

14,15

Формирование вихревых течений в тонких нематических ячейках

© А.В. Захаров, А.А. Вакуленко

Институт проблем машиноведения РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: avak2vale@mail.ru

(Поступила в Редакцию 21 июня 2011 г.)

В окончательной редакции 17 октября 2011 г.)

Теоретическое описание процесса переориентации поля директора и формирования стационарных вихревых потоков в двояко- и наклонно ориентированных тонких жидкокристаллических ячейках под действием градиента температуры дано в рамках нелинейного обобщения классической теории Эриксона–Лесли для описания гидродинамики жидких кристаллов. Это обобщение, допускающее учет термомеханических вкладов в сдвиговое напряжение и в уравнение баланса энтропии, позволило описать процесс формирования стационарного двувихревого потока в двоякоориентированных жидкокристаллических ячейках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-02-00010-а).

1. Введение

Стремительное развитие технологий с использованием жидкокристаллических (ЖК) дисплеев предъявляет жесткие требования к уже существующим ЖК-материалам и стимулирует синтез новых, с заданными оптическими и структурными свойствами. В этой связи одним из наиболее важных параметров ЖК-систем является время переключения ЖК-дисплеев. ЖК-дисплеи состоят из удлиненных прямоугольных ЖК-ячеек, ограниченных поверхностями, покрытыми поверхностно активными веществами, которые способствуют созданию необходимой поверхностной ориентации поля директора \hat{n} (гомеотропной, планарной или наклонной), т.е. усредненной ориентации ЖК-молекул на границе раздела ЖК-фаза–твердое тело [1]. Это так называемая приповерхностная ориентация поля директора [2]. Прилагая электрическое поле \mathbf{E} , например, параллельно однородно ориентированной твистовой ячейке (пикселю), удастся деформировать однородную ориентацию поля директора \hat{n} при значениях электрического поля, превышающих некоторую критическую величину E_{th} [2]. При $E > E_{th}$ описание диссипационных процессов, протекающих в твистовых ЖК-ячейках, допускает ряд релаксационных режимов [3]. Эти режимы характеризуются тем, что возникают течения в ЖК-ячейках, которые влияют на время релаксации поля директора. С целью уменьшения величины времени релаксации поля директора была предложена двоякая приповерхностная ориентация поля директора на одной из ограничивающих поверхностей ЖК-ячейки [4]. Это достигается тем, что на одной половине, например, нижней ограничивающей поверхности поле директора было сориентировано под углом 45° к этой поверхности, в то время как на другой половине — под углом -45° к этой же поверхности. Следует отметить, что в процессе эксплуатации ЖК-дисплеев возникают температурные градиенты, обусловленные незначительным перепадом температуры

на ограничивающих поверхностях. Эти градиенты влияют на структурные и релаксационные свойства ЖК-слоев [5].

Поле директора \hat{n} в такой ЖК-ячейке, будучи возмущенным под действием градиента температуры, релаксирует к равновесному состоянию $\hat{n}_{eq}(\mathbf{r})$, при котором директор образует равновесный угол $\theta_{eq}(\mathbf{r})$ с нормалью к горизонтальным ограничивающим поверхностям. В рамках классической гидродинамики ЖК Эриксона–Лесли [6,7] эволюцию угла $\theta(t, \mathbf{r})$ к его равновесному значению можно рассчитать, основываясь на балансе моментов, действующих на единичный объем ЖК-фазы. Однако всякий физический процесс, обусловленный реориентацией директора, инициирует поле скоростей $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ в ЖК-ячейке, которое, в свою очередь, взаимодействует с полем директора $\hat{n}(t, \mathbf{r})$ и полем температуры $T(t, \mathbf{r})$. Это так называемый эффект обратного течения [8].

Полное исследование эффекта обратного течения может быть осуществлено в рамках гидродинамического описания ЖК-фазы, построенного на балансе вращательных моментов, линейных моментов (аналоге уравнения Навье–Стокса) и балансе энтропии такой анизотропной системы, как нематический ЖК.

