03

Интеграл Лайона: турбулентная теплопроводность и толщина теплового подслоя

© И.А. Давлетшин

Институт энергетики и перспективных технологий, ФИЦ „Казанский научный центр РАН", Казань, Россия
E-mail: davlet60@mail.ru

Поступило в Редакцию 4 июня 2024 г.
В окончательной редакции 10 сентября 2024 г.
Принято к публикации 10 сентября 2024 г.

Проведен расчет коэффициента теплоотдачи на основе интеграла Лайона по двухслойной модели (тепловой подслой и турбулентное ядро потока). Для определения турбулентной теплопроводности использована модель пути смешения Прандтля. В рамках сделанных допущений интеграл Лайона имеет довольно простой вид. Путем его численного интегрирования получено распределение коэффициента теплоотдачи в зависимости от параметра $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}$, которое хорошо согласуется с соотношением для турбулентной теплоотдачи Диттуса–Боэлтера.

Ключевые слова: интеграл Лайона, турбулентная теплопроводность, тепловой подслой, длина пути смешения.

DOI: 10.61011/PJTF.2025.02.59554.20010

Интеграл Лайона как один из частных случаев уравнения энергии при определенных условиях находит применение в оценке коэффициента теплоотдачи в различных течениях [1,2]. В основном этот интеграл рассматривается в виде

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}} = 2\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^R U R dR\right)^2 \Bigg/ \left[\left(1+\frac{\mathrm{Pr}}{\mathrm{Pr}_t}\frac{\nu_t}{\nu}\right)R\right] dR,$$

где $\mathrm{Nu} = 2\alpha r_0/\lambda$ — число Нуссельта (α — коэффициент теплоотдачи), $R = r/r_0$ — безразмерный радиус (r_0 — радиус канала), $U = u/U_m$ — безразмерная продольная скорость (U_m — среднерасходная скорость), Pr и Pr_t — число Прандтля (молекулярное и турбулентное), ν и ν_t — кинематическая вязкость (молекулярная и турбулентная).

Считается, что использование турбулентного числа Прандтля обеспечивает связь между процессами переноса импульса и теплоты в этом соотношении. Однако определение этого параметра является весьма сложной задачей, и попытки его моделирования и даже экспериментального измерения приводят к громоздким выражениям и неоднозначным результатам [3]. При этом само интегрирование предлагается проводить по трем слоям (вязкий подслой, переходная область и ядро потока). В некоторых случаях считается возможным ограничиться двухслойной моделью (вязкий подслой и ядро потока).

Настоящая работа посвящена определению коэффициента теплоотдачи для турбулентного потока в круглой трубе на основе „более простой" (исходной) формы интеграла Лайона:

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}} = 2\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^R U R dR\right)^2 \Bigg/ \left[\left(1+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)R\right] dR,$$

где λ — молекулярная теплопроводность рабочей среды, $\lambda_t = c_p\rho\langle v't'\rangle/(dt/dy)$ — турбулентная теплопроводность потока (угловыми скобками обозначено осреднение), y — поперечная координата (от стенки), v' — поперечные пульсации скорости, t и t' — температура потока и ее пульсации.

Дополнительно к тем условиям, при которых был получен интеграл Лайона, данная задача будет решаться при следующих допущениях.

1. Рассматривается двухслойная модель потока: тепловой подслой (подслой молекулярной теплопроводности) и ядро потока.

2. В ядре потока используется турбулентный профиль скоростей по закону „1/7".

3. Справедлива модель пути смешения Прандтля как для гидродинамических возмущений потока, так и для тепловых. При этом соотношение между ними $l_m/l_{mT} \approx \sqrt{\mathrm{Pr}}$ (по аналогии с толщинами развивающихся пограничных слоев $\delta/\delta_T \approx \sqrt{\mathrm{Pr}}$).

4. Пульсации скорости v' и температуры t' жестко коррелированы между собой (коэффициент корреляции между ними $r_{vt} \approx 1$). Турбулентность изотропна. Следует отметить, что жидкие металлы ($\mathrm{Pr} \ll 1$) здесь не рассматриваются.

