13

Распространение волн конечной амплитуды по цилиндрической струе магнитной жидкости в аксиальном магнитном поле

© Н.М. Зубарев,[1,2] О.В. Зубарева[1]

[1] Институт электрофизики УрО РАН,
620016 Екатеринбург, Россия
[2] Физический институт им П.Н. Лебедева РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: nick@iep.uran.ru

Поступило в Редакцию 6 ноября 2024 г.
В окончательной редакции 20 января 2025 г.
Принято к публикации 22 января 2025 г.

Исследовано распространение нелинейных волн по поверхности цилиндрической струи магнитной жидкости при наличии сильного аксиального магнитного поля. Продемонстрировано, что в случае жидкости с высокой магнитной проницаемостью осесимметричные возмущения границы струи произвольной амплитуды могут распространяться по ней без искажений. Обсуждена аналогия с известными решениями, описывающими распространение альфвеновских волн в неограниченной идеально проводящей жидкости.

Ключевые слова: ферромагнитная жидкость, аксиальное магнитное поле, струя, нелинейные волны, точные решения.

DOI: 10.61011/JTF.2025.06.60458.402-24

Введение

Магнитное поле, направленное по касательной к свободной поверхности магнитной жидкости, оказывает на нее стабилизирующее влияние [1–4] (нормальное поле, напротив, дестабилизирует систему [1,3,5]). Этот эффект может быть использован для стабилизации струй жидкости — подавления капиллярной неустойчивости Плато–Рэлея. Впервые анализ устойчивости цилиндрической струи непроводящей магнитной жидкости в аксиальном магнитном поле был осуществлен в работе [6]; полученные результаты были развиты в [7,8] (исследования устойчивости струй проводящей жидкости в рамках МГД модели проводились в [9,10]). В [11] была проанализирована устойчивость осесимметричной струи магнитной жидкости при наличии всех компонент внешнего магнитного поля (см. также недавнюю работу [12]). Такие исследования важны для понимания сценариев распада струй и последующего формирования капель [13]. Значительный интерес вызывает изучение влияния азимутального магнитного поля на цилиндрический слой магнитной жидкости, окружающий проводник с током [14,15]. Для такой системы была экспериментально продемонстрирована возможность распространения уединенных осесимметричных волн [16]. Нелинейная теория развивалась, например, в [17,18] (волны малой амплитуды) и [19,20] (сильнонелинейные волны).

В настоящей работе исследуется распространение сильнонелинейных осесимметричных волн по поверхности цилиндрической струи магнитной жидкости при наличии сильного внешнего аксиального магнитного поля. Закон дисперсии линейных волн для такой системы был получен в [6,8]. В работе [21] была предложена слабонелинейная (т. е. для возмущений поверхности малой амплитуды) теория распространения волн для этой задачи: выведено нелинейное уравнение Шредингера для огибающей волнового пакета, описана его модуляционная неустойчивость. Нами демонстрируется, что в случае жидкости с высокой магнитной проницаемостью можно не ограничиваться рассмотрением волн малой амплитуды. Удается построить точные волновые решения, соответствующие распространению возмущений границы цилиндрической струи произвольной (т. е. сопоставимой как с длиной волны, так и с радиусом струи) амплитуды. Такие решения по ряду свойств аналогичны известным решениям, описывающим распространение альфвеновских волн в неограниченной идеально проводящей жидкости [22,23]. Несмотря на качественные различия (принципиально разные геометрии, среды с отличающимися физическими свойствами — общим, по сути, является лишь наличие внешнего однородного магнитного поля), уравнения движения в обоих случаях допускают решения, согласно которым нелинейные волны произвольного профиля могут распространяться с постоянной скоростью вдоль направления поля.

Следует отметить, что с математической точки зрения задача о поведении магнитной жидкости во внешнем магнитном поле аналогична задаче о поведении диэлектрической жидкости во внешнем электрическом поле — соответствующие уравнения совпадают после замены магнитного поля на электрическое и магнитной проницаемости на диэлектрическую [1]. В работах [24–27] было установлено, что нелинейные волны произвольной конфигурации могут распространяться без искажений по исходно плоской свободной поверхности идеальной

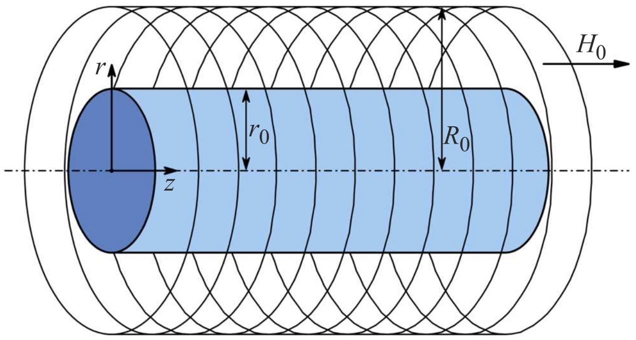

Рис. 1. Геометрия рассматриваемой задачи (схематически).

диэлектрической жидкости вдоль направления внешнего тангенциального электрического поля. Такая ситуация реализуется для жидкости с большим значением диэлектрической проницаемости в случае достаточно сильного поля, когда влияние электростатических сил становится доминирующим. Полученные в настоящей работе результаты можно рассматривать как обобщение результатов [24–27] на другую — цилиндрическую — геометрию системы.

