

03

Численное исследование влияния тангенциальной инъекции гелия на линейную устойчивость сжимаемого пограничного слоя на плоской пластине

© И.С. Матвеев, С.О. Морозов, С.В. Лукашевич, А.Н. Шиплюк

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: i.matveev@g.nsu.ru

Поступило в Редакцию 12 декабря 2024 г.
В окончательной редакции 24 марта 2025 г.
Принято к публикации 24 марта 2025 г.

Проведено численное исследование влияния тангенциальной инъекции гелия на развитие возмущений в сжимаемом пограничном слое. Рассмотрены различные конфигурации одиночного канала для инъекции. Расчеты пограничного слоя выполнены в рамках уравнений Навье-Стокса в двумерной плоской постановке для сжимаемых течений. Расчеты устойчивости пограничного слоя проведены в рамках линейной теории устойчивости в локально-параллельном приближении с учетом бинарной смеси газов. Показано, что независимо от конфигурации одиночного канала введение гелия в пограничный слой стабилизирует возмущения второй моды и дестабилизирует возмущения первой моды в области, близкой к месту инъекции, однако на достаточном удалении от места инъекции газа степени роста двумерных возмущений первой и второй мод Мэка меньше, чем в случае без инъекции. Также показано, что при неизменном массовом расходе геометрия канала в основном влияет на устойчивость пограничного слоя только в области инъекции гелия. Увеличение высоты канала приводит к увеличению степеней роста двумерных возмущений второй моды и уменьшению степеней роста двумерных возмущений первой моды.

Ключевые слова: пограничный слой, линейная теория устойчивости, первая мода Мэка, вторая мода Мэка, стабилизация пограничного слоя.

DOI: 10.61011/JTF.2025.07.60647.456-24

Введение

Известно, что в зависимости от шероховатости поверхности и уровня возмущений набегающего потока сценарии ламинарно-турбулентного перехода пограничного слоя могут отличаться. Один из сценариев описывает развитие возмущений в сверхзвуковом пограничном слое при необходимой малости возмущений и шероховатости поверхности [1]. Указанный сценарий перехода состоит из фазы восприимчивости, линейной и нелинейной фазы развития возмущений в пограничном слое. В настоящей работе рассматривается линейная фаза развития возмущений. Как показано в работах [2,3], в линейной стадии наиболее нарастающими возмущениями в двумерном сжимаемом пограничном слое являются возмущения первой и второй моды по классификации Мэка. Способы стабилизации возмущений первой и второй мод существенно отличаются [3,4].

Для стабилизации первой моды можно использовать поверхностный массообмен [5], сублимирующие покрытия [6], охлаждение поверхности [3] или инъекцию тяжелого газа в пограничный слой [7]. Для стабилизации второй моды возмущений используют пористые покрытия [8–10], волнистые поверхности [11,12], нагрев поверхности в области нарастания возмущений [13], локальный нагрев или охлаждение до области нарастания возмущений [14], поверхностный локальный массооб-

мен [15], а также инъекцию легкого газа [16,17]. В [18] исследовано три способа выдува газа в пограничный слой: через систему прорезей, расположенных под углом к поверхности, через пористую поверхность и через перфорированную вставку. Показано, что все три способа эффективно уменьшают скорость роста возмущений первой моды в пограничном слое при инъекции тяжелого газа.

Целью настоящей работы является исследование влияния инъекции гелия через одиночный канал на устойчивость пограничного слоя на плоской пластине при числе Маха, равном 4.

1. Методика расчета

Моделирование течения проходит в программе AnsysFluent. Проводимые исследования опираются на метод численного моделирования в рамках уравнений Навье-Стокса в двумерной плоской постановке для сжимаемых течений. Решается стационарная задача для ламинарного потока двухкомпонентного газа (воздух+гелий). На рис. 1 схематично изображена расчетная область. На нижней границе 1 задается стенка с условием прилипания и постоянной температурой. На входе основного потока воздуха (границы 2 и 3) задается граничное условие „pressure-far-field“ с числом Маха 4. Число

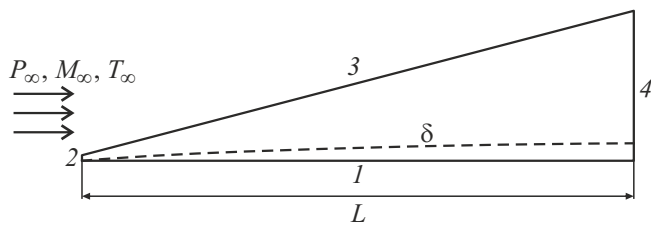


Рис. 1. Схематическое изображение расчетной области: 1 — поверхность, 2, 3 — входная граница, 4 — выходная граница, δ — граница пограничного слоя.

Рэйнольдса по длине пластины составляет $Re_L = 2 \cdot 10^6$. Температурный фактор $\frac{T_w^*}{T_0^*} = 0.8$, где T_w^* — температура поверхности, T_0^* — температура торможения. Температура набегающего потока — 70 К. На границе 4 задается граничное условие „pressure-outlet“. На входе канала для инжекции (граница 5 на рис. 2) ставится граничное условие „mass-flow-inlet“ с постоянным массовым расходом гелия. Параметры воздуха определяются по следующим законам: теплопроводность по кинетической теории, вязкость по закону Сазерленда. Теплопроводность и вязкость гелия определяются по кинетической теории. Расчет теплопроводности и вязкости двухкомпонентной смеси газов проходит по закону смешения идеального газа. В таких же приближениях для бинарной смеси газов проведены численные исследования в [7,18], где об этом описано более подробно.

