния равновесной $N$-компонентной смеси, в котором уравнение состояния каждой составляющей задается в одинаковой форме.

При описании гетерогенных смесей (смесей с макроскопическими неоднородностями) принято использовать гипотезу аддитивности объема смеси по объемам компонентов [38]:

$$V = \sum_{i=1}^{N} V_i,$$

где $V$ — удельный объем смеси; $V_i$ — объем компонента $i$ в единице массы смеси. Из этого соотношения получено выражение для плотности многокомпонентной смеси в виде

$$\frac{1}{\rho} = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\rho_i}, \tag{6}$$

где $x_i$ и $\rho_i$ — массовая доля и плотность компонента $i$. Плотность компонента $i$ это масса $i$-го компонента в единице объема $i$-го компонента ($\rho_i = x_i/V_i$). После проведения тождественных преобразований из уравнений

состояния (4), записанных для каждой составляющей и для смеси, плотности смеси и компонентов выражаются соотношениями вида

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{P + kA_{\max}}{A} \right)^{1/n} \times \left[ 1 - \frac{kA_{\max} - A + \gamma_0 \rho_0 r^{1-\ln r} c_{V0}(T - T_0)}{P + kA_{\max}} \right]^{1/n},$$

где $k$ — некоторое положительное число; $A_{\max} = \max\{A_1, \ldots, A_N\}$; $A_i$ — коэффициент сжатия компонента $i$. Нетрудно такие выражения для плотностей компонентов подставить в (6) и соответствующие коэффициенты при $P$ и $(T - T_0)$ в разложениях Тейлора для правой и левой частей получившегося равенства приравнять друг другу [19]. Тогда можно получить выражения для параметров уравнения состояния смеси $A$, $\rho_0, n$, $\gamma_0$ через соответствующие параметры и массовые доли компонентов [19]:

$$n = \frac{R_1 R_3}{R_2^2} - 1, \ A = kA_{\max} - \frac{nR_2}{R_1},$$

$$\rho_0 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{A}{P + kA_{\max}} \right)^{1/n}, \ \gamma_0 \frac{nR_4}{c_{V0}} (\rho_0 R_1)^{\ln(\rho_0 R_1)}, \qquad (7)$$

где

$$R_1 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\rho_{i0}} R_{5i}, \ R_2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\rho_{i0}} R_{5i} \frac{kA_{\max} - A_i}{n_i},$$

$$R_3 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\rho_{i0}} R_{5i}(n_i + 1) \left( \frac{kA_{\max} - A_i}{n_i} \right)^2,$$

$$R_4 = \sum_{i=1}^{N} \frac{x_i \gamma_{i0} c_{V0i}}{n_i} R_{5i}^{-\ln R_{5i}}, \ R_{5i} = \left( \frac{A_i}{P + kA_{\max}} \right)^{1/n_i}.$$

Удельная теплоемкость при постоянном объеме для смеси задается соотношением

$$c_{V0} = \sum_{i=1}^{N} x_i c_{V0i}.$$

Здесь $\rho_{i0}$, $\gamma_{i0}$, $n_i$, $c_{V0i}$ — нормальная плотность, постоянный параметр коэффициента Грюнайзена, показатель сжатия, удельная теплоемкость при постоянном объеме компонента $i$. Значение $k = 2$ гарантирует выполнение условия сходимости [19]. В [19] показано, как вычислить массовую долю газообразной составляющей, зная значения пористости смеси и массовых долей твердых компонентов. В работе [41] показано, что можно не учитывать наличие газа в порах. Из соотношений (7) видно, что „вкладом“ газообразной составляющей в параметры смеси можно пренебречь, вследствие малости массовой доли этого компонента. Тем не менее в настоящей работе использована общая формулировка модели [19,30], которая может применяться также и для расчетов характеристик смесей нескольких конденсированных компонентов (что соответствует цели этой работы). Таким образом, получена простая (малопараметрическая) модель уравнения состояния термодинамически равновесной $N$-компонентной смеси. Проверка этой модели проводится путем сравнения расчетных ударных адиабат и изоэнтроп разгрузки с экспериментальными данными.

Ранее в работе [27] было показано, что при вариации величины давления в формулах (7) значения параметров уравнения состояния смеси $A, \rho_0, n$ и $\gamma_0$ изменяются незначительно. Поэтому в дальнейших расчетах используются константы $A$, $\rho_0, n$ и $\gamma_0$, найденные по формулам (7) при $P = 0$ для смеси алюминия и воздуха с массовыми долями, которые соответствуют рассматриваемой пористости образцов.

Уравнения Гюгонио для первоначально покоящейся среды в случае, когда давление в невозмущенной среде равно нулю, имеют вид

$$\rho_{00} D = \rho(D - u), \ P = \rho_{00} D u, \ E - E_0 = \frac{P}{2} \left( \frac{1}{\rho_{00}} - \frac{1}{\rho} \right), \qquad (8)$$

где $\rho_{00}$ ($\rho_{00} = \rho_{T0}/m$), $E_0$ — соответственно плотность и внутренняя энергия смеси перед фронтом ударной волны; $u$, $P$, $\rho$, $E$ — массовая скорость, давление, плотность и внутренняя энергия среды за фронтом ударной волны; $D$ — скорость фронта ударной волны. Добавление к соотношениям (8) уравнений состояния среды (4), (5) с параметрами, определяемыми соотношениями (7), и коэффициентом Грюнайзена, имеющим вид (2), приводит к системе уравнений для неизвестных $u, D, E, P, \rho$. Задавая значение массовой скорости среды за фронтом ударной волны, из этой системы уравнений можно определить значения всех искомых величин.

## 2. Результаты моделирования и сравнение с экспериментом

Во всех расчетах ударных адиабат и изоэнтроп разгрузки для сплошных и пористых образцов алюминия при всех значениях пористостей образцов были использованы одни и те же параметры уравнения состояния компонентов, которые указаны в таблице.