Целью настоящей статьи является полное исследование гидродинамических течений, возникающих в двоякоориентированных ЖК-ячейках под действием градиента температуры, направленного от одной, более холодной, к другой, более теплой, ограничивающей поверхности.

2. Основные уравнения

Рассмотрим двоякоориентированную ЖК-ячейку (ДЯЖК-ячейку) микроскопических размеров, ограниченную горизонтальными и вертикальными поверхностями, размерами $2L$ и $2d$ соответственно. Будем предполагать, что температура на верхней ограничивающей поверхности

сти поддерживается равной T_w , или

$$T_{-L < x < L, z = d} = T_w, \quad (1)$$

в то время как на всех остальных поверхностях поддерживается более низкая температура T_c , так что можно записать граничное условие в виде

$$T_{-L \leq x \leq L, z = -d} = T_{x = -L, -d < z < d} = T_{x = L, -d < z < d} = T_c. \quad (2)$$

Координатная система, необходимая для описания эволюции поля директора $\hat{\mathbf{n}}(t, \mathbf{r})$ предполагает, что вектор $\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_z \hat{\mathbf{k}} = \cos \theta \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta \hat{\mathbf{k}}$ все время находится в плоскости XOZ , образованной осью X , совпадающей с направлением директора на обеих горизонтальных поверхностях ($\hat{\mathbf{i}} \parallel \hat{\mathbf{n}}_{z = \pm d}$), и осью Z , совпадающей с направлением директора на обеих вертикальных поверхностях ($\hat{\mathbf{k}} \parallel \hat{\mathbf{n}}_{x = \pm L}$). Здесь $\hat{\mathbf{i}}$ — единичный орт оси X , $\hat{\mathbf{k}}$ — единичный орт оси Z и $\hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}$ — единичный орт оси Y соответственно. Таким образом, двоякая ориентация поля директора на нижней ограничивающей поверхности предполагает, что

$$\begin{aligned} \theta_{0 \leq x < L, z = -d} &= \frac{\pi}{4}, & \theta_{-L < x < 0, z = -d} &= -\frac{\pi}{4}, \\ \theta_{-L < x < L, z = d} &= 0, \\ \theta_{x = L, -d < z < d} &= \frac{\pi}{2}, & \theta_{x = -L, -d < z < d} &= -\frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Более того, мы налагаем на поле скорости условие прилипания на всех ограничивающих поверхностях

$$\mathbf{v}_{-L < x < L, z = \pm d} = \mathbf{v}_{x = \pm L, -d < z < d} = 0. \quad (4)$$

В дальнейшем будем исследовать гидродинамические режимы, возникающие под действием малых градиентов температуры $\nabla T \sim 1.0 \text{ K}/\mu\text{m}$, направленных поперек тонких ДЯЖК-ячеек. Такой выбор размеров ДЯЖК-ячеек ($L \gg d$) продиктован желанием уменьшить влияние боковых ограничивающих поверхностей на переориентацию поля директора в объеме этих ЖК-ячеек. В работе принимается значение геометрического фактора ячейки $\frac{d}{L} = 0.1$.

Будем рассматривать тонкие ЖК-ячейки толщиной $d \sim 1-5 \mu\text{m}$, в которых плотность ЖК-материала ρ практически постоянна. Таким образом, условие несжимаемости ЖК-материала $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ принимает вид

$$u_{,x} + w_{,z} = 0, \quad (5)$$

где $u \equiv v_x(t, x, z)$, $w \equiv v_z(t, x, z)$ — компоненты вектора скорости $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{i}} + w\hat{\mathbf{k}}$, а $u_{,x} = \frac{\partial u}{\partial x}$.