Расчеты устойчивости пограничного слоя проведены в рамках линейной теории устойчивости в локально-параллельном приближении с учетом бинарной смеси газов, как в [7,18]. Задача на собственные значения решалась методом коллокаций [19,20].

Результаты численного исследования, представленные ниже, приведены в безразмерном виде. Плотность ρ^* и продольная скорость U^* нормируются на соответствующие параметры набегающего потока ρ_∞^* и U_∞^* . Безразмерная продольная координата определена, как $x = x^*/L^*$, где x^* — размерная координата, L^* — длина пластины, безразмерная нормальная к поверхности координата — $y(x) = y^*/\delta^*(x)$, где y^* — размерная координата, $\delta^*(x)$ — толщина пограничного слоя, зависящая от продольной координаты x . Степень роста — α_i и частота ω возмущений нормируются следующим образом: $-\alpha_i = -\alpha_i^* L^*$ и $\omega = 2\pi f^* \delta^*/U_\infty^*$, где α_i^* — размерная степень роста по продольной координате x , а f^* — размерная частота возмущений. Граница пограничного слоя δ^* определялась координатой, при которой параметр $\rho^* \frac{dU^*}{dy^*}$ составлял 1% от максимального значения.

Исследуемая модель представляет собой плоскую пластину, расположенную под нулевым углом атаки. Для лучшей сходимости решения двумерной задачи со стационарным пограничным слоем двухкомпонентной смеси инжекция гелия проводится через удлиненный канал, так, чтобы граничное условие „mass-flow-inlet“ находилось вне зоны взаимодействия с основным

поток (рис. 2). Рассмотрено расположение канала для инжекции параллельно пластине (рис. 2, а) и под углом 15° рис. 2, б). Кромка канала для инжекции газа расположена на расстоянии $x = 0.15$ от передней кромки пластины. Безразмерная высота канала составляет $h = h^*/\delta_{0.15}^* = 0.08, 0.15, 0.3$, где $\delta_{0.15}^*$ — толщина пограничного слоя на плоской пластине без канала для инжекции (базовый случай) при $x = 0.15$. Безразмерная высота кромки канала d неизменна и равна $d^*/\delta_{0.15}^* = 0.1$. Высота канала, расположенного под углом, составляет $h = 0.15$. В случае угловой конфигурации обратного уступа нет, в отличие от конфигурации с параллельным каналом. Исследования проведены для нормированного массового расхода гелия q в диапазоне от $4 \cdot 10^{-3}$ до $16 \cdot 10^{-3}$. Нормировка проводится на величину массового расхода воздуха, проходящего через сечение пограничного слоя при $x = 0.15$. Температура вдуваемого газа равна температуре поверхности.

Для проведения расчета построена структурированная двумерная сетка. Расчетная сетка состоит из двух подобластей: зона основного потока и зона пограничного слоя. Штриховая линия на рис. 1 является верхней границей пограничного слоя (δ). В пограничном слое ячейки сетки расположены ортогонально к поверхности. Число ячеек на толщину пограничного слоя остается неизменным вдоль пластины. С целью уменьшения численных осцилляций, ячейки сетки в верхней части расчетной

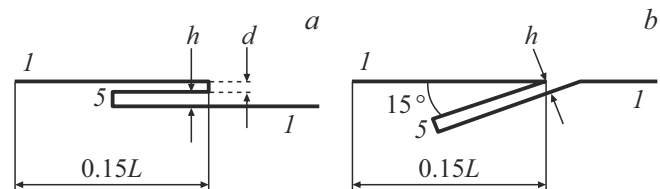


Рис. 2. Схематическое изображение исследуемой модели в области инжекции газа с параллельным пластине каналом (а) и под углом 15° (б). 1 — поверхность, 5 — вход канала для инжекции.

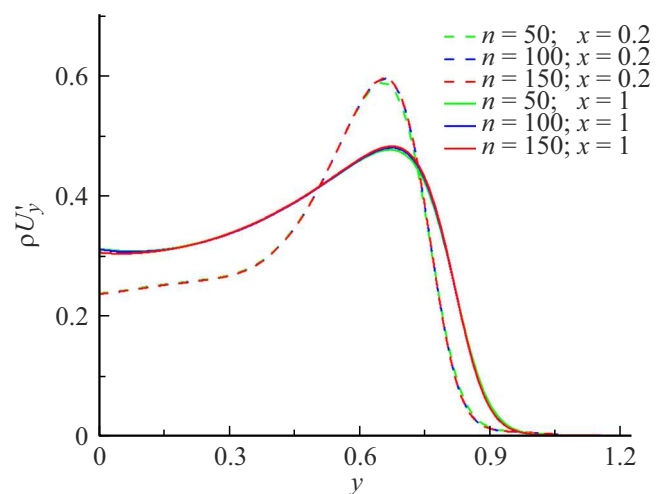


Рис. 3. Зависимость параметра $\rho \frac{du}{dy}$ от нормальной к поверхности координаты y при канале, параллельном пластине высотой $h = 0.15$ и при массовом расходе гелия $q = 8 \cdot 10^{-3}$.

