

Метод градиентного спуска в задаче о распределении заряда по поверхностям трех concentрических торов

© В.Ю. Сахаров, А.А. Тихонов[¶]

Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия

[¶] e-mail: a.tikhonov@spbu.ru

Поступило в Редакцию 31 июля 2024 г.

В окончательной редакции 20 декабря 2024 г.

Принято к публикации 23 декабря 2024 г.

Рассмотрена система трех круговых concentрических непересекающихся торов. На каждый из торов может быть подан электростатический заряд. Поставлена задача нахождения плотностей распределений зарядов по поверхностям торов с учетом кулонова взаимодействия между поверхностями. Искомые плотности найдены методом последовательных приближений, исходя из того, что в статическом случае в каждой из точек поверхности каждого из торов суммарная касательная напряженность сил Кулона равна нулю. Построен соответствующий функционал, задача численной минимизации которого решена методом градиентного спуска.

Ключевые слова: тор, электростатический заряд, поверхностная плотность, метод градиентного спуска.

DOI: 10.61011/JTF.2025.06.60470.247-24

Введение

В связи с интенсивным изучением и освоением космического пространства, в том числе в условиях увеличения продолжительности пилотируемых полетов, возрастает актуальность проблемы обеспечения радиационной безопасности космических полетов. Очевидна необходимость совершенствования существующих и разработки принципиально новых подходов к обеспечению радиационной защиты обитаемых отсеков и бортовой аппаратуры космических аппаратов от вредного воздействия галактических космических лучей, излучений радиационных поясов Земли, хромосферных вспышек на Солнце и т.д. Одним из таких подходов является создание систем активной защиты, использующих способность электрических и магнитных полей изменять направления движения заряженных частиц и отклонять их от поверхности космических аппаратов [1–4].

Как показывают теоретические и экспериментальные разработки, эти системы выгодно отличаются от традиционно применяемых на практике систем пассивной радиационной защиты, основанной на использовании поглощающих свойств материалов. Активная защита дает значительно более низкий уровень генерации вторичного излучения и обеспечивает значительно большую кратность ослабления излучения на единицу массы. Поэтому она не только позволяет существенно уменьшить общий вес космического аппарата, но и оказывается исключительно эффективной для защиты больших объемов.

Один из наиболее перспективных способов реализации активной радиационной защиты — электростатическая защита (ЭСЗ), основанная на использовании электростатически заряженного экрана, покрывающего

защищаемый объем, обладающего определенным потенциалом относительно окружающей его среды и отклоняющего падающие потоки заряженных частиц от своей поверхности [5,6]. Для реализации защитных экранов предлагалось использовать тонкую металлизированную пленку, натянутую на легкий и прочный каркас сферической или цилиндрической формы [5]. Предлагалась также идея модульной организации экрана ЭСЗ, позволяющего покрыть поверхность космического аппарата достаточно сложной формы [6]. В целом как теоретические исследования, так и результаты экспериментов, выполненных в космическом пространстве на биоспутниках серии „Космос“ (с 605 по 2229) и на космических аппаратах серии „Прогноз“ [6–8], доказали возможность реализации эффективной ЭСЗ при имеющемся уровне развития техники. Установлено, что потребляемая ЭСЗ мощность невелика по сравнению с общим запасом энергоресурсов космического аппарата. Важно также, что эксперименты, выполненные на биоспутнике „Космос“-936, подтвердили возможность работы ЭСЗ в режиме самозарядки [9]. Этот результат свидетельствует о высокой надежности систем ЭСЗ.

Зарубежные исследования, касающиеся разработки систем активной противорадиационной защиты, также уделяют внимание системам ЭСЗ (см., например, обзор [10] и цитируемую в нем литературу). При этом отмечаются возможные трудности практической реализации ЭСЗ. Например, трудности поддержания требуемых высоких электростатических потенциалов, причем в условиях непрерывного потока проводящих частиц плазмы околоземного космического пространства. В некоторых зарубежных работах ЭСЗ даже была отвергнута как неработоспособная. Это, как отмечается в [11], было

основано на ложном предположении о том, что для обеспечения изотропной защиты космического аппарата необходима радиальная симметрия электростатического поля. Показана реализуемость ЭСЗ, набранной из нескольких экранов. Отмечается, что сочетание электрических монополей, диполей, квадруполей и более сложных конструкций позволяет организовать электростатическое поле, эффективно защищающее космический аппарат от ионизирующих излучений. Например, в работе [11] предложена конструкция ЭСЗ, содержащая 18 электростатически заряженных сфер. При этом правильное использование физической асимметрии позволяет отталкивать как электроны, так и положительно заряженные ионы, не создавая чрезмерного вторичного излучения. Для развертывания таких полей не требуются тяжелые конструкции с пассивными экранами или концентрические оболочки зарядов, а предел вакуумного пробоя может быть легко преодолен [11].

Продолжение исследований, направленных на выяснение реализуемости ЭСЗ с точки зрения возможности энергообеспечения на борту космического аппарата, а также на поиск подходящих материалов для электростатических экранов по критериям устойчивости к ультрафиолетовому излучению, ударам микрочастиц космического мусора, способности сопротивляться растягивающим нагрузкам, электрической прочностью, привело к нахождению приемлемых решений и разработке новых вариантов ЭСЗ [12], но в то же время выявило наличие новых проблем.

Первая из них заключается в том, что даже при использовании самых современных и передовых материалов для конструкции ЭСЗ с 12-ю заряженными сферами, общая масса ЭСЗ оказывается слишком большой для практического использования системы по сравнению с системой, основанной на пассивной защите поглощающими экранами [12].

Вторая из них заключается в том, что большая часть работы над созданием и испытанием ЭСЗ в космосе, успешно выполненная в СССР [1–3,5–9], была направлена на защиту от излучения с энергией от 10 до 100 MeV. Теперь мы понимаем, что реальной проблемой является излучение с энергией от 1 до 2 GeV. Итак, вопрос заключается в масштабировании, как по энергии, так и по размерам ЭСЗ. Можно ли создать ЭСЗ, способную работать при таких высоких уровнях энергопотребления, и может ли она защитить весь космический аппарат?