1. Дисперсионное соотношение

Рассмотрим эволюцию волн на свободной поверхности идеальной несжимаемой неэлектропроводной магнитной жидкости с постоянной магнитной проницаемостью μ. В невозмущенном состоянии струя представляет собой бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса r_0 — геометрия задачи представлена на рис. 1. Струя помещена во внешнее однородное магнитное поле напряженностью H_0, направленное вдоль ее оси. Аналогично [8] считаем, что поле создается соленоидом радиуса R_0, ось которого совпадает с осью струи.

Введем функцию η, определяющую деформацию поверхности струи. Форма ее поверхности задается уравнением $r = r_0 + \eta(\theta, z, t)$, где $\{r, \theta, z\}$ — цилиндрические координаты, t — время. В линейном приближении, т.е. для деформаций малой амплитуды, $|\partial\eta/\partial z| \ll 1$ и $|\partial\eta/\partial\theta| \ll r_0$, поведение системы полностью описывается дисперсионным соотношением, соответствующим представлению $\eta \propto \exp[i(n\theta + kz - \omega t)]$, где $n = 0, 1, 2\ldots$ — азимутальное волновое число, k — аксиальное волновое число, ω — частота. Закон дисперсии имеет следующий вид [8]:

$$\omega^2 = \frac{\mu_0 H_0^2(\mu-1)^2 k^2 I_n'(kr_0)}{\rho[\mu I_n'(kr_0) - A I_n(kr_0)]} + \frac{\alpha k[n^2 + (kr_0)^2 - 1] I_n'(kr_0)}{\rho r_0^2 I_n(kr_0)}, \quad (1)$$

где величина A задается выражением

$$A = \frac{I_n'(kr_0)K_n(kR_0) - I_n(kR_0)K_n'(kr_0)}{I_n(kr_0)K_n(kR_0) - I_n(kR_0)K_n(kr_0)}.$$

Здесь μ_0 — магнитная постоянная, ρ — плотность жидкости, α — коэффициент поверхностного натяжения, I_n и K_n — модифицированные функции Бесселя первого и соответственно второго рода порядка n, а L_n' и K_n' — их производные по аргументу (для окружающей струю среды считаем плотность равной нулю, а магнитную проницаемость — единице). Первое слагаемое в правой части (1) ответственно за влияние магнитного поля, а второе — за влияние капиллярных эффектов.

Поверхность струи неустойчива по отношению к возмущениям с такими волновыми числами k и n, для которых правая часть отрицательна и соответственно частота ω — мнимая. В работе [8] был проведен детальный анализ устойчивости, свидетельствующий о стабилизирующем влиянии магнитного поля на струю. Отметим, что результаты [8] являются обобщением результатов пионерской работы [6], в которой рассматривалась устойчивость струи магнитной жидкости в однородном магнитном поле в неограниченном пространстве. Полученный в [6] закон дисперсии можно найти из (1), рассматривая предел $R_0 \gg r_0$. В силу того, что справедливы асимптотики

$$I_n(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \;\; K_n(x) \approx \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x/\pi}}, \;\; x \to \infty,$$

имеем в этом пределе $A \to K_n'(kr_0)/K_n(kr_0)$, т.е. в (1) исчезает зависимость от радиуса соленоида.

Пусть λ — характерный пространственный масштаб возмущений поверхности струи. Из общих соображений понятно, что для мелкомасштабных возмущений ($\lambda \ll r_0$) в законе дисперсии (1) будет доминировать слагаемое, ответственное за капиллярные эффекты. Действительно, в этом пределе геометрия задачи переходит от цилиндрической в плоскую. Тогда первое слагаемое в правой части (1) будет иметь порядок λ^{-2}, а второе — λ^{-3} [1–3]. Как следствие, при достаточно малых λ капиллярные силы доминируют над магнитными.

Мы будем рассматривать крупномасштабные возмущения поверхности, сравнимые с радиусом струи: $\lambda \sim r_0$ или, в терминах волновых чисел k и n, $\sqrt{(n/r_0)^2 + k^2} = O(r_0^{-1})$. Для таких возмущений в достаточно сильном магнитном поле ответственное за его влияние слагаемое в законе дисперсии (1) будет доминировать. Характерное магнитное давление оценивается как $p_m = \mu_0\mu H_0^2/2$; капиллярное давление как $p_\alpha = \alpha/r_0$. Введем безразмерный параметр $\delta = p_m/p_\alpha$, характеризующий относительный вклад магнитных и капиллярных давлений. Будем считать сильным магнитное поле, для которого $\delta \gg 1$ и, как следствие, капиллярными эффектами можно пренебречь: распространение волн будет целиком определяться влиянием магнитного поля.