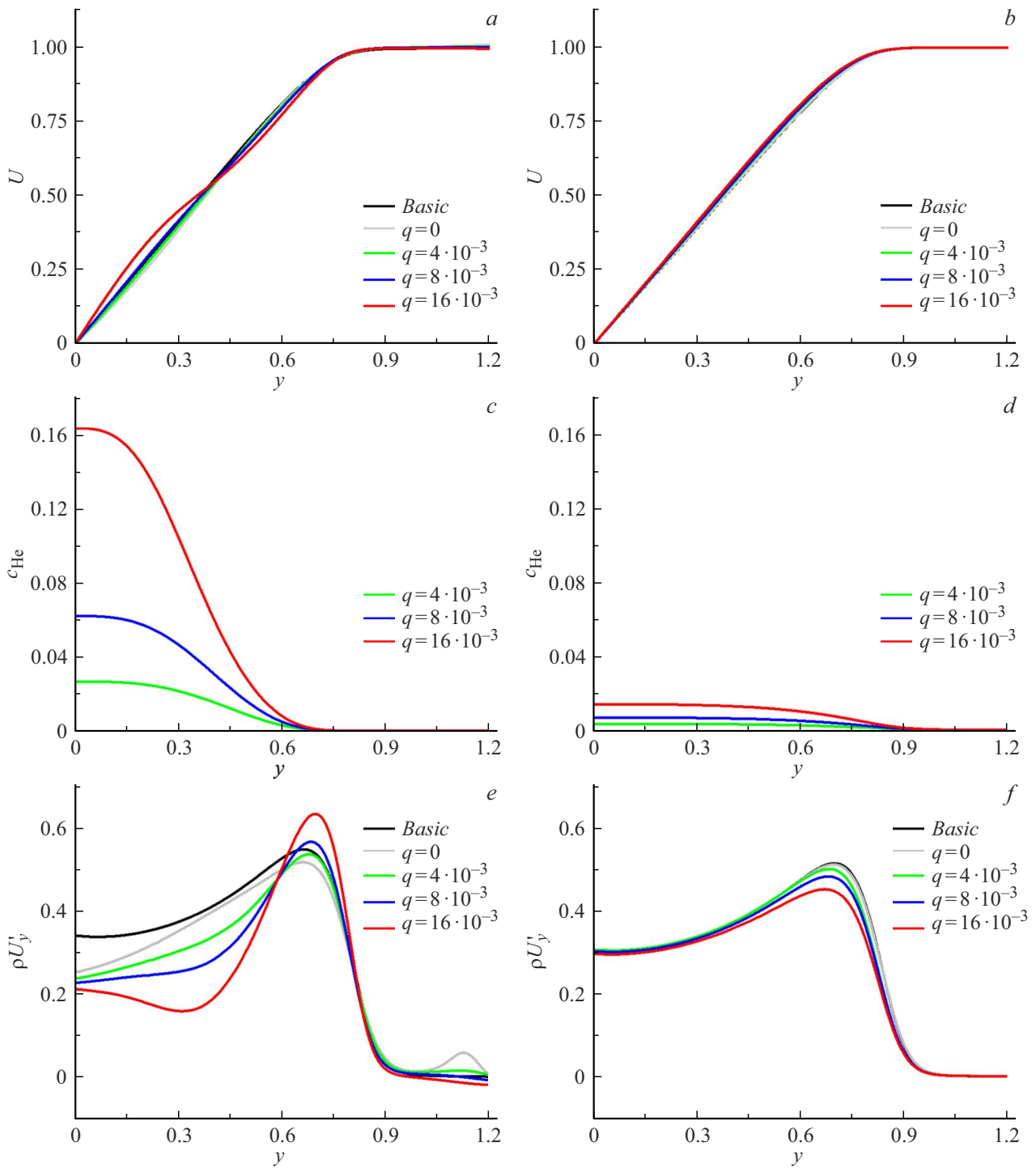


Рис. 4. Профили скорости (a,b), массовой доли гелия (c,d) и параметра $\rho \frac{dU}{dy}$ (e,f) в пограничном слое для параллельного пластине канала высотой $h = 0.15$ при $x = 0.2$ (a,c,e) и $x = 1$ (b,d,f).

области располагаются вдоль скачка уплотнения. Для этого положение скачка уплотнения определяется из предварительных расчетов. Верхняя граница расчетной области Z строится параллельно скачку выше по потоку. Сетка сгущается к передней кромке пластины, к каналу для инъекции газа, к скачку и к верхней границе пограничного слоя по монотонному рациональному квадра-

тичному сплайну (MRQS), который позволяет создавать плавное распределение точек сетки с гарантией монотонности данного распределения [21].

Проведено исследование сходимости по сеткам. Исследование сходимости проходит по параметру $\rho \frac{dU}{dy}$, по данному параметру можно судить о наличии неустойчивости в пограничном слое. На рис. 3 показана сеточная