Гидродинамические уравнения, описывающие переориентацию поля директора под действием градиента температуры, включают уравнение баланса моментов, действующих на единичный ЖК-объем [5], $\mathbf{T}_{\text{el}} + \mathbf{T}_{\text{vis}} + \mathbf{T}_{\text{tm}} = 0$, где \mathbf{T}_{el} — упругий, \mathbf{T}_{vis} — вязкий и \mathbf{T}_{tm} — термомеханический вклады (см. Приложение), и аналог

уравнения Навье–Стокса для случая баланса линейных моментов, действующих на единичный ЖК-объем,

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (6)$$

где $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{vis}} + \boldsymbol{\sigma}^{\text{tm}} - P\mathcal{I}$ — полное выражение для тензора напряжений (ТН). Здесь $\boldsymbol{\sigma}^{\text{el}} = -\frac{\partial \mathcal{W}_{\text{el}}}{\partial \nabla \hat{\mathbf{n}}} \cdot (\nabla \hat{\mathbf{n}})^T$ — упругий, $\boldsymbol{\sigma}^{\text{vis}} = \frac{\delta \mathcal{R}^{\text{vis}}}{\delta \nabla \mathbf{v}}$ — вязкий, и $\boldsymbol{\sigma}^{\text{tm}} = \frac{\delta \mathcal{R}^{\text{tm}}}{\delta \nabla \mathbf{v}}$ — термомеханический вклады в ТН (см. Приложение), \mathcal{W}_{el} — плотность упругой энергии ЖК-фазы, $\mathcal{R} = \mathcal{R}^{\text{vis}} + \mathcal{R}^{\text{tm}} + \mathcal{R}^{\text{th}}$ — полная диссипационная функция Рэлея, P — гидростатическое давление, \mathcal{I} — единичный тензор и δ — символ вариации.

Уравнение теплопроводности ЖК-фазы принимает вид

$$\rho C_P \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (7)$$

где $\mathbf{q} = T \frac{\delta \mathcal{R}}{\delta \nabla T}$ — тепловой поток в ДЯЖК-ячейке, а C_P — теплоемкость ЖК-фазы.

Безразмерное уравнение баланса моментов в ДЯЖК-ячейке может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial \tau} &= -\bar{\psi}_{,z} \theta_{,x} + \bar{\psi}_{,x} \theta_{,z} - \frac{L}{2d} (1 + \gamma \cos 2\theta) \bar{\psi}_{,zz} \\ &\quad - \frac{d}{2L} (1 - \gamma \cos 2\theta) \bar{\psi}_{,xx} + \gamma \bar{\psi}_{,xz} \sin 2\theta + \left(\frac{d}{L}\right)^2 \\ &\quad \times \left(\sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta \right) \theta_{,xx} + \left(\cos^2 \theta + K_{31} \sin^2 \theta \right) \theta_{,zz} \\ &\quad + \frac{1 - K_{31}}{2} \sin 2\theta \left[2 \frac{d}{L} \theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 + \left(\frac{d}{L} \theta_{,x}\right)^2 - 2 \frac{d}{L} \theta_{,x} \theta_{,z} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \delta_1 \chi_{,z} \left(-\frac{d}{2L} \theta_{,x} \sin 2\theta + 2\theta_{,z} + \theta_{,z} \cos^2 \theta \right), \end{aligned} \quad (8)$$

где $\bar{\psi} = \frac{\gamma_1 d}{LK_1} \psi$ — безразмерный аналог функции тока ψ поля скорости $\mathbf{v} = u\hat{\mathbf{i}} + w\hat{\mathbf{k}} = -\nabla \times \hat{\mathbf{j}}\psi$, $K_{31} = \frac{K_3}{K_1}$ — отношение поперечного и продольного коэффициентов упругости, $\gamma = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ — отношение коэффициентов вращательной вязкости и $\delta_1 = \frac{\xi T_{\text{NI}}}{K_1}$ — безразмерный параметр уравнения, ξ — термомеханическая постоянная, T_{NI} — температура фазового перехода нематик–изотропное состояние. Безразмерный аналог уравнения Навье–Стокса принимает вид