В процессе изучения этого вопроса был предложен новый концептуальный проект, который должен быть оценен в ходе предстоящих исследований с учетом сложности и массы системы. Он основан на торе, охватывающем космический аппарат [12]. Предложена конфигурация ЭСЗ, представляющая собой тор, заряженный до высокого отрицательного напряжения, окружающий космический аппарат, и набор положительно заряженных сфер. Генераторы Ван де Граафа были предложены в качестве механизма для перемещения

заряда от космического аппарата к тору для создания полей, необходимых для защиты космического аппарата.

Продолжение исследований электростатического экранирования привело к развитию идеи использования торообразных поверхностей путем перехода к конфигурации, основанной на использовании нескольких тороидальных поверхностей (или тороидальных колец, как они названы в [13]). Аналитические и численные исследования показывают, что с помощью таких электростатических конфигураций излучение солнечных вспышек может быть практически устранено. Так же показано, что вероятность проникновения ионизирующих частиц в тороидальные поверхности существенно снижается по сравнению с более простыми сферическими конструкциями. Установлено, что размеры и соотношение радиусов тороидальных поверхностей могут варьироваться и быть оптимизированы для достижения более высокой степени радиационной защиты [13].

На этапе предварительного анализа эффективности системы электростатической защиты обычно ограничиваются нахождением электрического потенциала в окрестности заряженной поверхности. В условиях системы заряженных поверхностей, заряды которых могут оказывать взаимное влияние на общее распределение зарядов, данная задача является весьма непростой. Поэтому классический способ решения, основанный на решении задачи Дирихле для уравнения Лапласа, может оказаться практически неприменимым, в связи с чем используются иные подходы. Так, например, в работе [14], при анализе эффективности ЭСЗ, содержащей вышеупомянутую систему сферических поверхностей, задача нахождения электрического потенциала решается с использованием метода чисто мнимых зарядов.

Переходя к рассмотрению ЭСЗ с системой тороидальных поверхностей, заметим, что для одного заряженного тора потенциал во внешней области, найденный аналитически путем решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, приведен, например, в работах [13,15]. В работе [13] это решение используется для отыскания заряда, который необходимо распределить на поверхности тора для поддержания постоянной заданной величины потенциала на этой поверхности. Для перспективной системы ЭСЗ, содержащей три концентрические тороидальные поверхности [13], задача отыскания потенциала становится значительно более сложной ввиду взаимного влияния зарядов, распределенных по поверхностям торов. Поэтому при анализе эффективности такой ЭСЗ используется численный подход на основе метода конечных элементов.

Данное исследование имеет своей перспективой исследование динамики космического аппарата, снабженного системой ЭСЗ, включающей три концентрических тороидальных поверхности. При этом для анализа электродинамических эффектов, возникающих в результате взаимодействия заряженных поверхностей с магнитным полем Земли, недостаточно знать электрический потенциал системы заряженных тороидальных поверхно-

стей. Требуется знать плотности распределений зарядов по поверхностям торов.

Для одного отдельно взятого тора задача отыскания плотности распределения заряда по поверхности может быть решена после нахождения производной на поверхности тора от потенциала во внешней части тора [16]. Выражение для потенциала, как отмечалось выше, имеется в работах [13,15], где оно приведено в виде разложения в ряд Фурье, слагаемые которого выражены через функции Лежандра полуцелых порядков первого и второго родов.

В настоящей работе рассматривается система из трех концентрических непересекающихся полых электропроводящих торов. На каждый из этих торов может быть подан электростатический заряд. Ставится задача о нахождении плотностей распределений зарядов по поверхностям этих торов. Для решения задачи предлагается непосредственное нахождение плотностей распределений зарядов (минуя нахождение электрического потенциала) методом последовательных приближений исходя из того, что в статическом случае в каждой из точек поверхности каждого из торов суммарная касательная напряженность сил Кулона равна нулю. При этом в настоящей работе учитывается взаимодействие распределений зарядов на разных торах.

1. Математическая модель

Рассматривается система из трех непересекающихся полых тороидальных оболочек, выполненных из проводящего материала, имеющих общий центр и ориентированных параллельно взаимно перпендикулярным плоскостям (рис. 1).

Будем обозначать индексом i элементы того тора, на котором корректируется распределение заряда, а индексом j — элементы того тора, на котором мини-

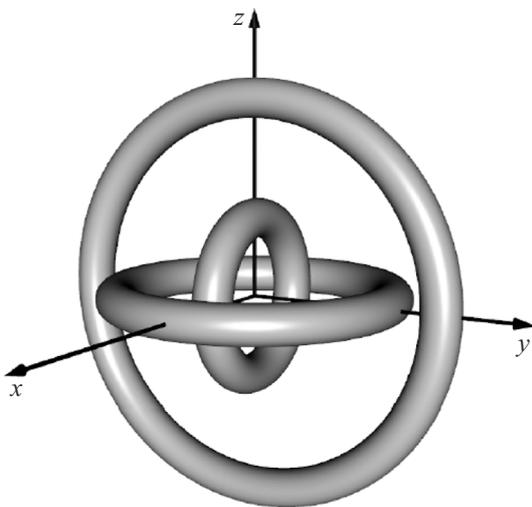


Рис. 1. Три взаимно перпендикулярных непересекающихся тора.

мируется касательная составляющая напряженности. Во избежание путаницы эти индексы будут принимать не числовые, а буквенные значения $i, j = S, M, L$ для малого (Small), среднего (Medium) и большого (Large) торов, соответственно.