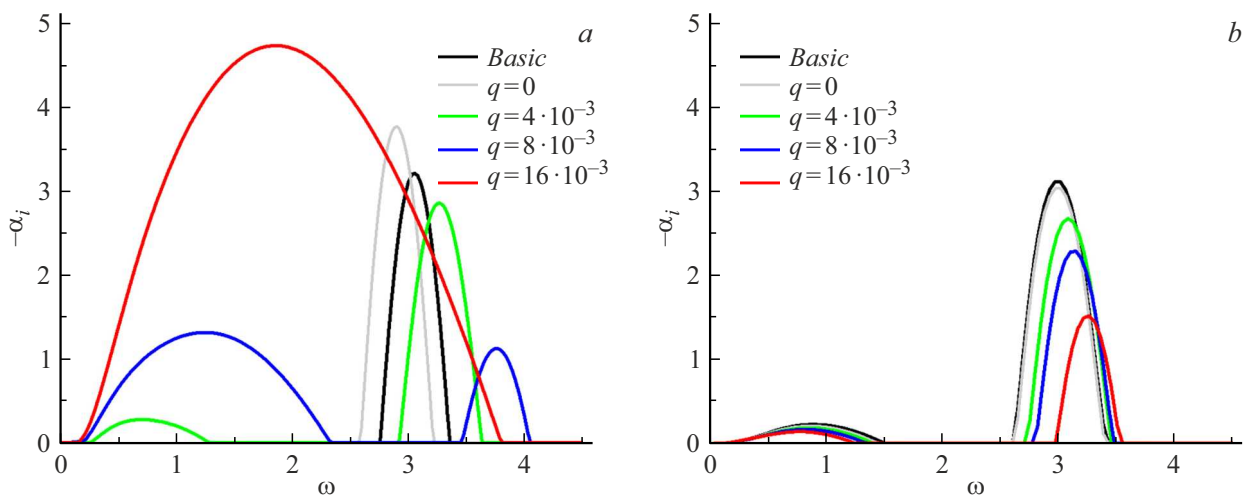


Рис. 5. Зависимость степеней роста от частоты возмущений для параллельного пластине канала высотой $h = 0.15$ при $x = 0.2$ (а) и $x = 1$ (б).

сходимость на примере пограничного слоя в случае с параллельной инъекцией через канал высотой $h = 0.15$ при $q = 8 \cdot 10^{-3}$. Число ячеек на пограничный слой составляет $n = 50, 100, 150$. Максимальное относительное отклонение параметра $\rho \frac{dU}{dy}$ между всеми рассмотренными случаями составляет 1.4%. Дальнейшие исследования проведены на расчетной сетке с $n = 100$.

2. Результаты

Проведено моделирование стационарного сверхзвукового обтекания плоской пластины под нулевым углом атаки с инъекцией гелия в пограничный слой в диапазоне массовых расходов от $4 \cdot 10^{-3}$ до $16 \cdot 10^{-3}$. На рис. 4 показаны безразмерные профили скорости U (а, б), массовой доли гелия c_{He} (с, д) и параметра $\rho \frac{dU}{dy}$ (е, ф) в пограничном слое при $x = 0.2$ (а, с, е) и $x = 1$ (б, д, ф) для различных значений массового расхода вдуваемого гелия. Результаты приведены для параллельного пластине канала с высотой $h = 0.15$. Диапазон массовых расходов ограничивается значением $q = 16 \cdot 10^{-3}$, так как при $q \geq 16 \cdot 10^{-3}$ профиль скорости пограничного слоя в области инъекции гелия искажается (рис. 4, а), а также появляется дополнительная точка перегиба на профиле $\rho \frac{dU}{dy}$ (рис. 4, е), что сказывается на устойчивости пограничного слоя. При $q \geq 16 \cdot 10^{-3}$ скорость подаваемого гелия на выходе из канала становится больше скорости набегающего потока и локальной скорости звука. При $x = 1$ и $q = 16 \cdot 10^{-3}$ профиль скорости пограничного слоя выравнивается и имеет относительно небольшую разницу с профилями при $q = (4, 8) \cdot 10^{-3}$ (рис. 4, б). Профили пограничного слоя при $x = 1$ по параметру $\rho \frac{dU}{dy}$ качественно похожи, однако различие их максимумов достигает 14.4% (рис. 4, ф). Также на рис. 4, е при координате $y > 1$ наблюдаются искажения параметра $\rho \frac{dU}{dy}$; данные искажения обуславливаются скачком уплотнения, создаваемым

каналом для инъекции. На рис. 4, с, д показаны профили концентрации гелия. Видно, что при $x = 0.2$ основная доля гелия содержится в нижней половине пограничного слоя $y < 0.5$, тогда как при $x = 1$ гелий практически равномерно распределен по всему пограничному слою. Для определения влияния уступа проведен расчет пограничного слоя в отсутствии инъекции гелия ($q = 0$). Показано, что при $x = 0.2$ профили скорости U (рис. 4, а) и параметра $\rho \frac{dU}{dy}$ (рис. 4, е) достаточно сильно искажаются относительно базового случая (без канала). При $x = 1$ влияние уступа на профили и на размерную толщину δ^* пограничного слоя мало.

Используя полученные результаты численного моделирования стационарного пограничного слоя, рассчитаны степени роста нарастающих двумерных возмущений в рамках линейной теории устойчивости в сечениях $x = 0.2$ (рис. 5, а) и $x = 1$ (рис. 5, б) для различных значений массового расхода вдуваемого гелия. Зависимости степеней роста от частоты возмущений показаны для конфигурации с параллельным пластине каналом для инъекции газа высотой $h = 0.15$. Из рис. 5, а видно, что в области инъекции гелия степени роста второй моды становятся меньше, чем в случае без инъекции, а для первой моды — больше. При увеличении массового расхода степени роста второй моды уменьшаются, а степени роста первой моды увеличиваются. При массовом расходе $q = 16 \cdot 10^{-3}$ нарастающих возмущений, соответствующих второй моде, не наблюдается. Увеличение массового расхода гелия приводит к росту первой моды. При $q = 16 \cdot 10^{-3}$ первая мода возмущений начинает доминировать над второй, а диапазон частот увеличивается и захватывает частоты, характерные для второй моды возмущений. Далее вниз по потоку при увеличении массового расхода гелия уменьшаются степени роста не только второй моды, но и первой. Также по рис. 5 видно, что при увеличении массового расхода область нарастающих возмущений второй моды сдвигается в сторону

