

06

## Моды и пороговое условие градиентного волновода с неоднородными усилением и поглощением

© А.А. Гладкий, Н.Н. Розанов

ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН,

Санкт-Петербург, Россия

e-mail: gladkij.aa@edu.spbstu.ru

Поступила в редакцию 03.05.2024 г.

В окончательной редакции 15.07.2024 г.

Принята к публикации 30.10.2024 г.

Проведён анализ мод линейного градиентного оптического волновода с квадратичной радиальной зависимостью поглощения и усиления. При этом профили показателя преломления и поглощения/усиления различаются. Рассчитаны параметры, при которых реализуется порог генерации, т.е. поглощение излучения компенсируется усилением, что обеспечивает распространение пучка излучения с неизменной амплитудой.

**Ключевые слова:** градиентный волновод, усиление, пороговое условие, гауссовы пучки.

DOI: 10.61011/OS.2024.12.59799.6430-24

### Введение

Дифракционное расплывание излучения, сопровождающееся уменьшением его интенсивности, может компенсироваться неоднородным профилем показателя преломления среды — случай градиентных оптических волноводов [1]. Однако в реальных средах имеется поглощение излучения, что приводит к постепенному убыванию интенсивности. Профили показателя преломления и поглощения в общем случае различаются, обычно поглощение можно считать пространственно однородным. В связи с этим возникает задача компенсации такого поглощения усилением, которое существенно неоднородно и преобладает в осевой области волновода. Это и является целью настоящего сообщения. Отметим, что эта задача актуальна и в ряде проблем нелинейной оптики, например для солитонов самоиндуцированной прозрачности [2–4].

### Теоретическое описание

Распространение пучка монохроматического излучения с электрической напряженностью  $\vec{E}$  и частотой  $\omega$  в линейной среде с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon$ , зависящей от расстояния до оси волновода  $r$ , описывается уравнением Гельмгольца

$$\Delta \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(r) \vec{E} = 0, \quad (1)$$

где  $c$  — скорость света.

Перейдём от уравнения для амплитуды  $\vec{E}$  к уравнению для огибающей [5–7], подставляя  $\vec{E} = E \exp(ik_0 z)$  в уравнение (1):

$$2ik_0 \frac{\partial E}{\partial z} + \Delta_{\perp} E + k_0^2 \frac{\delta \varepsilon(r)}{\varepsilon_0} E = 0, \quad (2)$$

где  $E$  — медленно меняющаяся огибающая,  $\varepsilon(r) = \varepsilon_0 + \delta \varepsilon(r)$ ,  $k_0^2 = (\omega/c)^2 \varepsilon_0$ ,  $\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ ,  $x$  и  $y$  — поперечные декартовы координаты, излучение распространяется вдоль оси  $z$ . Нас интересуют осесимметричные моды без угловой зависимости. Для них в цилиндрической системе координат

$$E = A(r) \exp(i\delta k z).$$

В среде с поглощением добавка к волновому числу  $\delta k$  в общем случае комплексная. Получим обыкновенное дифференциальное уравнение для  $A(r)$ :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dA}{dr} \right) - 2k_0 \delta k A + k_0^2 \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0} A = 0. \quad (3)$$

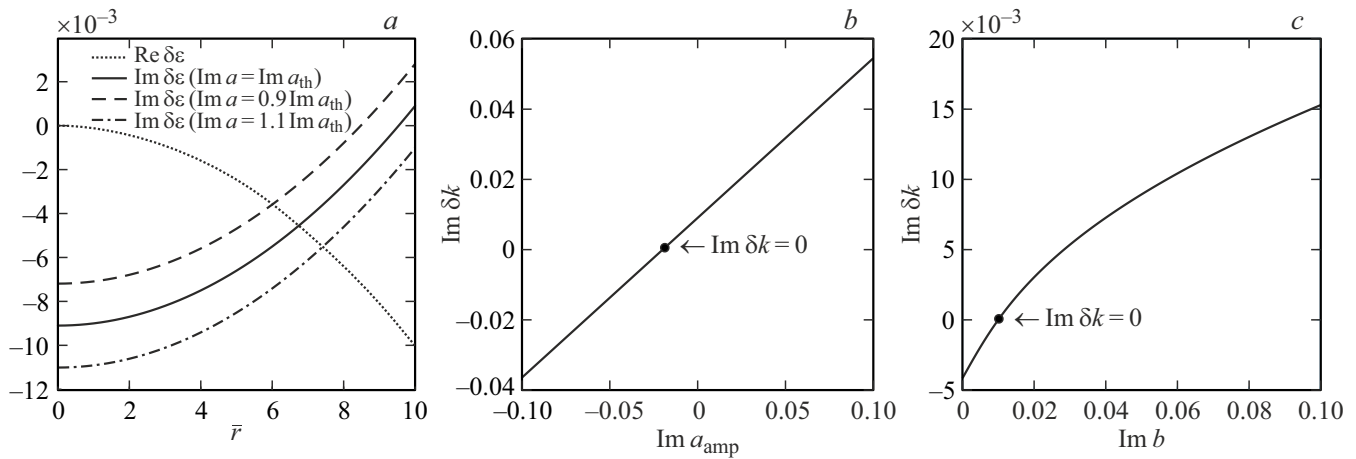
Будем искать решение в виде гауссова пучка  $A(r) = A_0 \exp(-\gamma r^2)$  [1]. В рассматриваемом случае величина  $\gamma$  комплексная,  $\text{Im} \gamma$  отвечает за кривизну волнового фронта. После подстановки в (3) получим