В настоящей работе мы рассмотрим случай среды с большой магнитной проницаемостью, $\mu \gg 1$, вполне реализуемый для ферромагнитных жидкостей [28]. В результате разложения правой части (1) по малому параметру $1/\mu$ закон дисперсии принимает простой алгебраический вид

$$\omega^2 = \frac{\mu_0 \mu H_0^2 k^2}{\rho} \left(1 + O(\mu^{-1})\right).$$

При введении альфвеновской скорости $V_A = H_0\sqrt{\mu_0\mu/\rho}$ получим

$$\omega^2 \approx V_A^2 k^2. \quad (2)$$

Таким образом, для случая $\mu \gg 1$ при выполнении условия $\delta \gg 1$ (сильное магнитное поле) дисперсионное соотношение радикально упрощается. Для крупномасштабных возмущений поверхности струи ($\lambda \sim r_0$) исчезает зависимость от азимутального номера n, от поверхностного натяжения α, а также от геометрических параметров r_0 и R_0.

Для нашего последующего анализа существенным является предположение, что магнитная проницаемость μ постоянна, т.е. не зависит от магнитного поля. Для ферромагнитных жидкостей такое приближение справедливо, если напряженность поля меньше некоторого порога, который мы обозначим как H_c. Рассмотрим, как такое требование может сочетаться с условием сильного поля $\delta \gg 1$.

Оценим значение H_c для используемых в экспериментах феррожидкостей. Как известно [3], для коллоидной феррожидкости намагниченность M линейно зависит от напряженности приложенного магнитного поля при относительно малых H_0. Справедливо соотношение $M \approx \chi_i H_0$, где коэффициент пропорциональности χ_i — так называемая начальная магнитная восприимчивость. При больших значениях H_0 намагниченность выходит на насыщение: $M \approx M_s = \text{const}$. В качестве границы между этими пределами естественно взять значение напряженности поля H_c, для которого $M = M_s/2$. Получим тогда $H_c = M_s/(2\chi_i)$. Например, в исследованиях [29] использовалась феррожидкость, для которой $\chi_i = 7.0$, $M_s = 51.4\,\text{kA/m}$, $\alpha = 23.5\,\text{mN/m}$. Для проницаемости жидкости имеем $\mu = 1 + \chi_i = 8.0$, т.е. условие $\mu \gg 1$ вполне выполняется. Для пороговой напряженности поля справедлива оценка $H_c = 3.7\,\text{kA/m}$. Величина H_0 не должна превышать этого значения, чтобы магнитную проницаемость можно было считать постоянной. При $H_0 = H_c$ для $r_0 = 5\,\text{mm}$ находим $\delta = 14.4$, т.е. условие $\delta \gg 1$ доминирования магнитных сил над капиллярными выполняется. Отсюда следует вывод, что можно подобрать такую магнитную жидкость и такие значения напряженности внешнего поля, что будут одновременно выполняться три условия: $\mu \gg 1$, $\delta \gg 1$ и $H_0 \le H_c$, которые используются в настоящей работе.

Вернемся к обсуждению дисперсионного соотношения. В терминах возмущения η границы струи закон дисперсии (2) соответствует линейному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \approx V_A^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}. \quad (3)$$

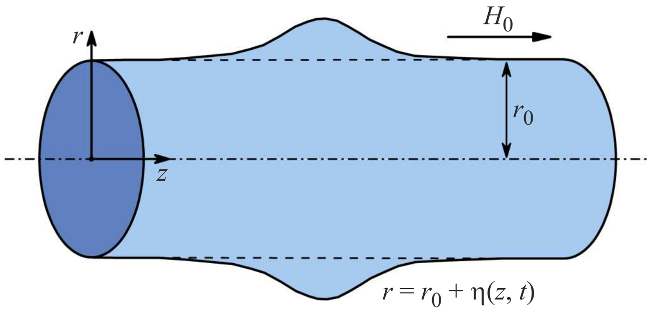

Рис. 2. Пространственно-локализованное осесимметричное возмущение поверхности цилиндрической струи (схематически).

Его решением является

$$\eta \approx \eta^+(z - V_A t, \theta) + \eta^-(z + V_A t, \theta), \quad (4)$$

где $\eta^\pm$ — произвольные функции (с очевидными для линейных волн ограничениями $|\partial\eta^\pm/\partial z| \ll 1$ и $|\partial\eta^\pm/\partial\theta| \ll r_0$), задающие форму волн, распространяющихся без искажений в положительном и отрицательном направлениях оси z с постоянной скоростью V_A.

Ниже мы проанализируем причины, приводящие к подобному поведению системы, а также продемонстрируем, что частично наши выводы о динамике линейных возмущений границы струи могут быть распространены на общий, нелинейный случай.

2. Уравнения движения

Как было продемонстрировано в разд. 1, представляет интерес рассмотрение поведения струи магнитной жидкости под действием только магнитных сил, т.е. без учета влияния капиллярных сил. Будем считать движение жидкости безвихревым. Тогда можно ввести скалярный потенциал скорости ϕ так, что вектор скорости определяется как его градиент: $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$. Для несжимаемой жидкости имеем $\nabla \cdot \boldsymbol{v} \equiv 0$ и, следовательно, потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\phi = 0$.