Параметры уравнений состояния воздуха и алюминия

| Вещество | $\rho_{i0}$, kg/m$^3$ | $c_{i0}$, km/s | $n_i$ | $c_{V0i}$, kJ/(kg·K) | $\gamma_{i0}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Воздух | 1.3 | 0.343 | 2.20 | 0.718 | 0.16 |
| Алюминий | $2.712 \cdot 10^3$ | 5.33 | 3.46 | 0.8975 | 1.65 |

На рис. 1 и 2 приведены расчетные ударные адиабаты алюминия в координатах массовая скорость за фронтом ударной волны — скорость фронта ударной волны и плотность — давление за фронтом ударной волны соответственно, данные, полученные на основании экспериментов [42–46], и результаты расчетов [7,10,11,13,47].

Хорошее качественное и количественное соответствие расчетных результатов и экспериментальных данных в широком диапазоне давлений показывает, что приведенная в настоящей работе математическая модель уравнения состояния очень хорошо описывает поведение алюминия в ударной волне.

На рис. 1 и 2 для сравнения показаны результаты расчетов по другим уравнениям состояния алюминия [7,10,13]. Также показаны зависимости [11,47] для ударной адиабаты сплошных образцов этого металла, полученные путем обобщения ударно-волновых данных (в том числе [42–46]) и результатов расчетов по квантово-статистическим моделям Томаса–Ферми с поправками [47] и Хартри–Фока–Слэйтера [11]. Видно, что все представленные подходы дают близкие результаты при давлениях не выше 1 TPa и плотностях не выше 7 g/cm$^3$, что можно считать верхней границей области применимости представленного в настоящей работе уравнения состояния алюминия.

При проведении ударно-волновых экспериментов наиболее точными и надежными являются измерения скорости ударной волны, которую наиболее легко измерить, и массовой скорости вещества за фронтом ударной волны. Остальные параметры ударной волны находятся подстановкой массовой скорости и скорости ударной волны в уравнения Гюгонио (8). Для более полного

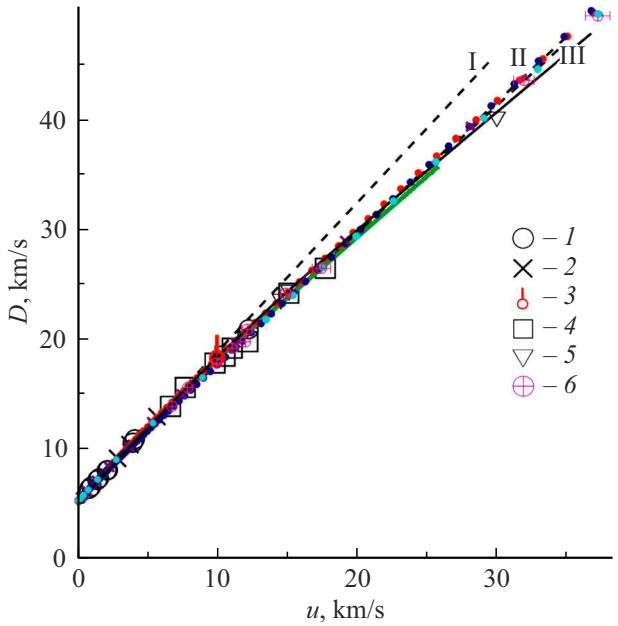


**Рис. 1.** Ударные адиабаты сплошных образцов алюминия в координатах $u$–$D$. Результаты расчетов: черная сплошная линия — представленное в настоящей работе уравнение состояния; красные точки — [13]; синие точки — [47]; голубые точки — [11]; фиолетовые крестики — [7]; зеленая сплошная линия — [10]. Экспериментальные данные: *1* — [42]; *2* — [43]; *3* — [44]; *4* — [45]; *5* — [46]; *6* — интерпретация [11]; штриховые линии I, II, III — ударные адиабаты, рассчитанные с использованием экспериментально установленных зависимостей (10), (11) и (12) соответственно.

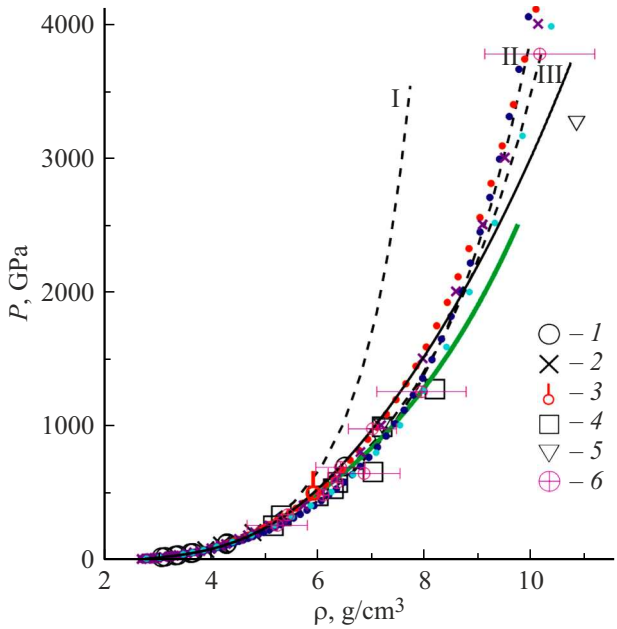


**Рис. 2.** Ударные адиабаты сплошных образцов алюминия в координатах $\rho$–$P$. Обозначения как на рис. 1.

представления проведено сравнение значений скорости звука, полученных с помощью данной модели, и приведенных в экспериментальных работах. Квадрат скорости звука $C_s^2 = (\partial P/\partial\rho)_S$ определяет изоэнтропическую сжимаемость вещества и наклон касательной к адиабате Пуассона в точке $(\rho, P)$. Разгрузка начинается в точке $(\rho_H, P_H)$, лежащей на ударной адиабате Гюгонио, и изоэнтропическая (адиабатическая) скорость звука характеризует скорость распространения по сжатому веществу волн разгрузки. Для данной модели уравнения состояния с коэффициентом Грюнайзена в форме (2) выражение, связывающее температуру и плотность на изоэнтропе разгрузки, имеет вид

$$\frac{T}{T_H} = \exp\left(-\gamma_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!(2j+1)} \left[(\ln r)^{2j+1} + (\ln r_H)^{2j+1}\right]\right). \tag{9}$$

Индекс $H$ относится к исходному состоянию, в котором энтропия $S = S_H$. С помощью соотношения (9) для связи температура — плотность на адиабате Пуассона получено выражение для квадрата скорости звука

$$C_s^2 = V_0 r^{-1}\left[n(P_X + A) + (\gamma + 1 - 2\ln r)P_T\right] + \gamma c_{V_0} T_0 (n - 1 + 2\ln r).$$

Результаты сравнения расчетных и экспериментальных [48–50] скоростей звука в координатах массовая скорость — скорость звука на ударной адиабате, приведенные на рис. 3, также показывают хорошее совпадение.