На каждой из трех тороидальных поверхностей вводится ортогональная система координат (φ, ψ) (рис. 2). Декартовы координаты точки на тороидальной поверхности легко выражаются с использованием цилиндрической координаты $\rho = R + r \cdot \cos \psi$:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \varphi = (R + r \cdot \cos \psi) \cdot \cos \varphi, \\ y = \rho \cdot \sin \varphi = (R + r \cdot \cos \psi) \cdot \sin \varphi, \\ z = r \cdot \sin \psi. \end{cases} \quad (1)$$

Если для определенности положить, что средний тор ориентирован параллельно координатной плоскости Oxy (рис. 2 соответствует именно этому случаю), то такая система координат имеет вид

$$\begin{cases} x_M = (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M, \\ y_M = (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M, \\ z_M = r_M \cdot \sin \psi_M. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь r_M — радиус образующей окружности, а R_M — расстояние от центра образующей окружности до оси симметрии, перпендикулярной плоскости ориентации, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\psi \in [0, 2\pi]$. Для малого тора, который будем полагать ориентированным параллельно координатной плоскости Oxz , система координат соответственно будет

$$\begin{cases} x_S = (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S, \\ y_S = r_S \cdot \sin \psi_S, \\ z_S = (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S. \end{cases} \quad (3)$$

А для большого тора, ориентированного параллельно координатной плоскости Oyz , окажется

$$\begin{cases} x_L = r_L \cdot \sin \psi_L, \\ y_L = (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L, \\ z_L = (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L. \end{cases} \quad (4)$$

Для каждой точки $M_j(\tilde{x}_j, \tilde{y}_j, \tilde{z}_j)$ каждой из трех тороидальных поверхностей должна быть равна нулевому вектору суммарная касательная напряженность электростатического поля, создаваемого зарядами, распределенными по поверхностям всех трех торов. Здесь и в дальнейшем знак тильда будет относиться к координатам тех точек, в которых вычисляется напряженность электростатического поля. Если обозначить $q_i(\varphi_i, \psi_i)$ плотность распределения заряда в точке $N_i(x_i, y_i, z_i)$, а $\vec{\tau}_{ij}(\varphi_i, \psi_i, \tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j)$ — проекцию вектора $\vec{N}_i M_j$ на касательную плоскость к j -й тороидальной поверхности, содержащей точку M_j , то эта напряженность может быть представлена в виде суммы интегралов по поверхностям трех торов (k — это постоянная Кулона, которая в

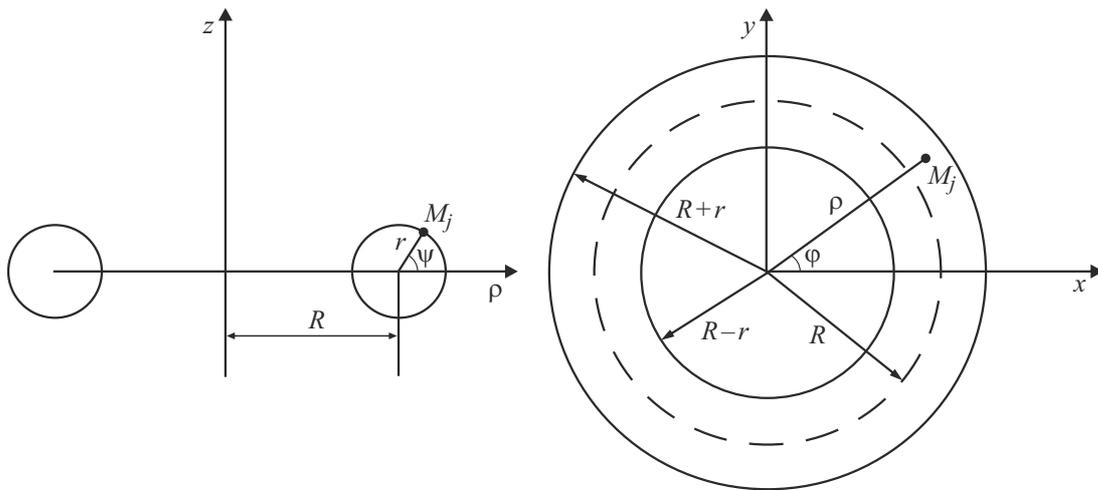


Рис. 2. Система координат на тороидальной оболочке.

данной задаче может быть сокращена):

$$\vec{E}_{\tau j} = k \sum_{i=S,M,L} r_i \int_0^{2\pi} (R_i + r_i \cdot \cos \psi_i) d\psi_i \int_0^{2\pi} \frac{q_i \cdot \vec{\tau}_{ij}}{|N_i M_j|^3} d\varphi_i = \vec{0}. \quad (5)$$

Вектор $\vec{N}_i M_j$ будет иметь девять различных выражений:

$$\vec{N}_S M_S = \begin{pmatrix} (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S \\ r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - r_S \cdot \sin \psi_S \\ (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\vec{N}_M M_S = \begin{pmatrix} (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M \\ r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M \\ (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - r_M \cdot \sin \psi_M \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\vec{N}_L M_S = \begin{pmatrix} (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - r_L \cdot \sin \psi_L \\ r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L \\ (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\vec{N}_S M_M = \begin{pmatrix} (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S \\ (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \sin \tilde{\varphi}_M - r_S \cdot \sin \psi_S \\ r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\vec{N}_M M_M = \begin{pmatrix} (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M \\ (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \sin \tilde{\varphi}_M - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M \\ r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - r_M \cdot \sin \psi_M \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\vec{N}_L M_M = \begin{pmatrix} (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - r_L \cdot \sin \psi_L \\ (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \sin \tilde{\varphi}_M - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L \\ r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\vec{N}_S M_L = \begin{pmatrix} r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - r_S \cdot \sin \psi_S \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\vec{N}_M M_L = \begin{pmatrix} r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - r_M \cdot \sin \psi_M \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\vec{N}_L M_L = \begin{pmatrix} r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - r_L \cdot \sin \psi_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Проекция $\vec{\tau}_{ij}$ может быть найдена по формуле

$$\vec{\tau}_{ij} = \vec{N}_i M_j - (\vec{N}_i M_j \cdot \vec{n}_j) \cdot \vec{n}_j, \quad (15)$$

где \vec{n}_j ($\tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j$) — нормаль к соответствующей тороидальной поверхности в точке M_j .