Выше было показано, что в предельном случае $\mu \gg 1$ закон дисперсии не содержит азимутального номера n. Это дает основание не рассматривать азимутальные возмущения поверхности струи, т.е. ограничиться осесимметричными возмущениями $\eta = \eta(z, t)$ (это соответствует $n = 0$) (рис. 2). В осесимметричном случае $\phi = \phi(r, z, t)$, и уравнение Лапласа для потенциала скорости записывается как

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

Его следует решать со следующими граничными условиями:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2= -\frac{p}{\rho}+f(t),\ r=r_0+\eta(z,t), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}=\frac{\partial \phi}{\partial r}-\frac{\partial \eta}{\partial z}\frac{\partial \phi}{\partial z},\ r=r_0+\eta(z,t), \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}=0, \quad r=0, \quad (8)$$

где $p=p(r,z,t)$ — давление в жидкости, а f — произвольная функция времени. Условие (6), которое часто называют динамическим, имеет смысл нестационарного уравнения Бернулли, взятого на свободной границе струи. Кинематическое условие (7) связывает скорость на свободной поверхности жидкости с функцией η, задающей ее форму. Условие (8) соответствует тому, что на оси струи скорость имеет лишь одну, аксиальную, компоненту.

Ограничимся рассмотрением пространственно-локализованных возмущений границы струи, т.е. $\eta \to 0$ при $|z| \to \infty$ (рис. 2). Тогда на бесконечности справедливо

$$\frac{\partial \phi}{\partial r}\to 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z}\to 0, \quad |z|\to\infty. \quad (9)$$

Входящее в (6) давление p, согласно [30], задается выражением (здесь мы не учитываем капиллярные эффекты)

$$p=p_{\mathrm{atm}}+\frac{\mu_0\mu}{2}\left(H_n^2-H_\tau^2\right)-\frac{\mu_0}{2}\left(\tilde{H}_n^2-\tilde{H}_\tau^2\right), \quad (10)$$

где p_{atm} — постоянное внешнее (атмосферное) давление, H_τ и $\tilde{H}_\tau$ — тангенциальные, а H_n и $\tilde{H}_n$ — нормальные по отношению к свободной границе компоненты напряженности магнитного поля внутри жидкости и соответственно вне ее. Для компонент магнитного поля должны выполняться стандартные граничные условия

$$H_\tau=\tilde{H}_\tau, \quad \mu H_n=\tilde{H}_n. \quad (11)$$

С их использованием можно выразить давление (10) через компоненты напряженности магнитного поля внутри жидкости H_τ и H_n:

$$p=p_{\mathrm{atm}}-\frac{\mu_0(\mu-1)}{2}\left(\mu H_n^2-H_\tau^2\right). \quad (12)$$

Магнитное поле в струе магнитной жидкости ($\mathbf{H}=\{H_r,0,H_z\}$) и в окружающем ее пространстве ($\tilde{\mathbf{H}}=\{\tilde{H}_r,0,\tilde{H}_z\}$) находится из уравнений Максвелла для непроводящей среды в магнитостатическом приближении:

$$\nabla\times\mathbf{H}=0,\ \nabla\cdot\mathbf{H}=0,\ \nabla\times\tilde{\mathbf{H}}=0,\ \nabla\cdot\tilde{\mathbf{H}}=0. \quad (13)$$

Эти уравнения следует решать совместно с условиями на свободной границе (11), условиями на оси системы и на поверхности соленоида

$$H_r=0, \quad r=0, \quad (14)$$

$$\tilde{H}_r=0, \quad r=R_0, \quad (15)$$

а также с условиями на бесконечности

$$H_z\to H_0, \quad H_r\to 0, \quad |z|\to\infty, \quad (16)$$

$$\tilde{H}_z\to H_0, \quad \tilde{H}_r\to 0, \quad |z|\to\infty. \quad (17)$$

Пользуясь определенным произволом в выборе потенциала скорости, можно использовать вместо пары условий (9) единственное условие

$$\phi\to 0, \quad |z|\to\infty. \quad (18)$$

В этом случае входящая в уравнение Бернулли функция f будет определена однозначно как

$$f=\frac{p_{\mathrm{atm}}}{\rho}-\frac{\mu_0(\mu-1)H_0^2}{2\rho}.$$

В совокупности приведенные в разд. 2 уравнения полностью описывают нелинейную эволюцию возмущений границы струи магнитной жидкости под влиянием внешнего аксиального магнитного поля.

3. Предел большой магнитной проницаемости

Рассмотрим реализуемый для ферромагнитных жидкостей случай большой магнитной проницаемости $\mu \gg 1$. В разд. 1 мы на основе анализа закона дисперсии (1) показали, что в этом пределе линейные волны распространяются вдоль оси струи в положительном и отрицательном направлениях без искажений — см. решение (4). Условием применимости линейного приближения является малость деформаций струи, $|\partial\eta/\partial z| \ll 1$. Здесь мы будем рассматривать распространение сильнонелинейных волн, т.е. случай возмущений границы струи с большими углами наклона, $\partial\eta/\partial z=O(1)$.