$$4\gamma(1 - \gamma r^2) + 2k_0 \delta k = k_0^2 \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon_0}. \quad (4)$$

Из (4) виден подходящий вид  $\delta \varepsilon$ :  $\delta \varepsilon(r) = a + b(\frac{r}{r_0})^2$ , задаваемые постоянные  $a$  и  $b$  — комплексные. Приравнивая члены при разных степенях  $r$ , получим два комплексных уравнения для комплексных неизвестных  $\delta k$  и  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} 4\gamma^2 &= -\frac{k_0^2}{\varepsilon_0} \frac{b}{r_0^2}, \\ 4\gamma + 2k_0 \delta k &= \frac{k_0^2}{\varepsilon_0} a. \end{aligned} \quad (5)$$

Пороговое условие выполняется при  $\text{Im} \delta k = 0$ , это накладывает ограничения на параметры  $a$  и  $b$ . Из первого уравнения в (5) находим одно значение  $\gamma$  (требуем



(a) Профили вещественной (пунктирная линия) и мнимых частей добавки  $\delta\epsilon$  к диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  в зависимости от безразмерного расстояния от оси  $z$ . Сплошная линия соответствует пороговому случаю  $\text{Im}a = (\text{Im}a)_{\text{th}}$ , штриховая — случаю  $\text{Im}a = 0.9(\text{Im}a)_{\text{th}}$ , штрихпунктирная —  $\text{Im}a = 1.1(\text{Im}a)_{\text{th}}$ . (b) Изменение значения  $\text{Im}\delta k$  в зависимости от  $\text{Im}a_{\text{amp}}$  при  $\text{Im}b = 0.01$  и  $\text{Im}a_{\text{loss}} = 0.01$ . Пороговое значение достигается при  $\text{Im}a_{\text{amp}} \approx -0.0191$ . (c) Изменение значения  $\text{Im}\delta k$  в зависимости от  $\text{Im}b$  при  $\text{Im}a_{\text{amp}} = -0.0191$  и  $\text{Im}a_{\text{loss}} = 0.01$ . Пороговое значение достигается при  $\text{Im}b \approx 0.01$ .

$\text{Re}\gamma > 0$ ). После чего из второго уравнения в (5) находим также одно значение  $\delta k$ . Ненулевое значение  $\text{Im}\delta k$  сохраняет экспоненциальный множитель  $\exp(-\text{Im}\delta k z)$ , при  $\text{Im}\delta k > 0$  происходит затухание излучения, а при  $\text{Im}\delta k < 0$ , наоборот, усиление. Таким образом, получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \text{Re}\gamma &= \frac{\omega}{\sqrt{2}r_0c} \sqrt{|b| - \text{Re}b}, \\ \text{Im}\gamma &= -\frac{\omega}{\sqrt{2}r_0c} \frac{\text{Im}b}{\sqrt{|b| - \text{Re}b}}, \\ \text{Re}\delta k &= -\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2}r_0} \sqrt{|b| - \text{Re}b} - \frac{\omega}{2c} \text{Re}a \right], \\ \text{Im}a &= -\frac{\sqrt{2}c}{r_0\omega} \frac{\text{Im}b}{\sqrt{|b| - \text{Re}b}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Мы считаем заданным профиль вещественного показателя преломления (величины  $\text{Re}a$  и  $\text{Re}b$ ). Величины же  $\text{Im}a$  (пропорционально усилению на оси волновода) и  $\text{Im}b$  (определяет радиальный профиль усиления/поглощения) варьируют. Пороговое условие достигается при указанном в последнем уравнении (6) соотношении двух последних параметров. По этому соотношению можно найти требуемое значение усиления на оси волновода в зависимости от крутизны профиля усиления/поглощения. Без ограничения общности можно считать  $\text{Re}a = 0$ , а для локализации излучения необходимо считать  $\text{Re}b < 0$ . Изначально среда является поглощающей. Параметр  $\text{Im}a$  можно представить в виде  $\text{Im}a = \text{Im}a_{\text{loss}} + \text{Im}a_{\text{amp}}$ , где  $\text{Im}a_{\text{loss}}$  определяет начальное поглощение среды и является известной величиной, а  $\text{Im}a_{\text{amp}}$  является одним из параметров усиления. При правильно подобранных параметрах  $\text{Im}a_{\text{amp}}$  и  $\text{Im}b$  обеспечивается вышеописанное распространение излучения,