Для средней тороидальной поверхности $\vec{n}_M = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_M \cdot \cos \tilde{\varphi}_M \\ \cos \tilde{\psi}_M \cdot \sin \tilde{\varphi}_M \\ \sin \tilde{\psi}_M \end{pmatrix}$, для малой тороидальной поверхности $\vec{n}_S = \begin{pmatrix} \cos \tilde{\psi}_S \cdot \cos \tilde{\varphi}_S \\ \sin \tilde{\psi}_S \\ \cos \tilde{\psi}_S \cdot \sin \tilde{\varphi}_S \end{pmatrix}$, для большой имеем $\vec{n}_L = \begin{pmatrix} \sin \tilde{\psi}_L \\ \cos \tilde{\psi}_L \cdot \sin \tilde{\varphi}_L \\ \cos \tilde{\psi}_L \cdot \cos \tilde{\varphi}_L \end{pmatrix}$.

Соответственно, скалярные произведения $(\vec{N}_i \vec{M}_j \cdot \vec{n}_j)$ будут принимать следующие девять различных значений для соответствующих индексов i и j :

$$\begin{aligned} (\vec{N}_S \vec{M}_S \cdot \vec{n}_S) &= \left((R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \right. \\ &\times \cos \varphi_S \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \cos \tilde{\varphi}_S + (r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - r_S \cdot \sin \psi_S) \cdot \sin \tilde{\psi}_S \\ &+ \left((R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S \right) \\ &\times \cos \tilde{\psi}_S \cdot \sin \tilde{\varphi}_S, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_M \vec{M}_S \cdot \vec{n}_S) &= \left((R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \right. \\ &\times \cos \varphi_M \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \cos \tilde{\varphi}_S + (r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \\ &\times \sin \varphi_M) \cdot \sin \tilde{\psi}_S + \left((R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - r_M \cdot \sin \psi_M \right) \\ &\times \cos \tilde{\psi}_S \cdot \sin \tilde{\varphi}_S, \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_L \vec{M}_S \cdot \vec{n}_S) &= \left((R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - r_L \cdot \sin \psi_L \right) \\ &\times \cos \tilde{\psi}_S \cdot \cos \tilde{\varphi}_S + (r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L) \\ &\times \sin \tilde{\psi}_S + \left((R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \right. \\ &\times \cos \varphi_L \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \sin \tilde{\varphi}_S, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_S \vec{M}_M \cdot \vec{n}_M) &= \left((R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - (R_S + r_S \right. \\ &\times \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \cos \tilde{\varphi}_M + \left((R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \right. \\ &\times \sin \tilde{\varphi}_M - r_S \cdot \sin \psi_S \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \sin \tilde{\varphi}_M + \left(r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M \right. \\ &\left. - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S \right) \cdot \sin \tilde{\psi}_M, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_M \vec{M}_M \cdot \vec{n}_M) &= \left((R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - (R_M + r_M \right. \\ &\times \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \cos \tilde{\varphi}_M + \left((R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \right. \\ &\times \sin \tilde{\varphi}_M - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \sin \tilde{\varphi}_M \\ &+ (r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - r_M \cdot \sin \psi_M) \cdot \sin \tilde{\psi}_M, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_L \vec{M}_M \cdot \vec{n}_M) &= \left((R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - r_L \cdot \sin \psi_L \right) \\ &\times \cos \tilde{\psi}_M \cdot \cos \tilde{\varphi}_M + \left((R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \sin \tilde{\varphi}_M - (R_L + r_L \right. \\ &\times \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \sin \tilde{\varphi}_M + (r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - (R_L + r_L \\ &\times \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L) \cdot \sin \tilde{\psi}_M, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_S \vec{M}_L \cdot \vec{n}_L) &= (r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S) \\ &\times \sin \tilde{\psi}_L + \left((R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - r_S \cdot \sin \psi_S \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \\ &\times \sin \tilde{\varphi}_L + \left((R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \right. \\ &\times \sin \varphi_S \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \cos \tilde{\varphi}_L, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_M \vec{M}_L \cdot \vec{n}_L) &= (r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M) \\ &\times \sin \tilde{\psi}_L + \left((R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \right. \\ &\times \sin \varphi_M \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \sin \tilde{\varphi}_L + \left((R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L \right. \\ &\left. - r_M \cdot \sin \psi_M \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \cos \tilde{\varphi}_L, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} (\vec{N}_L \vec{M}_L \cdot \vec{n}_L) &= (r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - r_L \cdot \sin \psi_L) \cdot \sin \tilde{\psi}_L + \left((R_L + r_L \right. \\ &\times \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L \left. \right) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \sin \tilde{\varphi}_L \\ &+ \left((R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L \right) \\ &\times \cos \tilde{\psi}_L \cdot \cos \tilde{\varphi}_L. \end{aligned} \quad (24)$$

Для конкретных значений индексов i и j будем иметь следующие девять выражений вектора $\vec{\tau}_{ij}$:

$$\vec{\tau}_{SS} = \begin{pmatrix} (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S - (\overrightarrow{N_S M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \cos \tilde{\varphi}_S \\ r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - r_S \cdot \sin \psi_S - (\overrightarrow{N_S M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \sin \tilde{\psi}_S \\ (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S - (\overrightarrow{N_S M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \sin \tilde{\varphi}_S \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$\vec{\tau}_{MS} = \begin{pmatrix} (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M - (\overrightarrow{N_M M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \cos \tilde{\varphi}_S \\ r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M - (\overrightarrow{N_M M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \sin \tilde{\psi}_S \\ (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - r_M \cdot \sin \psi_M - (\overrightarrow{N_M M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \sin \tilde{\varphi}_S \end{pmatrix}, \quad (26)$$

$$\vec{\tau}_{LS} = \begin{pmatrix} (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \cos \tilde{\varphi}_S - r_L \cdot \sin \psi_L - (\overrightarrow{N_L M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \cos \tilde{\varphi}_S \\ r_S \cdot \sin \tilde{\psi}_S - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L - (\overrightarrow{N_L M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \sin \tilde{\psi}_S \\ (R_S + r_S \cdot \cos \tilde{\psi}_S) \cdot \sin \tilde{\varphi}_S - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L - (\overrightarrow{N_L M_S} \cdot \vec{n}_S) \cdot \cos \tilde{\psi}_S \cdot \sin \tilde{\varphi}_S \end{pmatrix}, \quad (27)$$