$$\begin{aligned} \delta_2 \frac{\partial u}{\partial \tau} &= \sigma_{xx,x}^{\text{vis}} + \sigma_{zz,z}^{\text{vis}} + \sigma_{xx,x}^{\text{el}} + \sigma_{zz,z}^{\text{el}} \\ &\quad + \delta_1 (\sigma_{xx,x}^{\text{tm}} + \sigma_{zz,z}^{\text{tm}}) - P_{,x} - \delta_2 u u_{,x}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \delta_3 \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \sigma_{xz,x}^{\text{vis}} + \sigma_{zz,z}^{\text{vis}} + \sigma_{xz,x}^{\text{el}} + \sigma_{zz,z}^{\text{el}} \\ &\quad + \delta_1 (\sigma_{xz,x}^{\text{tm}} + \sigma_{zz,z}^{\text{tm}}) - P_{,z} - \delta_3 w w_{,z}, \end{aligned} \quad (10)$$

где значения функций σ_{ij}^{vis} , σ_{ij}^{el} и σ_{ij}^{tm} ($i, j = x, z$) приведены в Приложении. $\delta_2 = \frac{\rho L K_1}{d \gamma_1^2}$, $\delta_3 = \frac{\rho K_1}{\gamma_1^2}$ — новые безразмерные параметры уравнений (9) и (10).

В свою очередь, безразмерное уравнение теплопроводности принимает вид

$$\delta_4 \frac{\partial \chi}{\partial \tau} = (\lambda \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \chi_{,zz} + (\lambda - 1) \theta_{,z} \chi_{,z} \sin 2\theta + \delta_4 \bar{\psi}_{,x} \chi_{,z}, \quad (11)$$

где $\lambda = \lambda_{\parallel} / \lambda_{\perp}$ — отношение коэффициентов теплопроводности вдоль и поперек директора, $\chi \equiv \chi(\tau, z) = T(\tau, z) / T_{NI}$ — безразмерная температура, $\delta_4 = \frac{\rho C_P K_1}{\gamma_1 \lambda_{\perp}}$ — безразмерный параметр уравнения. В уравнениях (8)–(11) $\tau = (\frac{K_1}{\gamma_1 d^2}) t$ — безразмерное время, $\bar{z} = \frac{z}{d}$ и $\bar{x} = \frac{x}{L}$ — безразмерные пространственные переменные, записанные без черты, в дальнейшем черта над функцией тока также опущена.

Процесс переориентации поля директора \hat{n} в ДЯЖК-ячейке под действием градиента температуры $\nabla \chi$ может быть описан системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (8)–(11), дополненной граничными условиями для полярного угла θ

$$\begin{aligned} \theta_{0 \leq x < 10, z = -1} &= \frac{\pi}{4}, & \theta_{-10 < x < 0, z = -1} &= -\frac{\pi}{4}, \\ \theta_{-10 < x < 10, z = 1} &= 0, & \theta_{x = 10, -1 < z < 1} &= \frac{\pi}{2}, \\ \theta_{x = -10, -1 < z < 1} &= -\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (12)$$

скорости

$$\mathbf{v}_{-10 < x < 10, z = \pm 1} = \mathbf{v}_{x = \pm 10, -1 < z < 1} = 0, \quad (13)$$

и температуры

$$\chi_{-10 < x < 10, z = 1} = \chi_w,$$

$$\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = -1} = \chi_{x = -10, -1 < z < 1} = \chi_{x = 10, -1 < z < 1} = \chi_c. \quad (14)$$

Здесь $\chi_w = T_w / T_{NI}$ и $\chi_c = T_c / T_{NI}$ — наибольшее и наименьшее значения безразмерной температуры в ЖК-ячейке, соответственно. Начальное значение полярного угла θ было выбрано в виде $\theta(\tau = 0, x, z) = \theta_{el}(x, z)$, где $\theta_{el}(x, z)$ — распределение значений угла $\theta(x, z)$ в полости ДЯЖК-ячейки, полученное из решения уравнения (8), когда $\psi_{,x} = \psi_{,z} = \chi_{,x} = \chi_{,z} = 0$, и соответствует распределению $\theta_{el}(x, z)$ под действием только упругих сил.