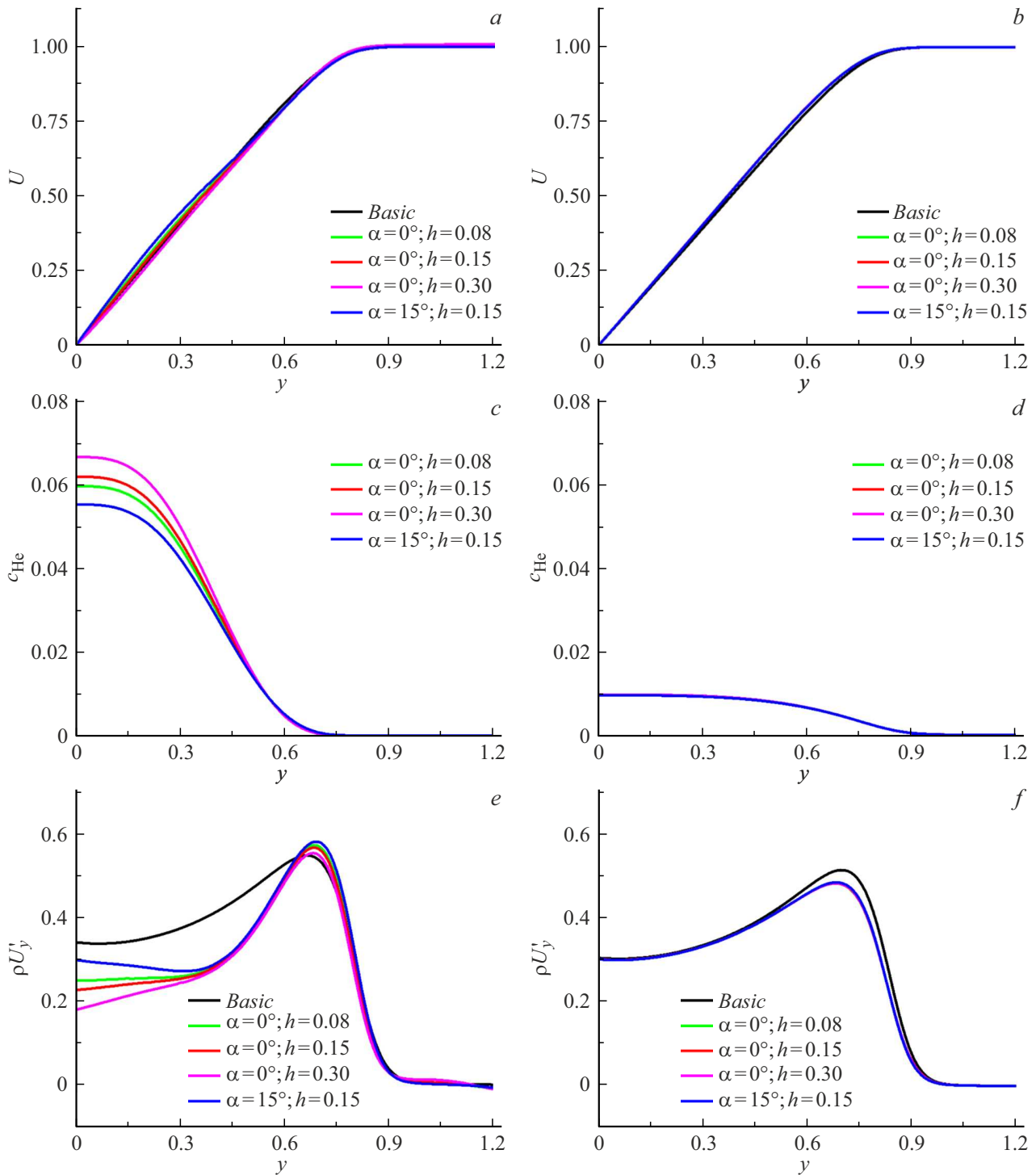


Рис. 6. Зависимость скорости (*a, b*), массовой доли гелия (*c, d*) и параметра $\rho \frac{dU}{dy}$ (*e, f*) от нормальной к поверхности координаты *y* при $x = 0.2$ (*a, c, e*) и $x = 1$ (*b, d, f*) для $q = 8 \cdot 10^{-3}$.

больших частот. В отсутствии инъекции ($q = 0$) наличие уступа от канала приводит к увеличению степеней роста второй моды возмущений при $x = 0.2$ по сравнению с базовым случаем и практически не влияет на степени роста при $x = 1$.

На рис. 6 показаны безразмерные профили скорости U (*a, b*), массовой доли гелия c_{He} (*c, d*) и параметра $\rho \frac{dU}{dy}$

(*e, f*) в пограничном слое при $x = 0.2$ (*a, c, e*) и $x = 1$ (*b, d, f*) для различных конфигураций инжектируемого канала. Результаты расчетов приведены для массового расхода гелия $q = 8 \cdot 10^{-3}$. На рис. 6, *a* видно, что в области, близкой к каналу при $x = 0.2$, расположенному под углом, профиль пограничного слоя искажается относительно других геометрий, так как скорость инъекции

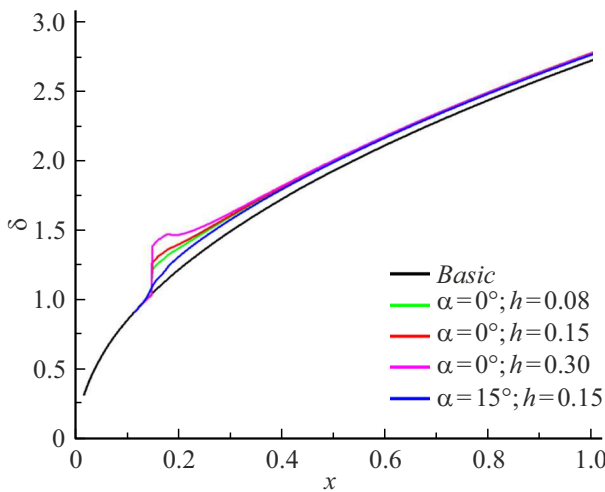


Рис. 7. Зависимость толщины пограничного слоя δ от продольной координаты x для различных конфигураций канала для $q = 8 \cdot 10^{-3}$.