$$\vec{\tau}_{SM} = \begin{pmatrix} (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S - (\overrightarrow{N_S M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \cos \tilde{\varphi}_M \\ (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \sin \tilde{\varphi}_M - r_S \cdot \sin \psi_S - (\overrightarrow{N_S M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \sin \tilde{\varphi}_M \\ r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S - (\overrightarrow{N_S M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \sin \tilde{\psi}_M \end{pmatrix}, \quad (28)$$

$$\vec{\tau}_{MM} = \begin{pmatrix} (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M - (\overrightarrow{N_M M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \cos \tilde{\varphi}_M \\ (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \sin \tilde{\varphi}_M - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M - (\overrightarrow{N_M M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \sin \tilde{\varphi}_M \\ r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - r_M \cdot \sin \psi_M - (\overrightarrow{N_M M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \sin \tilde{\psi}_M \end{pmatrix}, \quad (29)$$

$$\vec{\tau}_{LM} = \begin{pmatrix} (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \cos \tilde{\varphi}_M - r_L \cdot \sin \psi_L - (\overrightarrow{N_L M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \cos \tilde{\varphi}_M \\ (R_M + r_M \cdot \cos \tilde{\psi}_M) \cdot \sin \tilde{\varphi}_M - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L - (\overrightarrow{N_L M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \cos \tilde{\psi}_M \cdot \sin \tilde{\varphi}_M \\ r_M \cdot \sin \tilde{\psi}_M - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L - (\overrightarrow{N_L M_M} \cdot \vec{n}_M) \cdot \sin \tilde{\psi}_M \end{pmatrix}, \quad (30)$$

$$\vec{\tau}_{SL} = \begin{pmatrix} r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \cos \varphi_S - (\overrightarrow{N_S M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \sin \tilde{\psi}_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - r_S \cdot \sin \psi_S - (\overrightarrow{N_S M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \sin \tilde{\varphi}_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - (R_S + r_S \cdot \cos \psi_S) \cdot \sin \varphi_S - (\overrightarrow{N_S M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \cos \tilde{\varphi}_L \end{pmatrix}, \quad (31)$$

$$\vec{\tau}_{ML} = \begin{pmatrix} r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \cos \varphi_M - (\overrightarrow{N_M M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \sin \tilde{\psi}_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - (R_M + r_M \cdot \cos \psi_M) \cdot \sin \varphi_M - (\overrightarrow{N_M M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \sin \tilde{\varphi}_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - r_M \cdot \sin \psi_M - (\overrightarrow{N_M M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \cos \tilde{\varphi}_L \end{pmatrix}, \quad (32)$$

$$\vec{\tau}_{LL} = \begin{pmatrix} r_L \cdot \sin \tilde{\psi}_L - r_L \cdot \sin \psi_L - (\overrightarrow{N_L M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \sin \tilde{\psi}_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \sin \tilde{\varphi}_L - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \sin \varphi_L - (\overrightarrow{N_L M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \sin \tilde{\varphi}_L \\ (R_L + r_L \cdot \cos \tilde{\psi}_L) \cdot \cos \tilde{\varphi}_L - (R_L + r_L \cdot \cos \psi_L) \cdot \cos \varphi_L - (\overrightarrow{N_L M_L} \cdot \vec{n}_L) \cdot \cos \tilde{\psi}_L \cdot \cos \tilde{\varphi}_L \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Поскольку равенство $\vec{E}_{r_j} = \vec{0}$ должно быть выполнено во всех точках M_j всех трех тороидальных поверхностей, то поиск плотностей q_i распределений зарядов можно свести к минимизации функционала, равного сумме трех интегралов по поверхностям торов от квадрата длины того вектора, который должен оказаться нулевым:

$$\sum_{j=S,M,L} r_j \int_0^\pi (R_j + r_j \cos \tilde{\psi}_j) d\tilde{\psi}_j \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{i=S,M,L} r_i \int_0^{2\pi} (R_i + r_i \cos \psi_i) d\psi_i \int_0^{2\pi} \frac{q_i \cdot \vec{\tau}_{ij}}{|N_i M_j|^3} d\varphi_i \right)^2 d\tilde{\varphi}_j. \quad (34)$$

В двух последних случаях интегрирования ведутся не по полным оборотам из-за октаэдрической симметрии задачи.

Чтобы решить задачу минимизации функционала численно, все четыре определенных интеграла заменялись на суммы по квадратурной формуле средних прямоугольников. С учетом ограниченности ресурсов компьютера, при численном интегрировании узлы располагались друг от друга с интервалом 3° . Чтобы избежать деления на нуль, узлы по переменным $\varphi_i = \pi\alpha_i/60$ и $\tilde{\varphi}_j = \pi(3\tilde{\alpha}_j + 1.5)/180$ и соответственно $\psi_i = \pi\beta_i/60$ и $\tilde{\psi}_j = \pi(3\tilde{\beta}_j + 1.5)/180$, брались со сдвигом в полтора градуса. В итоге минимизировалось выражение

$$f(q_i) = \sum_{j=S,M,L} r_j \sum_{\tilde{\beta}_j=1}^{60} \left(R_j + r_j \cdot \cos \frac{\pi(3\tilde{\beta}_j + 1.5)}{180} \right) \times \frac{\pi}{60} \sum_{\tilde{\alpha}_j=1}^{30} \left(\sum_{i=S,M,L} r_i \sum_{\beta_i=1}^{120} \left(R_i + r_i \cdot \cos \frac{\pi\beta_i}{60} \right) \times \frac{\pi}{60} \sum_{\alpha_i=1}^{120} \frac{q_i \cdot \vec{\tau}_{ij}}{|N_i M_j|^3} \cdot \frac{\pi}{60} \right)^2 \cdot \frac{\pi}{60}. \quad (35)$$