Ударное сжатие образцов двумя последовательно идущими волнами дает информацию о термодинамических

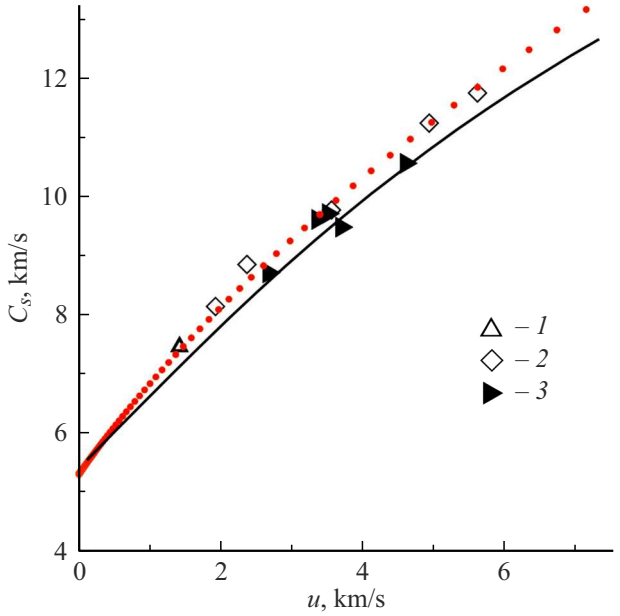


**Рис. 3.** Скорость звука на ударных адиабатах в сплошных образцах алюминия в координатах $u$–$C_s$. Результаты расчетов: сплошная линия — представленное в настоящей работе уравнение состояния; красные точки — [13]. Экспериментальные данные: *1* — [48]; *2* — [49]; *3* — [50].

свойствах вещества в интервале плотностей, превышающих плотность однократного ударно-волнового сжатия. Сравнение расчетных результатов и экспериментальных данных [51–53] на рис. 4 позволяет сделать вывод о возможности адекватного отображения по предлагаемой модели экспериментальных данных по сжатию образцов алюминия в двух ударных волнах.

На рис. 5 проведено сравнение расчетных кривых по предлагаемой модели уравнения состояния и результатов расчетов [7,43]. Следует отметить, что на ударной адиабате по результатам [7] на рис. 5 отчетливо видны изломы зависимости температуры от степени сжатия, которые связаны с плавлением алюминия при ударном нагружении при давлениях 113 и 178 GPa. В предлагаемой модели уравнения состояния, как и в модели [43], этот эффект не учтен. При давлениях ниже 113 GPa (т.е. при степенях сжатия $\rho/\rho_{T0}$ от 1 примерно до 1.6) все представленные на рис. 5 результаты близки друг к другу.

Для того чтобы получить более полную информацию о термодинамических свойствах вещества при высоких давлениях и температурах, проводят экспериментальное изучение ударного сжатия одного и того же вещества при различных начальных плотностях. Ударное сжатие пористых тел проводят до больших давлений, чтобы можно было пренебречь эффектами, связанными с прочностью материала, и на участках адиабат, на которых происходит уплотнение вещества до нормальной плотности, давление считается равным нулю. При расчетах ударных адиабат при всех значениях пористости были использованы одни и те же значения параметров уравнений состояния.

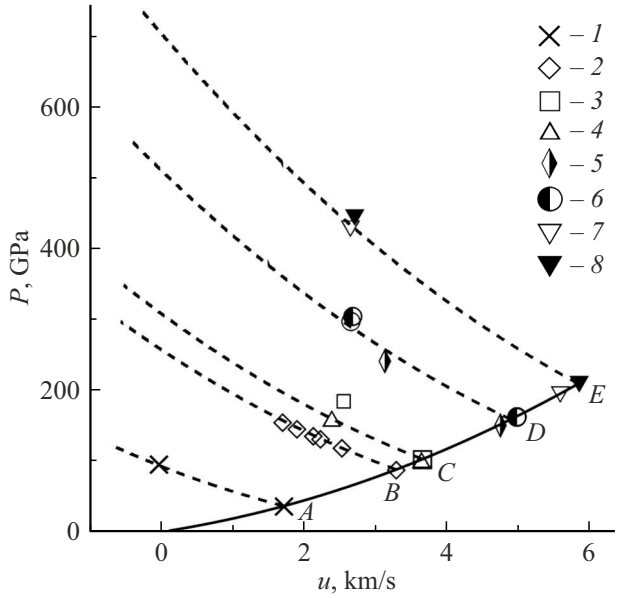


**Рис. 4.** Ударная адиабата (сплошная линия) и адиабаты повторного нагружения (штриховые линии) для исходно сплошных образцов алюминия в координатах $u$–$P$, рассчитанные по представленному в этой работе уравнению состояния, и соответствующие экспериментальные данные (*1* — [51]; *2* — [52]; *3–8* — [53]). Буквами $A, B, C, D, E$ отмечены начальные точки адиабат повторного ударного сжатия с координатами $A$ (1.72, 36), $B$ (3.29, 87.3), $C$ (3.657, 102), $D$ (4.978, 162), $E$ (5.849, 208.8).