Анализируя условия (11) и (14)–(17), можно прийти к выводу, что величины $\tilde{H}_\tau/H_0$, H_τ/H_0 и $\tilde{H}_n/H_0$ при разложении по малому параметру $1/\mu$ относятся к порядку $O(1)$, а величина H_n/H_0 — к более высокому порядку малости $O(1/\mu)$. Нормальная компонента напряженности магнитного поля в жидкости оказывается много меньше по абсолютному значению тангенциальной компоненты, и можно считать, что силовые линии поля направлены по касательной к искривленной границе. Это приводит к тому, что задача нахождения распределения магнитного поля внутри струи отщепляется от общей задачи нахождения распределения поля во всем пространстве. Для предельного случая $\mu \gg 1$ можно положить тождественно

$$H_n=0, \quad (19)$$

и искать распределение поля, для которого граничная силовая линия будет лежать на свободной поверхности жидкости.

Отметим, что задача нахождения распределения поля вне жидкости не отщепляется от исходной задачи для предела $\mu \gg 1$. Для ее решения сначала необходимо найти распределение поля внутри струи, и тем самым определить H_τ, а уже затем решать дополнительную задачу вне струи с граничным условием $\tilde{H}_\tau = H_\tau$. В результате будет, в частности, найдено, распределение $\tilde{H}_n$. Это с учетом связи $H_n = \tilde{H}_n/\mu$ позволит при большом, но конечном, μ вычислить нормальную компоненту магнитного поля внутри жидкости, т. е. фактически сделать следующую итерацию (на первой итерации $H_n \equiv 0$). Однако, как оказывается, для целей настоящей работы реализовывать такую итерационную процедуру не требуется. Для описания движения жидкости нам необходимо найти обусловленное влиянием магнитного поля давление (12) на границе жидкости, а оно может быть найдено с использованием лишь распределения поля внутри струи. Действительно, для входящих в правую часть (12) слагаемых имеем

$$H_\tau^2/H_0^2 = O(1), \quad \mu H_n^2/H_0^2 = O(1/\mu).$$

Таким образом, содержащее нормальную компоненту магнитного поля слагаемое в (12) мало, и достаточно ограничиться первым приближением, в котором $H_n \equiv 0$. Тогда в основном порядке разложения по малому параметру $1/\mu$ имеем

$$p \approx -\frac{\mu_0 \mu H_\tau^2}{2}, \quad f \approx -\frac{\mu_0 \mu H_0^2}{2\rho}. \tag{20}$$

Принимая во внимание уравнения магнитостатики (13), можно уменьшить число неизвестных функций, введя вспомогательный скалярный потенциал $\psi(r, z, t)$ так, что $\mathbf{H} = \nabla\psi$. Этот потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla^2\psi = 0$, записываемому в случае осевой симметрии задачи как

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0. \tag{21}$$

Граничные условия к (21) получим, переходя в (14), (16), (19) от компонент магнитного поля к потенциалу ψ посредством соотношений $H_r = \partial\psi/\partial r$ и $H_z = \partial\psi/\partial z$. Находим

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \tag{22}$$

$$\psi \to H_0 z, \quad |z| \to \infty, \tag{23}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad r = r_0 + \eta(z, t). \tag{24}$$

Здесь мы использовали выражение

$$H_n\sqrt{1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial z}\right)^2} = H_r - \frac{\partial\eta}{\partial z}H_z,$$

связывающее нормальную компоненту напряженности магнитного поля H_n с аксиальной и радиальной компонентами H_z и H_r.

Наконец, при использовании потенциала ψ и с учетом соотношений (19) и (20), нестационарное уравнения Бернулли (6) перепишется как

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 = \frac{\mu_0\mu}{2\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2 + \frac{\mu_0\mu}{2\rho}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 - \frac{\mu_0\mu H_0^2}{2\rho}, \quad r = r_0 + \eta(z, t). \tag{25}$$

Остальные уравнения, определяющие динамику жидкости, остаются без изменений. Еще раз обратим внимание на важную особенность получаемых для случая $\mu \gg 1$ уравнений движения: поведение жидкости полностью определятся парой скалярных потенциалов ϕ и ψ, причем области их определения ($0 \le r \le r_0 + \eta(z, t)$ и $-\infty < z < \infty$) совпадают.

4. Точные волновые решения

В разд. 4 мы найдем точные решения уравнений движения магнитной жидкости, соответствующие предельному случаю $\mu \gg 1$. Понятно, что невозмущенное состояние системы соответствует тривиальному решению

$$\eta = 0, \quad \phi = 0, \quad \psi = H_0 z$$

уравнений движения. Представим потенциал ψ в виде суммы невозмущенного решения и возмущения Ψ (в невозмущенном состоянии $\Psi = 0$):

$$\psi(r, z, t) = H_0 z + \Psi(r, z, t).$$

Возмущенный потенциал Ψ, как и исходный ψ, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} = 0. \tag{26}$$

Граничные условия для него, как несложно получить из (22)–(24), имеют вид

$$\frac{\partial\Psi}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \tag{27}$$

$$\Psi \to 0, \quad |z| \to \infty, \tag{28}$$

$$H_0\frac{\partial\eta}{\partial z} = \frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad r = r_0 + \eta(z, t). \tag{29}$$

Уравнения, описывающие нелинейные бегущие волны, получаются из приведенных выше уравнений движения посредством подстановки

$$\eta(z, t) = \eta^\pm(z \mp Ct), \;\; \phi(r, z, t) = \phi^\pm(r, z, \mp Ct),$$
$$\Psi(r, z, t) = \Psi^\pm(r, z, \mp Ct), \tag{30}$$