Полученная функция от $3 \times 120 \times 120 = 43\,200$ переменных минимизировалась методом градиентного спуска. Этот метод является итерационным численным методом решения оптимизационных задач. Он отличается простотой вычислений и слабыми требованиями к минимизируемой функции [17], хотя и не является оптимальным [18]. Если бы не было октаэдрической симметрии, то в данной задаче для применения метода градиентного спуска нужно было бы иметь выражения всех $43\,200$ частных производных от этой минимизируемой функции. Фактически же вычисляются только $43\,200 : 8 = 5400$ таких

производных:

$$\frac{\partial f}{\partial q_m} = \sum_{j=S,M,L} r_j \sum_{\tilde{\beta}_j=1}^{60} \left(R_j + r_j \cdot \cos \frac{\pi(3\tilde{\beta}_j + 1.5)}{180} \right) \times \frac{\pi}{60} \sum_{\tilde{\alpha}_j=1}^{30} \left(\sum_{i=S,M,L} r_i \sum_{\beta_i=1}^{120} \left(R_i + r_i \cdot \cos \frac{\pi\beta_i}{60} \right) \times \frac{\pi}{60} \sum_{\alpha_i=1}^{120} \frac{q_i \cdot \vec{\tau}_{ij}}{|N_i M_j|^3} \frac{\pi}{60} r_m \left(R_m + r_m \cdot \cos \frac{\pi\beta_m}{60} \right) \times \frac{\pi}{60} \frac{\vec{\tau}_{mj}}{|N_m M_j|^3} \cdot \frac{\pi}{60} \right) \cdot \frac{\pi}{60}. \quad (36)$$

В качестве начального приближения брались равномерные распределения зарядов по каждой из тороидальных поверхностей. Т.е., если на i -ю тороидальную поверхность был изначально подан заряд Q_i , то полагалось, что $q_i(\varphi_i, \psi_i) = Q_i/S_i$, где $S_i = 4\pi^2 R_i r_i$ — площадь i -ой тороидальной поверхности.

Новое значение плотности распределения зарядов находилось по формуле

$$q_i^{new} = q_i^{old} - L \cdot \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad (37)$$

где L — малый положительный гиперпараметр, подбираемый в тестовых расчетах эмпирически. В ходе каждой из итераций метода градиентного спуска изменялось расчетное общее количество заряда на каждой из тороидальных поверхностей, которое можно найти по приближенной формуле

$$Q_i^{new} = r_i \sum_{\beta_i=1}^{120} \left(R_i + r_i \cos \frac{\pi\beta_i}{60} \right) \cdot \frac{\pi}{60} \sum_{\alpha_i=1}^{120} q_i^{new} \frac{\pi}{60}. \quad (38)$$

Поскольку в реальности количество заряда оставалось неизменным, перед следующей итерацией величину q_i^{new} приходилось корректировать, распределяя недостающую часть заряда равномерно по всей поверхности

$$q_i = q_i^{new} + \frac{Q_i^{old} - Q_i^{new}}{S_i}. \quad (39)$$

2. Результаты компьютерного моделирования

Результаты численных расчетов приведены для конструкции с относительными размерами $R_S : R_M : R_L : r_S : r_M : r_L = 3 : 6 : 9 : 1 : 1 : 1$. На графиках показаны плотности распределения зарядов для случая, когда заряд (единичный) был подан только на средний тор, а на малом и большом торах заряды отсутствовали. Эти плотности измеряются в единицах,

равных отношению заряда, поданного на средний тор к квадрату радиуса образующих окружностей торов (все три радиуса в расчетах были одинаковы).

На рис. 3 показана плотность распределения заряда q_M в точках средней тороидальной поверхности в зависимости от угла ψ_M . Левая часть графиков ($\psi_M = 0$) соответствует точкам, находящимся дальше от центра тора, а правая ($\psi_M = \pi$) — точкам, которые расположены ближе к центру. Незаряженные большой и малый торы притягивают заряды среднего тора. График 1 соответствует сечению $\varphi_M = \pi/2$, максимально близкому к большому тору, а график 2 — сечению $\varphi_M = 0$, максимально близкому к малому тору. Эти результаты вполне ожидаемы, поскольку на незаряженном проводнике наводится „диполь“, который ответным образом притягивает создавшие его заряды. Если бы не было ни малого, ни большого торов, а был бы только один заряженный средний, то график напряженности оказался бы кривой, практически соединяющей нижние части изображенных графиков. Это полностью согласуется с тем, что заряды отталкиваясь друг от друга, распределяются с большей концентрацией на внешних частях заряженного тела.

На рис. 4 показана плотность распределения заряда q_M в точках средней тороидальной поверхности в зависимости от угла φ_M .

Из электростатики известно, что заряды стремятся концентрироваться в областях с максимальной положительной кривизной, тем более, находящейся дальше

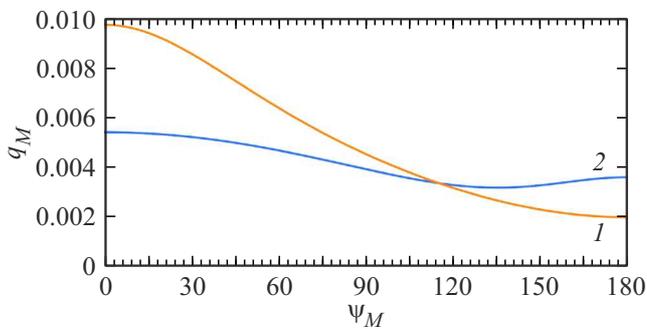


Рис. 3. Зависимость плотности распределения заряда на поверхности среднего тора от „радиальной“ координаты.

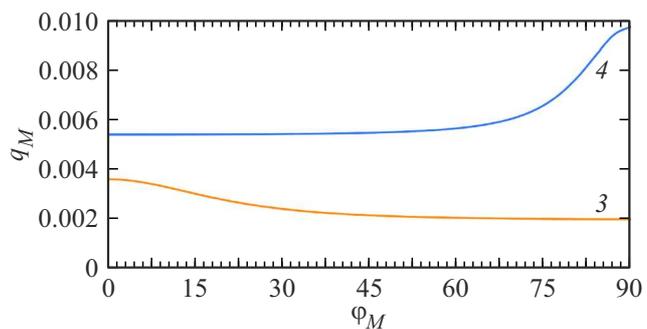


Рис. 4. Зависимость плотности распределения заряда на поверхности среднего тора от „окружной“ координаты.