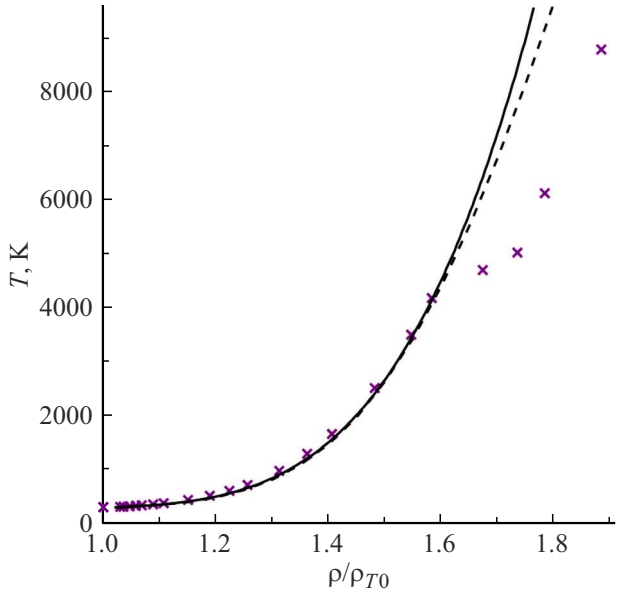


**Рис. 5.** Зависимости температуры от степени сжатия на ударной адиабате сплошных образцов алюминия по предлагаемому уравнению состояния (сплошная линия) и другим моделям (штриховая линия — [43]; фиолетовые крестики — [7]); $\rho_{T0} = 2.712\,\mathrm{g/cm^3}$.

На рис. 6 и 7 приведены расчетные ударные адиабаты исходно пористых образцов алюминия в координатах массовая скорость за фронтом ударной волны — скорость фронта ударной волны и плотность — давление за фронтом ударной волны соответственно и данные,

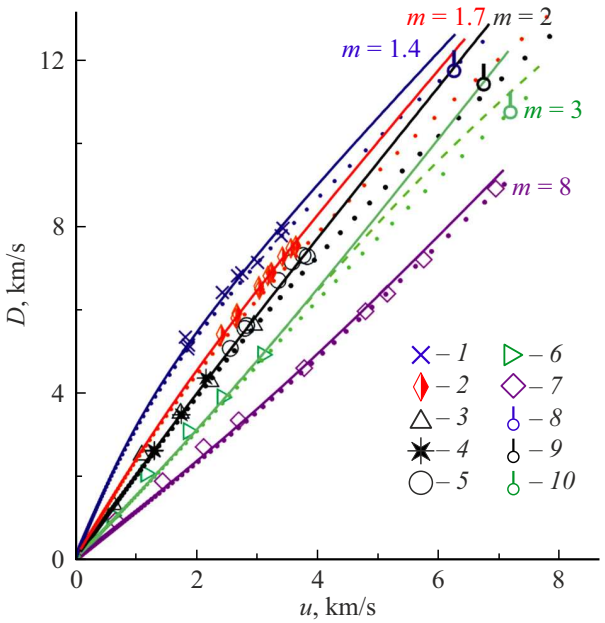


**Рис. 6.** Ударные адиабаты исходно пористых образцов алюминия в координатах $u$–$D$. Результаты расчетов: сплошные линии — представленное в настоящей работе уравнение состояния; точки — [13], штриховая линия — [10]. Экспериментальные данные: *1, 2* — [54]; *3* — [55] ($m = 2.009$); *4* — [56] ($m = 2.012$); *5* — [57] ($m = 2.009$); *6* — [58]; *7* — [56]; *8–10* — [44].

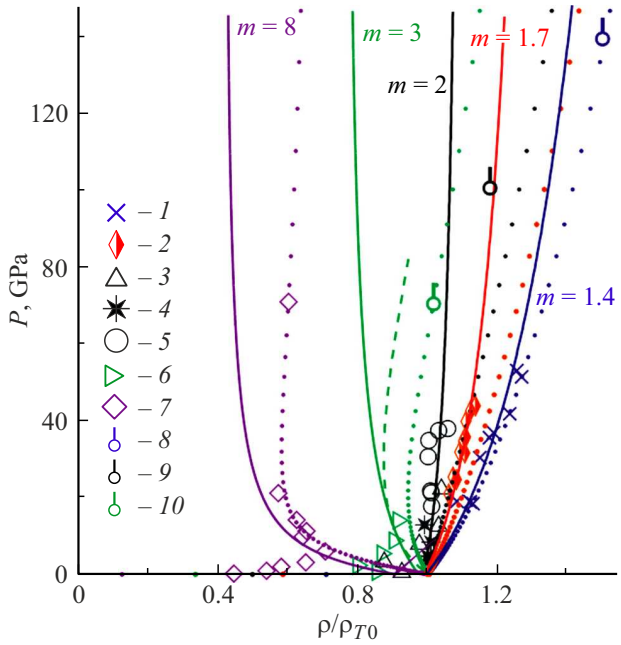


**Рис. 7.** Ударные адиабаты исходно пористых образцов алюминия в координатах $\rho/\rho_{T0} - P$. Обозначения как на рис. 6.

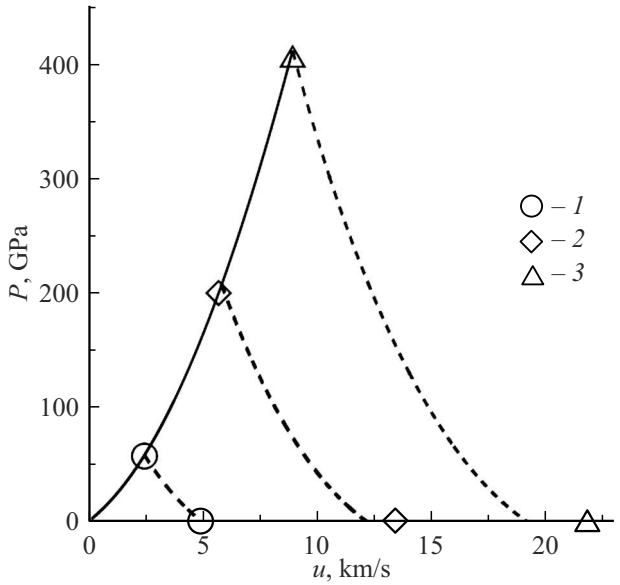


**Рис. 8.** Адиабата Гюгонио (сплошная линия) и адиабаты Пуассона (штриховые линии) исходно сплошных образцов алюминия в координатах $u$–$P$. Экспериментальные данные: *1* — [57]; *2* — [58]; *3* — [59].