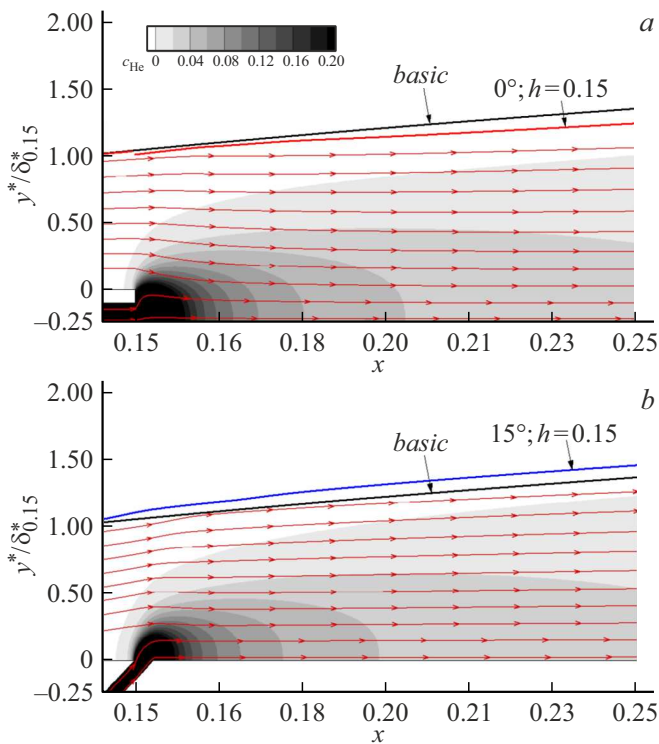


Рис. 8. Контуры концентрации гелия в области инъекции. Линии со стрелочками — линии тока, сплошные линии — граница пограничного слоя для базового случая и для случая с инъекцией; *a* — параллельная инъекция с $h = 0.15$, *b* — инъекция под углом 15° с $h = 0.15$.

гелия имеет бóльшую нормальную компоненту, чем для параллельной инъекции. Также из рис. 6, *e* видно, что геометрия канала в большей степени влияет на профиль пограничного слоя при $y < 0.4$. При увеличении высоты канала h концентрация гелия c_{He} у поверхности растёт

(рис. 6, *c*). На достаточном удалении от места инъекции геометрия канала слабо влияет на профиль пограничного слоя, поэтому графики практически сливаются в одну линию. Это можно увидеть по рис. 6, *b, d, f*) для $x = 1$. Так, видно, что гелий по пограничному слою распределён практически одинаково при всех исследуемых геометриях (рис. 6, *d*).

На рис. 7 показана зависимость безразмерной толщины пограничного слоя $\delta = \delta^*/\delta_{0.15}^*$ от продольной координаты x для случаев, показанных на рис. 6. Так как при параллельной инъекции есть уступ, толщина пограничного слоя отсчитывается от новой поверхности, и на рис. 7 около $x = 0.15$ происходит резкое увеличение толщины пограничного слоя. В случае с инъекцией под углом уступа нет, а толщина пограничного слоя начинает отличаться от случая без инъекции выше по потоку от кромки инжектирующего канала (рис. 2), что обуславливается положительным градиентом давления в данной области. Видно, что основной вклад в увеличение толщины пограничного слоя для случая параллельной инъекции даёт наличие уступа. Влияние геометрии канала на пограничный слой уменьшается вниз по потоку, и при $x > 0.4$ различия в толщине пограничного слоя менее 1% при фиксированном массовом расходе гелия. Стоит отметить, что данная координата соответствует $60\delta_{0.15}^*$, поэтому стоило ожидать такого эффекта от каналов, размер которых меньше толщины пограничного слоя.

На рис. 8 изображены контуры концентрации гелия в области, близкой к каналу инъекции, для случая параллельной инъекции с каналом $h = 0.15$ (рис. 8, *a*) и для случая с угловой инъекцией (рис. 8, *b*) при $q = 8 \cdot 10^{-3}$. Линии со стрелочками обозначают линии тока, сплошные линии — граница пограничного слоя для базового случая и для случая с инъекцией. Видно, что инъекция гелия при $q = 8 \cdot 10^{-3}$ смещает физическое положение границы пограничного слоя не более чем на 6%. Линии тока при параллельной инъекции (рис. 8, *a*) после кромки канала при $x = 0.15$ направлены к поверхности, а далее их направление плавно переходит к направлению, типичному для пограничного слоя на плоской пластине. Для угловой конфигурации инъекция приводит к увеличению угла наклона линий тока относительно поверхности в области инъекции. В целом видно, что инъекция в исследуемом диапазоне расходов слабо деформирует профили скорости, а изменения в основном касаются плотности, вязкости, теплопроводности и теплоемкости из-за значительной разницы в молярной массе воздуха и гелия.