5. Толщина теплового подслоя $y1 \approx \delta 1/\mathrm{Pr}^{1/3}$ ($\delta 1$ — толщина вязкого подслоя) [4].

6. Трение на стенке определяется формулой Блазиуса.

Таким образом, интеграл Лайона будет иметь вид

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}} = 2\int_0^{R1}\left(\int_0^R URdR\right)^2 \Bigg/ \left[\left(1+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)R\right]dR$$

$$+\,2\int_{Rl}^{1}\left(\int_0^R URdR\right)^2 \Bigg/ R\cdot dR.$$

Здесь имеется в виду, что в тепловом подслое $(R1 \leqslant R \leqslant 1)$ турбулентная теплопроводность $\lambda_t = 0$. Коэффициент теплоотдачи Nu будет тем выше, чем больше величина λ_t. Согласно допущению 2, $u/U_0 = (y/r_0)^{1/7}$, где максимальная скорость на оси канала $U_0 = 1.22U_m$. В принятой системе координат $Y = y/r_0 = 1 - R$. Тогда интеграл в числителе (обозначим как I) будет иметь вид

$$I = \int_0^R URdR = \int_0^R 1.22(1-R)^{1/7}RdR$$

$$= 1.22\left[\frac{7(1-R)^{15/7}}{15} - \frac{7(1-R)^{8/7}}{8} - \frac{7}{15} + \frac{7}{8}\right].$$

С отклонениями в пристеночной области $\pm 5\%$ найденный интеграл во всем диапазоне $0 \leqslant R \leqslant 1$ может быть аппроксимирован соотношением $I = 0.52R^2$. Тогда

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}} = 2\int_0^1 0.52^2R^4\Big/\left[\left(1+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)R\right]dR$$

$$= 0.54\int_0^{R1} R^3 \Bigg/ \left(1+\frac{\lambda_t}{\lambda}\right)dR + 0.54\int_{R1}^{1} R^3dR.$$

Рассмотрим знаменатель (обозначим Z) в подынтегральном выражении

$$Z = 1 + \frac{\lambda_t}{\lambda} = 1 + c_p\rho\frac{\langle v't'\rangle}{\lambda\partial t/\partial y}.$$

Здесь все параметры представлены в размерном виде, их можно перевести в безразмерный вид с помощью характерных величин $V' = v'/U_0$, $T' = t'/(T_f - T_w) = t'/\Delta T$, $Y = y/r_0$. Тогда

$$\langle v'/t'\rangle = U_0\Delta T\langle V'T'\rangle, \quad dt/dy = \Delta T/r_0 dT/dY.$$

Отсюда

$$Z = 1 + c_p\rho\frac{U_0r_0\langle V'T'\rangle}{\lambda\partial T/\partial Y}.$$

При

$$\mathrm{Re} = \rho U_m d/\mu = 2\rho U_0 r_0/(1.22\mu)$$

получим

$$Z = 1 + 0.61\mathrm{RePr}\frac{\langle V'T'\rangle}{\partial T/\partial Y}.$$

Согласно допущению 3, для изотропной турбулентности $v' \sim u' = l_m du/dy$ ($l_m = 0.4y$ — длина пути смешения). По аналогии с пульсациями потока представим пульсации температуры: $t' = l_{mT}dt/dy$ (l_{mT} — длина пути смешения для температурных возмущений), где $l_{mT} \approx l_m/\sqrt{\mathrm{Pr}}$. Тогда комплекс параметров, входящий в определение турбулентной теплопроводности, с учетом допущения 4 будет иметь вид

$$\frac{\langle V'T'\rangle}{\partial T/\partial Y} = \frac{0.4Y(dU/dY)0.4Y(dT/dY)}{\sqrt{\mathrm{Pr}}(dT/dY)} = \frac{0.16Y^2(dU/dY)}{\sqrt{\mathrm{Pr}}}.$$

Отметим, что допущение 4 представляется возможным, если отсутствуют не зависящие от возмущений потока пульсации температуры стенки или теплового потока q_w. Тогда

$$Z = 1 + \frac{\lambda_t}{\lambda} = 1 + 0.61\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}\cdot 0.16Y^2\frac{\partial U}{\partial Y}.$$

Для профиля скоростей по закону „1/7“: $dU/dY = d/dY(Y^{1/7}) = Y^{-6/7}/7$. Отсюда с учетом $Y = 1 - R$ имеем $Z = 1 + 0.014\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}(1-R)^{8/7}$.