где верхние знаки соответствуют волнам, распространяющимся в положительном направлении оси z с некоторой скоростью $C > 0$, а нижние — в отрицательном. Соответствующие подстановке (30) волны распространяются без искажений — их профиль не меняется в движущихся с волнами системах координат. Как следует из (5) и (26), функции $\phi^{\pm}$ и $\Psi^{\pm}$ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\frac{\partial^2\phi^{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial r} + \frac{\partial^2\phi^{\pm}}{\partial z^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2\Psi^{\pm}}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial\Psi^{\pm}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi^{\pm}}{\partial z^2} = 0 \qquad (31)$$

с условиями, вытекающими из (7), (8), (18), (27)–(29):

$$\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial r} = 0, \ \ \frac{\partial\Psi^{\pm}}{\partial r} = 0, \ \ r = 0, \qquad (32)$$

$$\phi^{\pm} \to 0, \quad \Psi^{\pm} \to 0, \quad |z| \to \infty, \qquad (33)$$

$$\mp C\,\frac{\partial\eta^{\pm}}{\partial z} = \frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial r} - \frac{\partial\eta^{\pm}}{\partial z}\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial z},$$

$$H_0\,\frac{\partial\eta^{\pm}}{\partial z} = \frac{\partial\Psi^{\pm}}{\partial r} - \frac{\partial\eta^{\pm}}{\partial z}\frac{\partial\Psi^{\pm}}{\partial z}, \ \ r = r_0 + \eta^{\pm}. \qquad (34)$$

Отсюда видно, что функции $\phi^{\pm}$ и $\Psi^{\pm}$ задаются совпадающими (с точностью до констант в (34)) уравнениями, и потому связаны простым соотношением:

$$C\Psi^{\pm} = \mp H_0\phi^{\pm}. \qquad (35)$$

Такая простая линейная связь обусловлена тем, что для рассматриваемых бегущих волн в системах координат, движущихся вместе с волнами, скорость жидкости направлена по касательной к границе, т. е. ведет себя также как магнитное поле в пределе $\mu \gg 1$.

С учетом связи (35) нестационарное уравнение Бернулли (25) примет вид

$$\mp C\,\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial z}\right)^2 = \mp\frac{\mu_0\mu H_0^2}{\rho C}\,\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial z}$$
$$+ \frac{\mu_0\mu H_0^2}{2\rho C^2}\left(\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial r}\right)^2 + \frac{\mu_0\mu H_0^2}{2\rho C^2}\left(\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial z}\right)^2, \ \ r = r_0 + \eta^{\pm}$$

и, как несложно заметить, факторизуется как

$$\left(\frac{\mu_0\mu H_0^2}{2\rho C^2} - \frac{1}{2}\right)\left[\left(\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial z}\right)^2 \mp 2C\,\frac{\partial\phi^{\pm}}{\partial z}\right] = 0,$$
$$r = r_0 + \eta^{\pm}.$$

Очевидно, что последнее уравнение превращается в тождество при

$$C = H_0\sqrt{\mu_0\mu/\rho} = V_A.$$

Как следствие, не возникает никаких ограничений на профиль бегущих волн $\eta^{\pm}$ — он оказывается произвольным. При этом потенциал $\phi^{\pm}$ (и, следовательно, связанный с ним потенциал $\Psi^{\pm}$) находится по заданным $\eta^{\pm}$ из уравнения Лапласа (31) с граничными условиями (32)–(34). Приведем возникающие при рассмотрении бегущих волн связи между потенциалами ϕ и ψ, а также векторами скорости $\boldsymbol{v}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\psi = H_0 z \mp \phi\sqrt{\rho/(\mu_0\mu)}, \ \ \mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z \mp \boldsymbol{v}\sqrt{\rho/(\mu_0\mu)}. \quad (36)$$

Для найденных решений скорость распространения нелинейных волн вдоль оси z не зависит от их профиля, и по абсолютному значению равна альфвеновской скорости V_A. Фактически это означает, что эволюция свободной поверхности струи описывается простейшим линейным уравнением

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} \pm V_A\,\frac{\partial\eta}{\partial z} = 0, \qquad (37)$$

к которому редуцируется волновое уравнение (3) при отдельном рассмотрении распространяющихся по направлению (верхний знак) и против направления (нижний знак) оси z волн.

Таким образом, нелинейность не приводит к искажению профиля волн произвольной амплитуды, что обеспечивает их структурную устойчивость.