Также по результатам численного моделирования стационарного пограничного слоя в рамках линейной теории устойчивости получены степени роста $-\alpha_i$ нарастающих двумерных возмущений при $x = 0.2$ (рис. 9, *a*) и $x = 1$ (рис. 9, *b*) при массовом расходе гелия $q = 8 \cdot 10^{-3}$ для различных конфигураций каналов. Из рис. 9, *a* видно, что конфигурация с каналом, расположенным под углом 15° и высотой $h = 0.15$, почти полностью подавляет

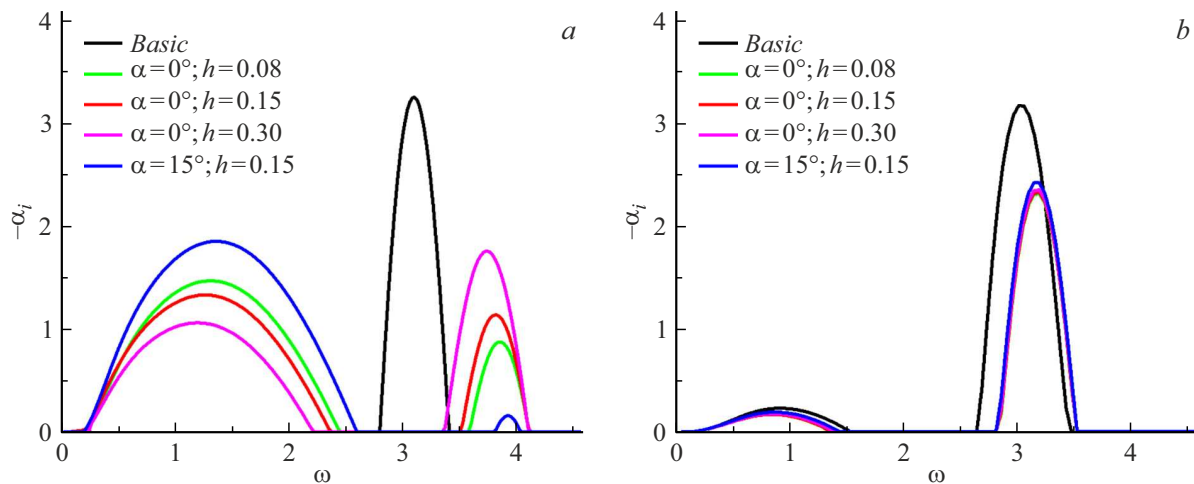


Рис. 9. Зависимость степеней роста от частоты при массовом расходе $q = 8 \cdot 10^{-3}$ для $x = 0.2$ (a) и $x = 1$ (b).

вторую моду нарастающих возмущений при $x = 0.2$ (до 95%), однако значительно дестабилизирует первую моду относительно других геометрий. Из рис. 9, a видно, что, изменяя высоту канала, можно варьировать степени роста возмущений первой и второй моды. Существенная разница в степенях роста для углового канала со случаем параллельного канала может быть связана с наличием обратного уступа в последнем случае. Как было показано на рис. 5, a, наличие уступа без инъекции гелия приводит к существенному увеличению степеней роста второй моды, а в присутствии гелия степени роста становятся меньше, чем в базовом случае. Таким образом, при $x = 0.2$ инъекция гелия при параллельном расположении канала влияет на искаженный уступом пограничный слой и, возможно, это привело к значительной разнице в степенях роста со случаем угловой инъекции.

Степени роста второй моды возмущений прямо пропорциональны высоте канала для инъекции гелия. При $x = 1$, из-за малого различия профилей пограничного слоя при различных конфигурациях (рис. 6), степени роста возмущений также слабо различаются. Относительное изменение составляет менее 5%.

Как известно, для возмущений первой моды Мэка степени роста трехмерных возмущений больше, чем двумерных, для пограничного слоя на плоской пластине. При проведении данного исследования было обнаружено, что качественно влияние инъекции гелия и геометрии канала оказывается таким же, как в случае для двумерных возмущений. Увеличение массового расхода гелия или уменьшение высоты канала дестабилизирует возмущения первой моды в области инъекции газа и стабилизирует возмущения первой моды на достаточном удалении от канала для инъекции.

Заключение

Проведены численные исследование влияния инъекции гелия через одиночный канал на устойчивость

пограничного слоя на плоской пластине при числе Маха, равном 4. Рассмотрено влияние массового расхода и геометрии одиночного канала для тангенциальной инъекции гелия на двумерные возмущения первой и второй мод Мэка в рамках линейной теории устойчивости.

Показано, что инъекция гелия через одиночный канал стабилизирует двумерные возмущения первой и второй моды на достаточном удалении от места инъекции, и данный эффект усиливается с увеличением массового расхода газа. Однако в области, близкой к каналу, увеличение массового расхода гелия дестабилизирует возмущения первой моды. Степени роста второй моды возмущений в области инъекции уменьшаются при уменьшении высоты канала и увеличиваются для первой моды. Изменяя высоту канала, можно достичь эффекта, при котором степени роста двумерных возмущений первой и второй моды в области инъекции не будут превышать степени роста возмущений в случае без инъекции. Показано, что на достаточном удалении от места инъекции геометрия канала слабо влияет на профиль пограничного слоя, вследствие чего степени роста возмущений слабо различаются.

Финансирование работы

Работа выполнена в рамках государственного задания ИТПМ СО РАН (№ гос. регистрации: 124020900037-2).