Для 4-п-пентил-4'-цианобифенила (5ЦБ) при температуре 300 К и плотности 10^3 kg/m^3 значения упругих коэффициентов, полученных экспериментальными методами [9], $K_1 = 10.5 \text{ pN}$ и $K_3 = 13.8 \text{ pN}$, в то время как значения коэффициентов вращательной вязкости оцениваются как $\gamma_1 \sim 0.072 \text{ Pa} \cdot \text{s}$, $\gamma_2 \sim -0.079 \text{ Pa} \cdot \text{s}$ [10]. При этих же значениях температуры и плотности значения шести коэффициентов Лесли в $\text{Pa} \cdot \text{s}$ были определены в работе [10] как $\alpha_1 \sim -0.0066$, $\alpha_2 \sim -0.075$, $\alpha_3 \sim -0.0035$, $\alpha_4 \sim 0.072$, $\alpha_5 \sim 0.048$ и $\alpha_6 \sim -0.03$. Значение коэффициента теплопроводности λ_{\perp} было

выбрано равным [11] $0.13 \text{ W/m} \cdot \text{K}$, а величины [12] $C_P \sim 10^3 \text{ J/kg} \cdot \text{K}$. В нашем случае величина $T_w = 303 \text{ K}$, $T_c = 298 \text{ K}$ и $T_{NI} \sim 305 \text{ K}$, а величины параметров, входящих в систему уравнений (8)–(11), имеют следующие значения: $\delta_1 \sim 29$, $\delta_2 \sim 2 \times 10^{-5}$, $\delta_3 \sim 2 \times 10^{-6}$ и $\delta_4 \sim 1.1 \times 10^{-3}$.

Используя тот факт, что $\delta_i \ll 1$ ($i = 2, 3$), уравнения Навье–Стокса (9)–(10) можно существенно упростить и записать в виде

$$\begin{aligned} c_1 \psi_{,zzzz} + c_2 \psi_{,xzzz} + c_3 \psi_{,xxzz} + c_4 \psi_{,xxxz} + c_5 \psi_{,xxxx} \\ + c_6 \psi_{,zzz} + c_7 \psi_{,xzz} + c_8 \psi_{,xxz} + c_9 \psi_{,xxx} + c_{10} \psi_{,zz} \\ + c_{11} \psi_{,xz} + c_{12} \psi_{,zz} + \mathcal{F} = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

где коэффициенты c_i ($i = 1, \dots, 12$) и функция \mathcal{F} определены в Приложении.

Уравнение (11) также может быть упрощено, поскольку $\delta_4 \ll 1$, и принимает вид

$$(\lambda \sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \chi_{,zz} + (\lambda - 1) \theta_{,z} \chi_{,z} \sin 2\theta = 0. \quad (16)$$

Таким образом, процесс релаксации поля директора $\hat{n}(\tau, x, z)$, поля скорости $\mathbf{v}(\tau, x, z)$ и поля температуры $\chi(\tau, z)$ описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (8), (15) и (16), совместно с граничными условиями (12)–(14) и начальным условием $\theta(\tau = 0, x, z) = \theta_{el}(x, z)$.

3. Ориентационная релаксация полей директора и скорости в ДЯЖК-ячейке

Процесс релаксации полей директора, скорости и температуры, описываемый нелинейной системой уравнений (8), (15) и (16), был исследован для двух случаев направления градиента температуры. В первом случае градиент был направлен от нижней, более холодной поверхности к верхней — более теплой (случай I):

$$\chi_{-10 < x < 10, z = 1} = \chi_w,$$

$$\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = -1} = \chi_{x = -10, -1 < z < 1} = \chi_{x = 10, -1 < z < 1} = \chi_c, \quad (17)$$

а во втором — в обратном направлении, от верхней, более холодной, к нижней, более теплой, поверхности (случай II):

$$\chi_{-10 < x < 10, z = -1} = \chi_w,$$

$$\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = 1} = \chi_{x = 10, -1 < z < 1} = \chi_{x = -10, -1 < z < 1} = \chi_c. \quad (18)$$

Остальные граничные условия те же, что и в уравнениях (12)–(13).