Таким образом, интеграл Лайона

$$\frac{1}{\mathrm{Nu}} = 0.54\int_0^{R1}\frac{R^3}{1+0.014\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}(1-R)^{8/7}}dR$$

$$+\,0.54\int_{R1}^{1} R^3dR. \tag{1}$$

В имеющихся работах обычно используется разделение пограничного слоя по динамическим параметрам. Однако при рассмотрении процесса передачи тепла логичным выглядит использование их тепловых аналогов. В связи с этим в настоящей работе вместо „вязкого подслоя“ используется „тепловой подслой“. В рамках двухслойной модели вязкий подслой будем считать ограниченным толщиной $yU_\tau/\nu < 10$. Для определения границы вязкого подслоя воспользуемся формулой Блазиуса $\xi = 0.3164/\mathrm{Re}^{0.25}$. Тогда динамическая скорость $U_\tau = (\tau/\rho)^{0.5} = (c_f/2)^{0.5}U_m = 0.2U_m/\mathrm{Re}^{1/8}$, где коэффициент трения $c_f = \xi/4$. Отсюда для вязкого подслоя $Y < 10\nu\mathrm{Re}^{1/8}/(r_0\cdot 0.2U_m)$ или $Y < 100/\mathrm{Re}^{7/8}$. Исходя допущения 5 будем считать, что в подслое толщиной $Y < 100/(\mathrm{Re}^{7/8}\mathrm{Pr}^{1/3})$ передача тепла осуществляется только молекулярной теплопроводностью, а в ядре потока — и молекулярной, и турбулентной. Таким образом, граница теплового подслоя $R1 = 1 - 100/(\mathrm{Re}^{7/8}\mathrm{Pr}^{1/3})$ или $Y1 = 100/(\mathrm{Re}^{7/8}\mathrm{Pr}^{1/3})$. Эта граница может быть представлена как $Y1 = 100/\left((\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}})^{7/8}\mathrm{Pr}^{-0.1}\right)$. Такая запись указывает на зависимость толщины подслоя как от величины $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}$, так и отдельно от значения Pr. Подынтегральные выражения здесь по сути являются распределением термического сопротивления (в условных единицах) по радиусу трубы, а сам интеграл — общим

Результаты расчета

$\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}$	$Y1$	Nu
$5 \cdot 10^3$	$5.8 \cdot 10^{-2}$	24
10^4	$3.2 \cdot 10^{-2}$	39
10^5	$4.2 \cdot 10^{-3}$	218
10^6	$5.6 \cdot 10^{-4}$	1325
10^7	$7.5 \cdot 10^{-5}$	8894

термическим сопротивлением потока. При этом итоговое выражение интеграла Лайона оказалось довольно простым (без громоздких эмпирических соотношений). Результаты численного интегрирования соотношения (1) для сред с умеренными значениями числа Прандтля ($\mathrm{Pr}^{-0.1} \sim 1$) представлены в таблице и на рис. 1, 2. Как видно из рис. 1, максимальные значения термического сопротивления достигаются в пристеночной области канала $Y \to 0$ ($R \to 1$). С ростом $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}$ соотношение между термическими сопротивлениями теплового подслоя и ядра потока заметно меняется: от 77 и 23% при $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}} = 5 \cdot 10^3$ до 40 и 60% при $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}} = 10^7$.