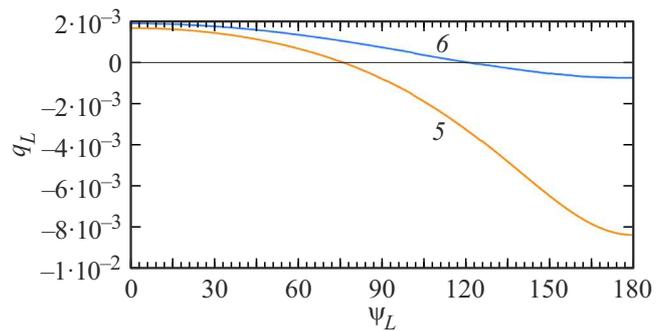


Рис. 5. Зависимость плотности распределения наведенного заряда на поверхности незаряженного большого тора от „радиальной“ координаты.

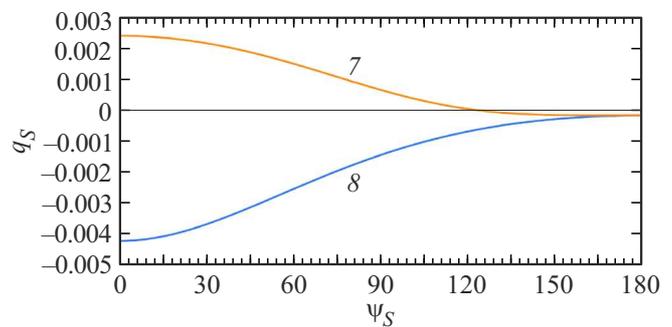


Рис. 6. Зависимость плотности распределения наведенного заряда на поверхности незаряженного малого тора от „радиальной“ координаты.

от центра. Полученные результаты этому полностью соответствуют. График 4 соответствует „внешней“ окружности тороидальной поверхности, наиболее удаленной от центра, а график 3 — „внутренней“. Если бы не было малого и большого торов, то обе эти линии оказались бы горизонтальными прямыми, проходящими на минимальных уровнях приведенных графиков. Правая часть графика 4 оказывается выше из-за приближения к большому тору, который хоть и не заряжен, но из-за перераспределения зарядов представляет из себя диполь и притягивает заряды к себе. По аналогичной причине из-за приближения к малому тору, график 3 имеет возвышение в левой части.

На рис. 5–8 показаны зависимости плотности распределения заряда на незаряженных (т. е. имеющих суммарные нулевые заряды) большом и малом торах. Результаты полностью соответствуют физическому смыслу. Например, на рис. 5 и 6 графики 5 и 8, расположенные ниже графиков 6 и 7, соответствуют сечениям, находящимся максимально близко к заряженному среднему тору. Причем в обоих случаях максимальный по модулю заряд противоположного знака наводится на той стороне (внутренней, где $\psi_L = \pi$, для большого тора, и внешней, где $\psi_S = 0$, — для малого тора), которая оказывается ближе к заряженному среднему тору.

На рис. 7 и 8 графики 10 и 11, мало отличающиеся от горизонтальных линий, соответствуют окружностям торов, максимально удаленных от заряженного среднего тора, т.е. для большого тора — внешней окружности, а для малого тора — внутренней окружности. Графики 9 и 12 соответствуют окружностям торов, наиболее близким к заряженному среднему тору. И, естественно, части этих графиков, на которых заряд принимает отрицательные значения, соответствуют тем частям окружностей, которые оказались ближе к заряженному среднему тору. Для большого тора это точки в окрестности значения $\varphi_L = \pi/2$, а для малого — точки в окрестности значения $\varphi_S = 0$.

На рис. 9 для всех трех торов показан вид сбоку. Для большого тора он соответствует виду с конца оси Ox , для среднего — виду с конца оси Oz , для малого — с конца оси Oy .

Горизонтальные отрезки между малым и средним торами соответствуют участкам оси Ox , а вертикальные отрезки между средним и большим торами соответствуют оси Oy . Изолинии на торах, проведенные с шагом 0.001, соответствуют одинаковым значениям плотности распределения заряда. Изолинии, соответствующие нулевой плотности заряда, отмечены указателями. На рис. 9 видно, что на среднем торе максимальная плотность изолиний имеет место на его внешних

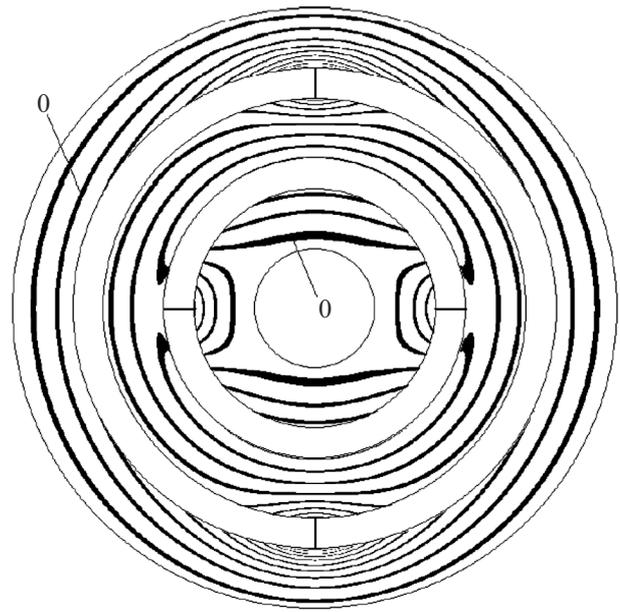


Рис. 9. Изолинии плотности распределения зарядов на поверхностях торов.