5. Аналогия с альфвеновскими волнами

В полученных нами выше точных волновых решениях прослеживается определенная аналогия с альфвеновскими волнами, распространяющимися в неограниченном пространстве. Уравнения магнитной гидродинамики несжимаемой идеально проводящей невязкой жидкости с $\mu = 1$ во внешнем однородном магнитном поле имеют следующий вид [22]:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\mathbf{H} = (\mathbf{H}\nabla)\boldsymbol{v}, \qquad (38)$$

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\nabla)\boldsymbol{v}\right] = -\nabla\left(p + \frac{\mu_0|\mathbf{H}|^2}{2}\right) + \mu_0(\mathbf{H}\nabla)\mathbf{H}, \qquad (39)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{H} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \qquad (40)$$

$$\boldsymbol{v} \to 0, \quad \mathbf{H} \to H_0\mathbf{e}_z, \quad |\mathbf{r}| \to \infty. \qquad (41)$$

Нетривиальное семейство точных решений этих уравнений можно получить, используя следующие связи между неизвестными функциями $\boldsymbol{v}$, $\mathbf{H}$ и p [22]:

$$\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z \mp \boldsymbol{v}\sqrt{\rho/\mu_0}, \qquad (42)$$

$$p + \frac{\mu_0|\mathbf{H}|^2}{2} = \text{const}. \qquad (43)$$

Связь (42) совпадает с использованной нами выше связью (36) при $\mu = 1$. Уравнения (38)–(41) оказываются совместными с условиями (42) и (43), при этом пара уравнений (38) и (39) сводится к единственному простейшему волновому уравнению

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \pm V_A \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial z} = 0, \ V_A = H_0\sqrt{\mu_0/\rho}, \qquad (44)$$

по форме совпадающему с (37). Решением (44) является

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{\pm}(x, y, z, \mp V_A t),$$

где $\boldsymbol{v}^{\pm}$ — произвольные вектор-функции, описывающие возмущения поля скоростей (а также связанных с ним полей $\mathbf{H}$ и p), распростаняющиеся без искажений с альфвеноской скоростью V_A вдоль направления (верхний знак), либо против направления (нижний знак) внешнего магнитного поля, т. е. оси z. Единственными ограничениями на $\boldsymbol{v}^{\pm}$ являются следующие из уравнений (40), (41) необременительные условия

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}^{\pm} = 0,$$

$$\boldsymbol{v}^{\pm} \to 0, \quad |\mathbf{r}| \to \infty.$$

Таким образом, несмотря на очевидные принципиальные различия в постановке задач (в нашем случае жидкость неэлектропроводная и занимает область, ограниченную свободной поверхностью; для классических альфвеновских волн жидкость идеально проводящая и занимает все пространство), динамика нелинейных бегущих волн в обеих системах аналогична. Нелинейные волны способны распространяться (по отдельности) по направлению и против направления внешнего магнитного поля без искажений.

Заключение

В работе продемонстрировано, что по поверхности цилиндрической струи магнитной жидкости, помещенной в сильное магнитное поле коаксиального с ней соленоида, могут без искажений распространяться волны с произвольной амплитудой. Эта ситуация реализуется для жидкости с большим значением магнитной проницаемости.

Подобное поведение волн на поверхности струи соответствует тому, что их распространение описывается парой линейных уравнений (37) — одно уравнение для волн в положительном, а другое — отрицательном направлении оси z. Однако это не означает, что влиянием нелинейности можно пренебречь. Нелинейность будет определять взаимодействие противоположно направленных волн. Для волн на плоской поверхности диэлектрической/магнитной жидкости в тангенциальном электрическом/магнитном поле подобное взаимодействие было рассмотрено в работах [31–35]. Было установлено, что при столкновении встречные уединенные волны сохраняют импульс и энергию [31]. При этом волны не сохраняют свою форму. Они деформируются, что, в конечном итоге, приводит к формированию сингулярностей — областей с большими градиентами скоростей и полей [32]. Аналогичное рассмотрение для струи затруднено тем, что в цилиндрической геометрии не применим использовавшийся в [31,32] метод динамических конформных преобразований. Тем не менее естественно предположить, что взаимодействие встречных волн будет носить сходный характер.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10012, https://rscf.ru/project/23-71-10012/.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] J.R. Melcher. *Field-Coupled Surface Waves* (MIT Press, Cambridge, MA, 1963)

[2] R.E. Zelazo, J.R. Melcher. J. Fluid Mech., **39** (1), 1 (1969). DOI: 10.1017/S0022112069002011

[3] R.E. Rosensweig. Ann. Rev. Fluid Mech., **19**, 437 (1987). DOI: 10.1146/annurev.fl.19.010187.002253

[4] В.М. Коровин. ЖТФ, **94** (5), 722 (2024). DOI: 10.61011/JTF.2024.05.57810.263-23 [V.M. Korovin. Tech. Phys., **69** (5), 675 (2024). DOI: 10.61011/TP.2024.05.58516.263-23]

[5] M.D. Cowley, R.E. Rosensweig. J. Fluid Mech., **30** (4), 671 (1967). DOI: 10.1017/S0022112067001697

[6] Н.Г. Тактаров. Магнитная гидродинамика, **2**, 35 (1975). [N.G. Taktarov. Magnetohydrodynamics, **11** (2), 156 (1975).]

[7] P.A. Yakubenko, G.A. Shugai. Fluid Dynamics Research, **18**, 325 (1996). DOI: 10.1016/0169-5983(96)00020-2

[8] Н.Г. Тактаров, А.А. Кормилицин. Известия вузов. Поволжский регион, **1** (37), 13 (2016).