полученные на основании экспериментов [44,54–56]. Также на рис. 6 и 7 для сравнения показаны результаты расчетов [10,13]. Хорошее качественное и количественное соответствие расчетных адиабат по предлагаемой модели, результатов [10,13] и экспериментальных данных [44,54–56] в широком диапазоне давлений и пористостей показывает, что приведенная в работе математическая модель уравнения состояния достаточно хорошо описывает поведение пористого материала в ударной волне. Отсюда нижнюю границу области применимости представленного в настоящей работе уравнения состояния алюминия по плотности можно указать по значению 1.4 g/cm$^3$ (при высоких давлениях).

Изоэнтропы разгрузки дают представление о том, как ведет себя среда в области пониженных плотностей при адиабатическом расширении. С целью проверки модели уравнения состояния проведены расчеты для случая изоэнтропической разгрузки материала, подвергнутого ударно-волновому сжатию. Сравнение расчетных кривых и экспериментальных данных [57–59] по изоэнтропическому расширению из состояния ударно-сжатых сплошных образцов алюминия приведено на рис. 8. Увеличение массовой скорости в волне разрежения на участке от некоторой точки на адиабате Гюгонио до точки, в которой давление равно нулю, определяется интегралом Римана вдоль изоэнтропы

$$u_r = \int\limits_{v_H}^{v} \left[ -\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_S \right]^{1/2} dv,$$

где $v_H$, $v$ — соответственно удельные объемы на адиабате Гюгонио при давлении $P = P_H$ и на изоэнтропе

разгрузки при давлении $P = 0$. Скорость свободной поверхности описывается соотношением $u_{fs} = u_H + u_r$, $u_H$ — массовая скорость за фронтом ударной волны. Хорошее совпадение результатов (за исключением двух точек [58,59] при плотностях меньше 2.4 g/cm$^3$ и давлениях ниже 1 GPa) подтверждает надежность описания поведения алюминия при ударном сжатии и последующей изоэнтропической разгрузке по предлагаемому уравнению состояния в области его применимости.

## 3. Область применимости модели

При описании термодинамических свойств металлов при высоких давлениях и температурах принято учитывать эффекты снижения изохорной теплоемкости ионной подсистемы с ростом температуры и увеличения изохорной теплоемкости электронной подсистемы (пропорционально температуре) [44]. Можно ожидать, что в некоторой области плотностей и температур эти эффекты компенсируют друг друга. Как показано в недавних работах [60,61], при температурах в несколько десятков тысяч кельвинов величину теплового давления (сумму вкладов ионной и электронной подсистем) можно считать пропорциональной температуре $P_T = g(V)T$, где $g$ — некоторая функция объема. В таком случае форма теплового давления $P_T = \gamma\rho E_T$ ($\gamma$ — коэффициент Грюнайзена, зависящий от объема; $E_T = c_{v0}T$), использованная в настоящей работе, не требует раздельного учета вкладов ионной и электронной подсистем (что, однако, сужает область применимости модели).

Значения $\gamma_0$ при нормальных условиях для алюминия, полученные разными методами в [21,62], находятся в диапазоне от 1.7 до 2.14. При вычислении этих величин использовались различные допущения и константы. В настоящей работе принято значение $\gamma_0 = 1.65$. За предельное значение коэффициента Грюнайзена — $\Gamma_\infty$ — при температурах, стремящихся к бесконечности, принята величина, равная 2/3 [6,13,14]. Для коэффициента Грюнайзена, заданного зависимостью (2), значения степени сжатия $r$, при которых выполняется неравенство $\gamma \geq 2/3$, лежат в промежутке $r \in (0.3856; 2.59)$. Значение $r = 2.59$ для сплошных образцов алюминия ($m = 1$) в проведенных расчетах массовая скорость, давление и температура за фронтом ударной волны принимает соответственно значения: $u = 14.57$ km/s; $P = 940$ GPa; $T = 78850$ K. Сравнение опытных и расчетных данных для сплошных образцов алюминия показывает (рис. 1 и 2), что модель хорошо описывает поведение образцов как для степеней сжатия, лежащих в найденном промежутке, так и за его пределами. В [43] говорится, что ни одна из моделей для коэффициента Грюнайзена не дает преимущества при описании экспериментальных данных в расчетах импульсного нагружения и изоэнтропической разгрузки материалов. В некоторых случаях для повышения точности расчетов используют $\Gamma_\infty \neq 2/3$, $C_{VP} \neq 3R$ ($C_{VP}$ — теплоемкость решетки при постоянном объеме, $R$ — газовая постоянная). Рис. 1 демонстрирует качественное и количественное совпадение расчетных адиабат и опытных данных до значений массовой скорости $u \approx 15$ km/s, а рис. 2 — до значений степени сжатия $r \approx 2.6$. К сожалению, автору не удалось провести сравнение для ударно-волнового нагружения высокопористых образцов алюминия при значениях $r < 0.5$ в связи с отсутствием экспериментальных данных.