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] M.V. Morkovin, E. Reshotko, T. Herbert. Bull. APS, **39** (9), 1 (1994).
- [2] L.M. Mack. AIAA J., **13** (3), 278 (1975). DOI: 10.2514/3.49693

- [3] С.А. Гапонов, А.А. Маслов. *Развитие возмущений в сжимаемых потоках* (Наука, Новосибирск, 1980)
- [4] A. Fedorov. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **43**, 79 (2011). DOI: 10.1146/annurev-fluid-122109-160750
- [5] С.А. Гапонов, Н.М. Терехова. *Теплофизика и аэромеханика*, **19** (3), 301 (2012). [S.A. Gaponov, N.M. Terekhova. *Thermophys. Aeromechan.*, **19** (2), 209 (2012). DOI: 10.1134/S0869864312020059]
- [6] С.А. Гапонов, Б.В. Смородский. *Теплофизика и аэромеханика*, **27** (2), 213 (2020). [S.A. Gaponov, B.V. Smorodsky. *Thermophys. Aeromechan.*, **27** (2), 205 (2020). DOI: 10.1134/S0869864320020043]
- [7] С.А. Гапонов, Ю.Г. Ермолаев, Н.Н. Зубков, А.Д. Косинов, В.И. Лысенко, Б.В. Смородский, А.А. Яцких. *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, **6**, 61 (2017). DOI: 10.7868/S056852811706007X [S.A. Gaponov, Yu.G. Ermolaev, N.N. Zubkov, A.D. Kosinov, V.I. Lysenko, B.V. Smorodskii, A.A. Yatskikh. *Fluid Dynamics*, **52** (6), 769 (2017). DOI: 10.1134/S0015462817060052]
- [8] В.М. Фомин, А.В. Федоров, В.Ф. Козлов, А.Н. Шиплюк, А.А. Маслов, Е.В. Буров, Н.Д. Малмут. *Докл. РАН*, **399** (5), 633 (2004). [V.M. Fomin, F.V. Fedorov, V.F. Kozlov, A.N. Shipliyuk, A.A. Maslov, E.V. Burov, N.D. Malmuth. *Dokl. Phys.*, **49** (12), 763 (2004). DOI: 10.1134/1.1848635]
- [9] С.О. Морозов, С.В. Лукашевич, В.Г. Судаков, А.Н. Шиплюк. *Теплофизика и аэромеханика*, **25** (6), 825 (2018). [S.O. Morozov, S.V. Lukashevich, V.G. Soudakov, A.N. Shipliyuk. *Thermophys. Aeromechan.*, **25** (6), 793 (2018). DOI: 10.1134/S086986431806001X]
- [10] С.В. Лукашевич, С.О. Морозов, А.Н. Шиплюк. *Письма в ЖТФ*, **38** (23), 83 (2012). [S.V. Lukashevich, S.O. Morozov, A.N. Shipliyuk. *Tech. Phys. Lett.*, **38**(12), 1077 (2012). DOI: 10.1134/S1063785012120073]
- [11] Д.А. Бунтин, А.А. Маслов. *Письма в ЖТФ*, **43** (13), 65 (2017). DOI: 10.21883/PJTF.2017.13.44813.16733 [D.A. Bountin, A.A. Maslov. *Tech. Phys. Lett.*, **43** (7), 623 (2017). DOI: 10.1134/S1063785017070021]
- [12] A.V. Fedorov, A.V. Novikov, N.N. Semenov. *Int. J. Fluid Mech. Res.*, **47** (4), 329 (2020). DOI: 10.1615/InterJFluidMechRes.2020033001
- [13] A.V. Fedorov, V. Soudakov, I. Egorov, A.A. Sidorenko, Y.V. Gromyko, D.A. Bountin, P.A. Polivanov, A.A. Maslov. *AIAA J.*, **53** (9), 2512 (2015). DOI: 10.2514/1.J053666
- [14] Д.А. Бунтин, А.А. Маслов, Ю.В. Громыко. *Письма в ЖТФ*, **43** (20), 12 (2017). DOI: 10.21883/PJTF.2017.20.45145.16841 [D.A. Buntin, A.A. Maslov, Y.V. Gromyko. *Tech. Phys. Lett.*, **43** (10), 916 (2017). DOI: 10.1134/S1063785017100194]
- [15] А.В. Новиков, А.О. Образ, Д.А. Тимохин. *Изв. РАН. МЖГ*, **3**, 69 (2023). DOI: 10.31857/S0568528122600588 [A.V. Novikov, A.O. Obraz, D.A. Timokhin. *Fluid Dynam.*, **58**, 232 (2023). DOI: 10.1134/S001546282260184X]
- [16] F. MiróMiró, F. Pinna. *J. Fluid Mech.*, **890**, 1 (2020). DOI: 10.1017/jfm.2020.804
- [17] С.О. Морозов, Б.В. Смородский, А.Н. Шиплюк. *Тез. докл. XVII Всероссийский семинар с международным участием: динамика многофазных сред* (Новосибирск, Россия, 2021), с. 91.
- [18] V.I. Lysenko, S.A. Gaponov, B.A. Smorodsky, Y.G. Ermolaev, A.D. Kosinov. *Phys. Fluids*, **31** (10), 104103 (2019). DOI: 10.1063/1.5112145
- [19] A.V. Boiko, K.V. Demyanko, Y.M. Nechepurenko. *Russ. J. Numerical Analysis and Mathematical Modelling*, **32** (1), 1 (2017). DOI: 10.1515/rnam-2017-0001
- [20] M.R. Malik. *J. Comp. Phys.*, **86** (2), 376 (1990). DOI: 10.1016/0021-9991(90)90106-B
- [21] J. Samareh-Abolhassani, I. Sadrehaghghi, R.E. Smith, S.N. Tiwari. *J. Aircraft*, **27** (10), 873 (1990). DOI: 10.2514/3.45951