а именно:

$$\text{Im}a_{\text{amp}} = -\text{Im}a_{\text{loss}} - \frac{\sqrt{2}c}{r_0\omega} \frac{\text{Im}b}{\sqrt{|b| - \text{Re}b}}. \tag{7}$$

Вещественные части  $a$  и  $b$  задают параметры волновода:

$$\text{Re}\epsilon = \epsilon_0 + \text{Re}a + \text{Re}b \left(\frac{r}{r_0}\right)^2 = \epsilon_0 - |\text{Re}b| \left(\frac{r}{r_0}\right)^2. \tag{8}$$

Мнимые части  $a$  и  $b$  определяют характер изменения поглощения или усиления среды в зависимости от расстояния до главной оси распространения излучения  $z$ :

$$\text{Im}\epsilon = \text{Im}a + \text{Im}b \left(\frac{r}{r_0}\right)^2. \tag{9}$$

При  $r = 0$  в среде с усилением  $\text{Im}a < 0$ , когда  $\text{Im}\epsilon$  меняет знак, происходит переход к поглощению излучения на периферии. Обозначим параметр  $\text{Im}a$ , удовлетворяющий пороговому условию (7), как  $(\text{Im}a)_{\text{th}}$ . Это соответствует случаю, когда усиление на оси  $z$  компенсирует дифракцию и поглощение излучения на периферии (рис.а). Если величина  $|\text{Im}a|$  будет меньше порогового значения  $|(\text{Im}a)_{\text{th}}|$ , то усиления будет недостаточно, чтобы компенсировать процессы, приводящие к затуханию амплитуды излучения. Если  $|\text{Im}a|$  будет превышать  $|(\text{Im}a)_{\text{th}}|$ , то возникнет обратная ситуация, когда усиление преобладает над поглощением. На рис. b, c отражено изменение величины  $\text{Im}\delta k$  в зависимости от параметров усиления.

### Заключение

Представленное аналитическое рассмотрение показывает возможность компенсации поглощения излучения в

градиентном волноводе усилением. Найдено пороговое условие, задающее соотношение для параметров диэлектрической проницаемости, при которых излучение распространяется без изменения амплитуды. Описанные эффекты могут проявляться в градиентном оптоволокне, допированном активными центрами с заданным профилем концентрации.

### Финансирование работы

Исследование поддержано Российским научным фондом, грант 23-12-00012.

### Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

### Список литературы

- [1] Д. Маркузе. *Оптические волноводы* (Мир, М., 1974), 576 с.
- [2] S.L. McCall, E.L. Hahn. *Phys. Rev.*, **183**, 457 (1969). DOI: 10.1103/PhysRev.183.457
- [3] Л. Аллен, Дж. Эберли. *Оптический резонанс и двухуровневые атомы* (Мир, М., 1978).
- [4] И.А. Полуэктов, Ю.М. Попов, В.С. Ройтберг. *УФН*, **114** (1), 97 (1974). DOI: 10.3367/UFNr.0114.197409e.0097
- [5] А.И. Маймистов. *Квант. электрон.*, **40**(9), 801 (2010). DOI: 10.1070/QE2010v040n09ABEH014396
- [6] Н.Н. Розанов. *Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто-* (ФИЗМАТЛИТ, М., 2011).
- [7] A.I. Maimistov, A.M. Basharov. *Nonlinear Optical Waves* (Springer Science+Business Media B.V., Dordrecht, 1999). DOI: 10.1007/978-94-017-2448-7