Для ударной адиабаты сплошных образцов алюминия в [63] приведены соотношения:

$$D = 5.333 + 1.356u; \quad 0 \leq u \leq 6.1, \tag{10}$$

$$D = 5.9 + 1.19u; \quad 4.28 < u < 62.3, \tag{11}$$

$$D = 6.541 + 1.158u; \quad 6.1 \leq u \leq 22. \tag{12}$$

Использование линейной зависимости $D = a + bu$ позволяет давление на ударной адиабате, используя соотношения на разрыве (8), представить в виде

$$P = \frac{a^2\rho_{00}(1 - \rho_{00}/\rho)}{1 + b\rho_{00}/\rho - d)^2}.$$

Ударные адиабаты, рассчитанные по этим формулам, приведены на рис. 1 и 2. В соотношениях (10)–(12) наклон ударной адиабаты задается значением коэффициента $b$, найденным по результатам анализа экспериментальных данных. Он не является фиксированным для каждого материала. Чтобы описать ударную адиабату с помощью соотношений типа $D = a + bu$ на большом интервале массовых скоростей, требуется задание нескольких таких соотношений с различными значениями $a$ и $b$ на подынтервалах. Предложенная в [4] зависимость для коэффициента Грюнайзена хорошо описывает изменение наклона адиабаты посредством применения переменного показателя ($-\ln r$), значения которого зависят от степени сжатия.

На рис. 9 и 10 проведено сравнение ударных адиабат для сплошных образцов алюминия, рассчитанных по предлагаемой модели, с данными, приведенными в [11], в координатах массовая скорость — волновая скорость и степень сжатия — давление соответственно. На рис. 9 и 10 показаны также результаты расчетов ударной адиабаты алюминия по уравнению состояния [13] и по квантово-статистическим моделям Томаса–Ферми с поправками [47] и Хартри–Фока–Слейтера [11].

Сравнение показывает, что ударные адиабаты в диапазоне давлений менее 1 TPa, рассчитанные по предлагаемой модели, хорошо согласуются как с результатами других моделей, так и с экспериментальными данными, приведенными в [11]. На рис. 9 показаны также зависимости скорости звука в ударно-сжатом веществе от массовой скорости за фронтом ударной волны по предлагаемой модели и уравнению состояния [13].

Применение логарифмической зависимости (2) позволило описать адиабаты нагружения и разгрузки с помощью двучленного уравнения состояния Ми–Грюнайзена

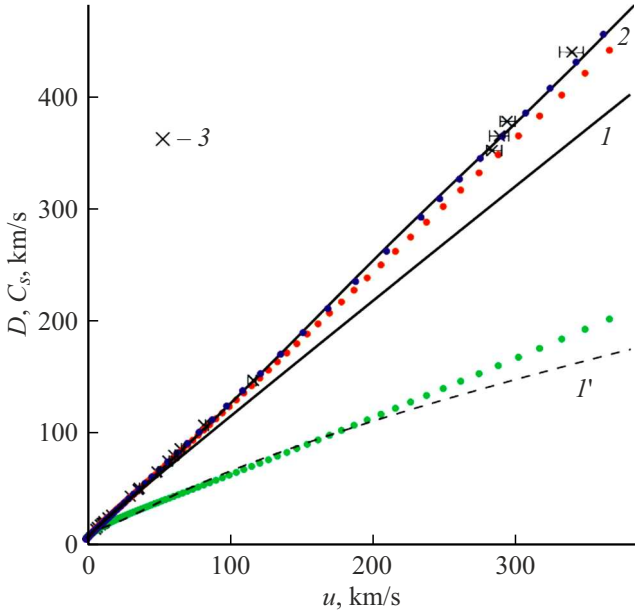


**Рис. 9.** Зависимости скорости ударной волны (сплошные линии, красные и синие точки) и скорости звука в ударно-сжатом веществе (штриховая линия и зеленые точки) от массовой скорости. Результаты расчетов: линии *1* и *1′* — представленное в настоящей работе уравнение состояния; линия *2* — [11]; красные и зеленые точки — [13]; синие точки — [47]. Экспериментальные данные: *3* — интерпретация [11].

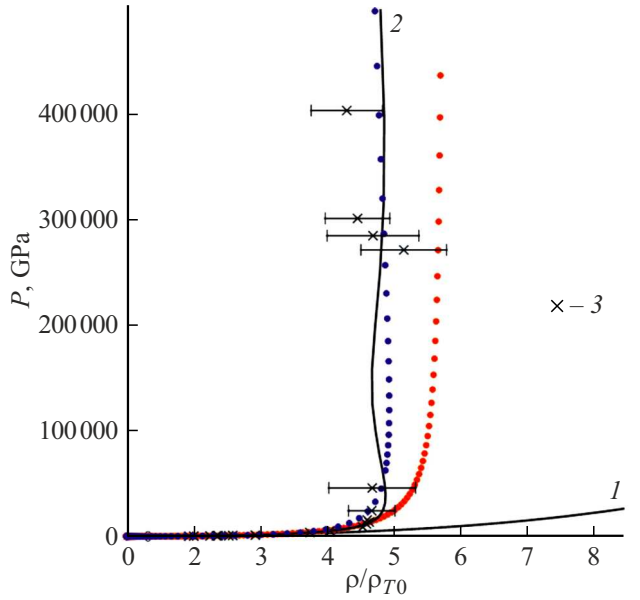


**Рис. 10.** Ударные адиабаты сплошных образцов алюминия в координатах $\rho/\rho_{T0} - P$. Обозначения как на рис. 9.

(без привлечения члена с квадратом температуры) для ударно-волновых данных в диапазоне давлений не выше 1 TPa при плотностях от 1.4 до 7 g/cm$^3$. Следует отметить, что экспериментальные точки [56], показанные на рис. 7 при давлениях до 6 GPa, относятся к области влияния прочностных эффектов, препятствующих полному закрытию пор при ударном сжатии; для описания этих точек [56] требуется привлекать помимо уравнения состояния дополнительные модели (см., например, [64]).

## Выводы

Показано, что простое уравнение состояния для алюминия в форме Ми–Грюнайзена с упругой составляющей для давления типа уравнения Тета с двумя подобранными параметрами $n$ и $\gamma_0$ с хорошей достоверностью описывает поведение сплошных (в одной и двух ударных волнах) и пористых образцов алюминия при ударном сжатии и изоэнтропической разгрузке. Приведенная модель коэффициента Грюнайзена, заданная формулой (2), позволяет расширить диапазон применения уравнения состояния до больших значений пористости ($m \approx 8$). Детальное сравнение с ударно-волновыми данными подтверждает адекватность предлагаемой модели уравнения состояния для описания поведения алюминия в области ее применимости не выше 1 TPa при плотностях от 1.4 до 7 g/cm$^3$ (за исключением области давлений ниже 1 GPa при плотностях меньше 2.4 g/cm$^3$).