[9] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability* (Clarendon Press, Oxford, 1961)

[10] R.W. Lardner, S.K. Trehan. Astrophys. Space. Sci., **96**, 261 (1983). DOI: 10.1007/BF00651671

[11] В.Г. Баштовой, М.С. Краков. ПМТФ, **4**, 147 (1978). [V.G. Bashtovoi, M.S. Krakov. J. Appl. Mech. Tech. Phys., **19** (4), 541 (1978). DOI: 10.1007/BF00859405]

[12] R. Canu, M.-C. Renoult. J. Fluid Mech., **915**, A137 (2021). DOI: 10.1017/jfm.2021.171

[13] M. Fabian, P. Burda, M. Šviková, R. Huňady. J. Magn. Magn. Mater., **431**, 196 (2017). DOI: 10.1016/j.jmmm.2016.09.052

[14] В.И. Архипенко, Ю.Д. Барков, В.Г. Баштовой, М.С. Краков. Изв. АН СССР. МЖГ, **4**, 3 (1980). [V.I. Arkhipenko, Yu.D. Barkov, V.G. Bashtovoi, M.S. Krakov. Fluid Dynamics, **5**, 477 (1980). DOI: 10.1007/BF01089602]

[15] В.И. Архипенко, Ю.Д. Барков. ПМТФ, **3**, 98 (1980). [V.I. Arkhipenko, Yu.D. Barkov. J. Appl. Mech. Tech. Phys., **21**, 371 (1980). DOI: 10.1007/BF00920775]

[16] E. Bourdin, J.-C. Bacri, E. Falcon. Phys. Rev. Lett., **104**, 094502 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevLett.104.094502

[17] В.Г. Баштовой, Р.А. Фойгель. Изв. АН СССР. МЖГ, **5**, 103 (1984). [V.G. Bashtovoi, R.A. Foigel'. Fluid Dynamics, **9**, 759 (1984). DOI: 10.1007/BF01093544]

[18] M.D. Groves, D.V. Nilsson. J. Math. Fluid Mech., **20**, 1427 (2018). DOI: 10.1007/s00021-018-0370-9
[19] M.G. Blyth, E.I. Părău. J. Fluid Mech., **750**, 401 (2014). DOI: 10.1017/jfm.2014.275
[20] A. Doak, J.M. Vanden-Broeck. J. Fluid Mech., **865**, 414 (2019). DOI: 10.1017/jfm.2019.60
[21] S.K. Malik, M. Singh. Int. J. Engng Sci., **26** (2), 175 (1988). DOI: 10.1016/0020-7225(88)90103-6
[22] А.Г. Куликовский, Г.А. Любимов. *Магнитная гидродинамика* (Логос, М., 2005)
[23] E.N. Parker. *Cosmical Magnetic Fields: Their Origin and Their Activity* (Oxford University Press, Oxford, 1979)
[24] N.M. Zubarev. Phys. Lett. A, **333**, 284 (2004). DOI: 10.1016/j.physleta.2004.10.058
[25] Н.М. Зубарев, О.В. Зубарева. Письма в ЖТФ, **32** (20), 40 (2006). [N.M. Zubarev, O.V. Zubareva. Tech. Phys. Lett., **32** (10), 886 (2006). DOI: 10.1134/S106378500610021X]
[26] Н.М. Зубарев. Письма в ЖЭТФ, **89** (6), 317 (2009). [N.M. Zubarev. JETP Lett., **89** (6), 271 (2009). DOI: 10.1134/S0021364009060022]
[27] N.M. Zubarev, O.V. Zubareva. Phys. Rev. E, **82**, 046301 (2010). DOI: 10.1103/PhysRevE.82.046301
[28] A.Yu. Solovyova, E.A. Elfimova. J. Magn. Magn. Mater., **495**, 165846 (2020). DOI: 10.1016/j.jmmm.2019.165846
[29] C. Khokhryakova, K. Kostarev, I. Mizeva. Fluid Dynamics & Materials Processing, **20** (10), 2205 (2024). DOI: 10.32604/fdmp.2024.051053
[30] Л.Д. Ландау. *Электродинамика сплошных сред* (Физматлит, М., 2003)
[31] Н.М. Зубарев, Е.А. Кочурин. Письма в ЖЭТФ, **99** (11), 729 (2014). DOI: 10.7868/S0370274X14110046 [N.M. Zubarev, E.A. Kochurin. JETP Lett., **99** (11), 627 (2014). DOI: 10.1134/S0021364014110125]
[32] Е.А. Кочурин. ПМТФ, **59** (1), 91 (2018). DOI: 10.15372/PMTF20180110 [E.A. Kochurin. J. Appl. Mech. Tech. Phys., **59**, 79 (2018). DOI: 10.1134/S0021894418010108]
[33] E. Kochurin, G. Ricard, N. Zubarev, E. Falcon. Phys. Rev. E, **105** (6), L063101 (2022). DOI: 10.1103/PhysRevE.105.L063101
[34] I.A. Dmitriev, E.A. Kochurin, N.M. Zubarev. IEEE Trans. Dielectr. Electr. Insul., **30** (4), 1408 (2023). DOI: 10.1109/TDEI.2023.3256350
[35] E.A. Kochurin. J. Magn. Magn. Mater., **503**, 166607 (2020). DOI: 10.1016/j.jmmm.2020.166607