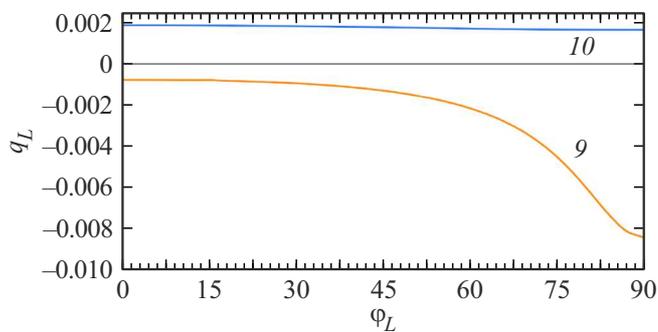


Рис. 7. Зависимость плотности распределения наведенного заряда на поверхности незаряженного большого тора от „окружной“ координаты.

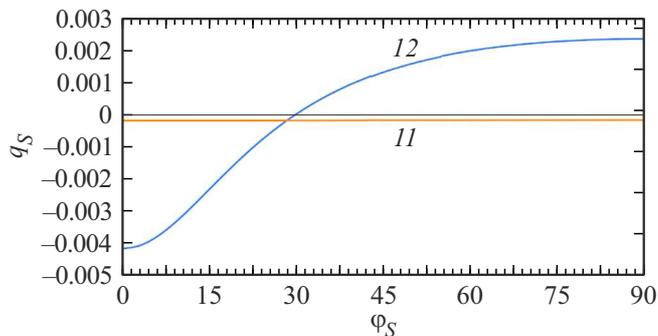


Рис. 8. Зависимость плотности распределения наведенного заряда на поверхности незаряженного малого тора от „окружной“ координаты.

частях вблизи оси Oy , т.е. вблизи большого тора, а минимальная плотность — на внутренней части тора. Взаимное влияние зарядов, расположенных на среднем торе и наведенных на большом торе, проявляется в том, что плотность изолиний на большом торе достигает наибольших значений вблизи среднего тора.

Заключение

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности решения задач о нахождении плотностей распределения электростатических зарядов на одном или не очень большом количестве проводящих тел с гладкими поверхностями итерационным численным методом, минимизирующем касательные составляющие напряженностей на поверхностях этих тел. В работе использовался классический метод градиентного спуска, не претендующий на конкурентные преимущества по быстродействию или ресурсоемкости, однако он позволил впервые получить решение новой актуальной и достаточно сложной задачи. В дальнейшем авторы планируют усовершенствовать методику расчета с целью уменьшения вычислительных затрат. В частности, планируется использовать методы искусственного интеллекта.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00104, <https://rscf.ru/project/24-21-00104/>

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Е.И. Воробьев, Е.Е. Ковалев. *Радиационная безопасность экипажей летательных аппаратов* (Энергоатомиздат, М., 1983), 152 с.
- [2] Е.Е. Ковалев, Э.Д. Молчанов, Ю.Г. Пехтерев, Т.Я. Рябова, Б.И. Тихомиров, А.И. Хованская. *Космические исследования*, **13** (5), 771 (1975).
- [3] Е.Е. Ковалев, Э.Д. Молчанов, Ю.Г. Пехтерев, Т.Я. Рябова, Б.И. Тихомиров, А.И. Хованская. *Космические исследования*, **14** (1), 126 (1976).
- [4] А.Г. Ребеко. *Инженерный журнал: наука и инновации*, **5**, 1 (2016).
- [5] Т.Я. Рябова. *Космическая биология и авиакосмическая медицина*, **17** (2), 4 (1983).
- [6] В.В. Цетлин, В.И. Павлушкина, В.И. Редько. *Космические исследования*, **33** (3), 286 (1995).
- [7] Е.Е. Ковалев, В.М. Петров, В.В. Маркелов, Т.Я. Рябова, В.В. Бенчин, И.В. Черных. *Основные итоги и перспективы исследований на станциях „Прогноз“ по оперативному обеспечению радиационной безопасности космических полетов*. Сб. докл. 5 объед. научн. чтения по космонавт. (Наука, М., 1984), с. 196–206.
- [8] Yu.A. Akatov, V.E. Dudkin, E.E. Kovalev. et.al. *Nucl. Tracks Radiat. Meas.*, **17** (2), 105 (1990).
- [9] Е.Е. Ковалев, Э.Д. Молчанов, В.К. Лебедев, Т.Я. Рябова, Ю.Г. Пехтерев, А.В. Колодин, Г.И. Лесков. *Космические исследования*, **25** (4), 585 (1987).
- [10] J.C. Sussingham, S.A. Watkins, F.H. Cocks. *J. Astronautical Sc.*, **47** (3,4), 165 (1999). DOI: 10.1007/BF03546197
- [11] P.T. Metzger, J.E. Lane, R.C. Youngquist. *Progress Toward Electrostatic Radiation Shielding of Interplanetary Spacecraft / Strategies, Concepts and Technical Challenges of Human Exploration Beyond Low Earth Orbit Paper Session II-B* (41st) (Space Congress Proceedings, 6, 2004).
- [12] J.G. Smith, T. Smith, M. Williams, R. Youngquist, W. Mendell. *Potential Polymeric Sphere Construction Materials for a Spacecraft Electrostatic Shield*. NASA/TM (2006, 214302), <https://ntrs.nasa.gov/search.jsp?R=20060013423>
- [13] R.P. Joshi, H. Qiu, R.K. Tripathi. *Acta Astronautica*, **88**, 138 (2013).
- [14] P.T. Metzger, J.E. Lane. *Open Appl. Phys. J.*, **2**, 32 (2009).
- [15] Ю.Н. Ташаев. *Успехи прикладной физики*, **3** (2), 126 (2015).
- [16] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Теоретическая физика: учеб. пособ. для вузов. Электродинамика сплошных сред*. (Физматлит, М., 2005), в 10 т., т. VIII, 4-е изд. стереотип.
- [17] Б.Т. Поляк. *Введение в оптимизацию* (Наука, М., 1983), 384 с.
- [18] Ю.Е. Нестеров. *Введение в выпуклую оптимизацию* (Изд-во МЦИМО, М., 2010), 280 с.