### Благодарности

Автор выражает благодарность К.В. Хищенко и К.К. Маевскому за предоставленные данные проведенных ими расчетов.

### Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

## Список литературы

[1] *Химическая энциклопедия* в 5 т. под ред. И.Л. Кнунянц (Советская энциклопедия, М., 1988), т. 1, с. 623.

[2] А.А. Чарахчьян, В.В. Милявский, К.В. Хищенко. ТВТ, **47** (2), 254 (2009). [A.A. Charakhch'yan, V.V. Milyavskii, K.V. Khishchenko. High Temp., **47** (2), 235 (2009). DOI: 0.1134/S0018151X0902014X]

[3] В.В. Милявский, В.Е. Фортов, А.А. Фролова, К.В. Хищенко, А.А. Чарахчьян, Л.В. Шуршалов. ЖВММФ, **46** (5), 913 (2006). [V.V. Milyavskii, V.E. Fortov, A.A. Frolova, K.V. Khishchenko, A.A. Charakhch'yan, L.V. Shurshalov. Comput. Math. Math. Phys., **46** (5), 873 (2006). DOI: 10.1134/S0965542506050113]

[4] Р.К. Бельхеева. ТВТ, **59** (4), 514 (2021). [R.K. Belkheeva. High Temp., **60** (1), 26 (2022). DOI: 10.1134/S0018151X21040040]

[5] В.М. Фомин, А.И. Гулидов, Г.А. Сапожников, И.И. Шабалин, В.А. Бабаков, В.Ф. Куропатенко, А.Б. Киселев, Ю.А. Тришин, А.И. Садырин, С.П. Киселев, И.Ф. Головнев. *Высокоскоростное взаимодействие тел* (Изд-во СО РАН, Новосибирск, 1999)

[6] И.В. Ломоносов, С.В. Фортова. ТВТ, **55** (4), 596 (2017). [I.V. Lomonosov, S.V. Fortova. High Temp., **55** (4), 585 (2017). DOI: 10.1134/S0018151X17040113]