Полученные данные по коэффициенту теплоотдачи (рис. 2) показывают явную связь с эмпирическим соотношением Диттуса–Боэлтера $\left(\mathrm{Nu} = 0.023(\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}})^{0.8}\right)$. Отметим, что с формальной точки зрения в обоих соотношениях теплоотдача определяется одним и тем же параметром — $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}}$. Имеющиеся отклонения порядка 8%, по-видимому, связаны с влиянием факторов, которые здесь не были учтены. В целом же полученное согласование может считаться вполне хорошим, а сделанные допущения физически оправданными, по крайне мере при $\mathrm{Pr}^{-0.1} \sim 1$. В данном случае интеграл Лайона определяет коэффициент теплоотдачи как функцию турбулентной теплопроводности и толщины (термического сопротивления) теплового подслоя: $\mathrm{Nu} = f(\lambda_t, y1)$, где в свою очередь $\lambda_t = f_1(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$ и $y1 = f_2(\mathrm{Re}, \mathrm{Pr})$.

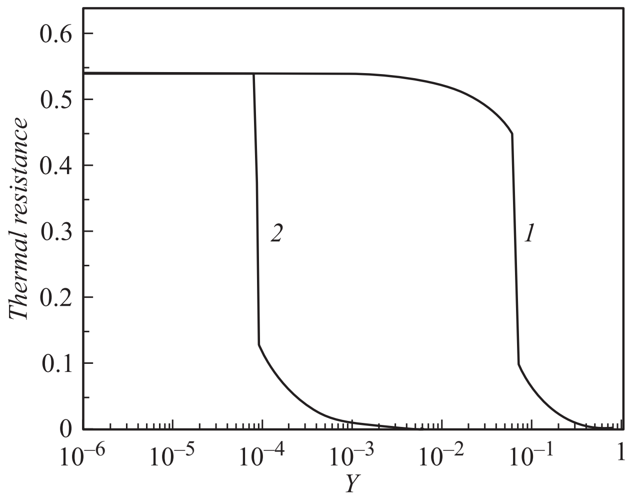

Рис. 1. Термическое сопротивление при $\mathrm{Re}\sqrt{\mathrm{Pr}} = 5 \cdot 10^3$ (*1*) и 10^7 (*2*).

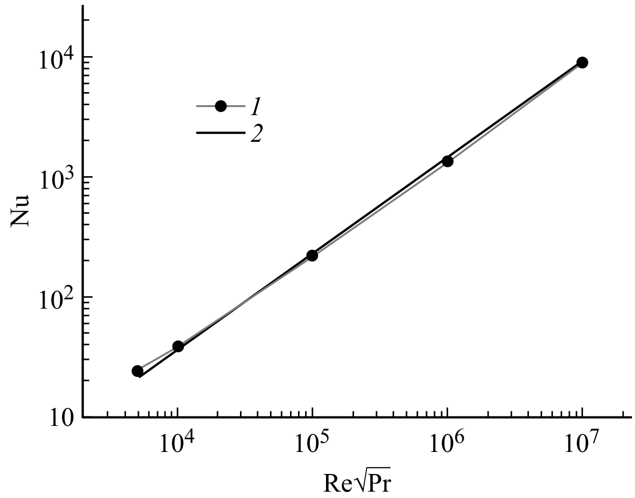

Рис. 2. Коэффициент теплоотдачи. *1* — интеграл (1), *2* — $\mathrm{Nu} = 0.023\mathrm{Re}^{0.8}\mathrm{Pr}^{0.4}$.

Возможно, предложенный подход будет продуктивен и при оценке теплоотдачи в более сложных потоках, например, в каналах с различными интенсификаторами.

Финансирование работы

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 22-19-00507).

Конфликт интересов

Автор заявляет, что у него нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] И.Е. Лобанов, Вестн. Ангар. гос. техн. ун-та, **1** (14), 52 (2020). DOI: 10.36629/2686-777X-2020-1-14-52-59

[2] D. Taler, Procedia Eng., **157**, 148 (2016). DOI: 10.1016/j.proeng.2016.08.350

[3] П.Л. Кириллов, М.И. Терентьева, *Турбулентное число Прандтля (история и современность)* (ФЭИ, Обнинск, 2017). https://www.ippe.ru/images/publications/preprints/2018/3271_kirillov.pdf

[4] Р.И. Созиев, ТВТ, **33** (2), 252 (1995). https://www.mathnet.ru/links/b0b0a3a9477ee3bd32d440bac62b4ad7/tvt2909.pdf [R.I. Soziev, High Temp., **33** (2), 250 (1995).].