[7] I.V. Lomonosov. Laser Part. Beams, **25** (4), 567 (2007). DOI: 10.7868/S0040364417040111
[8] Д.Г. Гордеев, Л.Ф. Гударенко, М.В. Жерноклетов, В.Г. Куделькин, М.А. Мочалов. ФГВ, **44** (2), 61 (2008).
[9] Д.Г. Гордеев, Л.Ф. Гударенко, А.А. Каякин, В.Г. Куделькин. ФГВ, **49** (1), 106 (2013).
[10] С.А. Кинеловский, К.К. Маевский. ТВТ, **52** (6), 843 (2014). DOI: 10.7868/S0040364414050081 [S.A. Kinelovskii, K.K. Maevskii. High Temp., **52** (36), 821 (2014). DOI: 10.1134/S0018151X14050083]
[11] N.Yu. Orlov, M.A. Kadatskiy, O.B. Denisov, K.V. Khishchenko. Matter Radiat. Extremes, **4** (5), 054403 (2019). DOI: 10.1063/1.5096439
[12] С.Д. Гилёв. ТВТ, **58** (2), 179 (2020). DOI: 10.31857/S0040364420020076 [S.D. Gilev. High Temp., **58** (2), 166 (2020). DOI: 10.1134/S0018151X20020078]
[13] К.В. Хищенко. ТВТ, **61** (3), 433 (2023). DOI: 10/31857/S0040364423030134. [K.V. Khishchenko. High Temp., **61** (3), 440 (2023). DOI: 10.1134/S0018151X23030227]
[14] А.В. Бушман, В.Е. Фортов. УФН, **140** (2), 177 (1983). [A.V. Bushman, V.E. Fortov. Phys. Usp., **26** (6), 465 (1983). DOI: 10.1070/PU1983v026n06ABEH004419]
[15] В.К. Копышев, А.Б. Медведев. В сб.: *Высокие плотности энергии* (РФЯЦ–ВНИИЭФ, Саров, 1997)
[16] Л.П. Орленко. *Физика взрыва и удара* (Физматлит, М., 2008)
[17] Р.Ф. Трунин. *Исследования экстремальных состояний конденсированных веществ методом ударных волн. Уравнения Гюгонио* (РФЯЦ–ВНИИЭФ, Саров, 2006)
[18] Д.Н. Николаев, А.А. Пяллинг, К.В. Хищенко, В.Я. Терновой, В.Е. Фортов. Хим. физика, **19** (10), 98 (2000).
[19] Р.К. Бельхеева. ТВТ, **53** (3), 363 (2015). DOI: 10.7868/S0040364415020052 [R.K. Belkheeva. High Temp., **53** (3), 348 (2015). DOI: 10.1134/S0018151X15020054]
[20] K.V. Khishchenko. Energies, **15** (19), 7067 (2022).
[21] С.Д. Гилёв. ФГВ, **58** (2), 109 (2022).
[23] K.V. Khishchenko. Phys. Wave Phenom., **31** (2), 123 (2023).
[24] K.V. Khishchenko. Phys. Wave Phenom., **31** (4), 273 (2023).
[25] И.В. Ломоносов. ТВТ, **61** (3), 473 (2023). [I.V. Lomonosov. High Temp., **61** (3), 436 (2023).]
[26] А.Ю. Семенов, С.А. Абросимов, И.А. Стучебрюхов, К.В. Хищенко. ТВТ, **61** (4), 542 (2023). DOI: 10.31857/S0040364423040130 [A.Yu. Semenov, S.A. Abrosimov, I.A. Stuchebryukhov, K.V. Khishchenko. High Temp., **61** (4), 502 (2023).]
[27] Р.К. Бельхеева. ТВТ, **61** (5), 693 (2023).
[28] К.В. Хищенко. ТВТ, **61** (5), 783 (2023). [K.V. Khishchenko. High Temp., **61** (5), 720 (2023).]
[29] К.В. Хищенко. ТВТ, **62** (2), 177 (2024).
[30] Р.К. Бельхеева. ПМТФ, **53** (4), 3 (2012).
[31] Р.К. Бельхеева. ПМТФ, **48** (5), 53 (2007).
[32] В.Д. Урлин. ЖЭТФ, **49** (2), 485 (1965).
[33] A.V. Bushman, V.E. Fortov, G.I. Kanel, A.L. Ni. *Intense Dynamic Loading of Condensed Matter* (Taylor & Francis, Washington, 1993)
[34] P.R. Levashov, V.E. Fortov, K.V. Khishchenko, I.V. Lomonosov. AIP Conf. Proc., **505**, 89 (2000).
[35] M.E. Povarnitsyn, K.V. Khishchenko, P.R. Levashov. Int. J. Impact Eng., **35**, 1723 (2008).
[36] V.I. Oreshkin, R.B. Baksht, N.A. Ratakhin, A.V. Shishlov, K.V. Khishchenko, P.R. Levashov, I.I. Beilis. Phys. Plasmas, **11** (10), 4771 (2004).
[37] M.E. Povarnitsyn, K.V. Khishchenko, P.R. Levashov. Int. J. Impact Eng., **33**, 625 (2006).
[38] Р.И. Нигматулин. *Основы механики гетерогенных сред* (Наука, М., 1978)
[39] Г.М. Ляхов. *Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах* (Недра, М., 1974)
[40] С.З. Дунин, В.В. Сурков. ПМТФ, 5, 106 (1979).
[41] А.А. Чарахчьян, И.В. Ломоносов, В.В. Милявский, В.Е. Фортов, А.А. Фролова, К.В. Хищенко, Л.В. Шуршалов. Письма в ЖТФ, **30** (1), 72 (2004).
[42] Р.Ф. Трунин, Н.В. Панов, А.Б. Медведев. Хим. физика, **14** (2–3), 97 (1995).
[43] Л.В. Альтшулер, С.Б. Кормер, А.А. Баканова, Р.Ф. Трунин. ЖЭТФ, **38** (3), 790 (1960).
[44] С.Б. Кормер, А.И. Фунтиков, В.Д. Урлин, А.Н. Колесникова. ЖЭТФ, **42** (3), 686 (1962).
[45] Р.Ф. Трунин, М.А. Подурец, Г.В. Симаков, Л.В. Попов, А.Г. Севастьянов. ЖЭТФ, **108** (3), 851 (1995).
[46] В.А. Симоненко, Н.В. Волошин, А.С. Владимиров, А.П. Нагибин, В.Н. Ногин, В.А. Попов, В.А. Сальников, Ю.А. Шойдин. ЖЭТФ, **88** (4), 1452 (1985).
[47] Н.Н. Калиткин, Л.В. Кузьмина, А.И. Фунтиков. Математическое моделирование, **14** (10), 27 (2002).
[48] T. Neal. J. Appl. Phys., **46**, 2521 (1975).
[49] Л.В. Альтшулер, С.Б. Кормер, М.И. Бражник, Л.А. Владимиров, М.П. Сперанская, А.И. Фунтиков. ЖЭТФ, **38** (4), 1061 (1960).
[50] R.G. McQueen, J.N. Fritz, C.E. Morris. *The velocity of sound behind strong shock waves* in 2024 Al. In: Shock Waves in Condensed Matter — 83. Eds. J.R. Asay, R.A. Graham, G.K. Straub (North Holland, Amsterdam, 1984), p. 95–98.
[51] Л.В. Альтшулер, А.П. Петрунин. ЖЭТФ, **31** (6), 717 (1961).
[52] М.А. Подурец, Г.В. Симаков, Р.Ф. Трунин. Изв. АН СССР. Физика Земли, **4**, 30 (1990).
[53] W.J. Nellis, A.C. Mitchell, D.A. Young. J. Appl. Phys., **93** (1), 304 (2003).
[54] van Thiel M. (ed.). *Compendium of Shock Wave Data. Lawrence Livermore Laboratory Report* UCRL-50108 (Livermore, 1977), p. 87.
[55] А.А. Баканова, И.П. Дудоладов, Ю.Н. Сутулов. ПМТФ, 2, 117 (1974).
[56] Р.Ф. Трунин, Г.В. Симаков, Н.В. Панов. ТВТ, **39** (3), 430 (2001).
[57] М.В. Жерноклетов, Г.В. Симаков, Ю.Н. Сутулов, Р.Ф. Трунин. ТВТ, **33** (1), 40 (1995). [High Temp., **33** (1), 36 (1995).]
[58] А.А. Баканова, И.П. Дудоладов, М.В. Жерноклетов, В.Н. Зубарев, Г.В. Симаков. ПМТФ, 2, 76 (1983).
[59] Б.Л. Глушак, А.П. Жарков, М.В. Жерноклетов, В.Я. Терновой, А.С. Филимонов, В.Е. Фортов. ЖЭТФ, **96** (4), 1301 (1989).
[60] К.А. Боярских, К.В. Хищенко. ТВТ, **63**, 1 (2025).
[61] K.A. Boyarskikh, K.V. Khishchenko. Bull. Russ. Acad. Sci.: Phys., **88** (9), 1446 (2024).
[62] В.В. Поляков, Е.А. Щеглов. ПМТФ, 5, 122 (1979).
[63] Р.Ф. Трунин. В сб. *Физика и техника высоких плотностей энергии*, под ред. Р.И. Илькаева и др. (РФЯЦ–ВНИИЭФ, Саров, 2011)
[64] B. Jodar, G. Seisson, D. Hebert, I. Bertron, M. Boustie, L. Berthe. J. Phys. D: Appl. Phys., **49** (32), 325301 (2016). DOI: 10.1088/0022-3727/49/32/325301