Равновесное распределение угла $\theta_{eq}(x, z)$ по ширине ДЯЖК-ячейки ($-10 \leq x \leq 10$) для случая I и ряда значений расстояния z от нижней, более холодной ограничивающей поверхности $\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = -1} = \chi_c = 0.97$ пред-

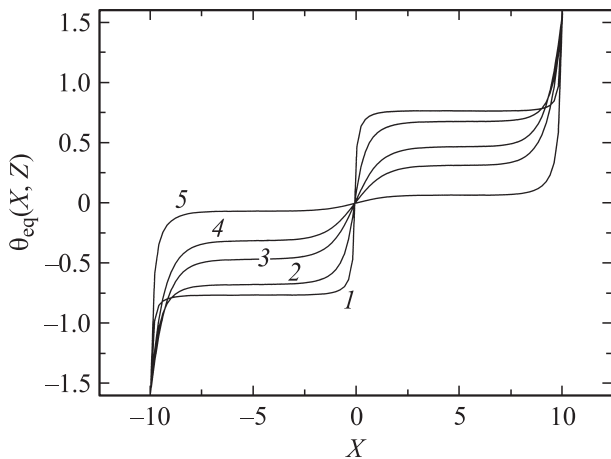


Рис. 1. Стационарное распределение полярного угла $\theta_{\text{eq}}(x, z)$ вдоль ДЯЖК-ячейки ($-10 \leq x \leq 10$) для случая I при различных расстояниях от нижней ограничивающей поверхности: 1 — $z = -0.9$, 2 — $z = -0.7$, 3 — $z = 0.0$, 4 — $z = 0.7$, 5 — $z = 0.9$.

ставлено на рис. 1. Величина перепада безразмерной температуры по сечению ЖК-ячейки была выбрана равной $\Delta\chi = \chi_w - \chi_c = 0.0164$ (~ 5 К), а система нелинейных уравнений (8), (15) и (16) была решена методом Галеркина [13]. При этом функция тока $\psi(x, z) = \sum_{m,n=0}^N q_{mn} \phi_m(x) \phi_n(z)$ была аппроксимирована конечной суммой, образованной ортогональными функциями $\phi_k = L_k - \frac{4k+10}{2k+7} L_{k+2} + \frac{2k+3}{2k+7} L_{k+4}$, где L_k — полином Лежандра k -го порядка, N — порядок аппроксимации, а ортогональные функции Φ_k удовлетворяют граничным условиям $\Phi(\pm 1) = \Phi'(\pm 1) = 0$. С этой целью бигармоническое уравнение (15) было переписано в матричном виде $\mathbf{A} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{f}$, где матрица \mathbf{A} имеет элементы $a_{ijmn} = (\Phi_{ij}, D\Phi_{mn})$, а $\Phi_{mn} = \phi_m(x)\phi_n(z)$, ($i, j, m, n = 0, \dots, N$). Здесь

$$\begin{aligned} D\Phi_{mn} = & c_1\Phi_{mn,zzzz} + c_2\Phi_{mn,xzzz} + c_3\Phi_{mn,xxzz} \\ & + c_4\Phi_{mn,xxxz} + c_5\Phi_{mn,xxxx} + c_6\Phi_{mn,zzz} \\ & + c_7\Phi_{mn,xzz} + c_8\Phi_{mn,xxz} + c_9\Phi_{mn,xxx} \\ & + c_{10}\Phi_{mn,zz} + c_{11}\Phi_{mn,xz} + c_{12}\Phi_{mn,xx} \end{aligned}$$

— бигармонический дифференциальный оператор, \mathbf{q} — матрица с неизвестными элементами q_{mn} ($m, n = 0, \dots, N$), а элементы матрицы \mathbf{f} определяются скалярным произведением $f_{ij} = -(\Phi_{ij}, \mathcal{F})$ (детали даны в Приложении).

Согласно нашим вычислениям, в случае I наибольшее изменение $\nabla\theta_{\text{eq}}(x, z)$ претерпевает вблизи нижней, более холодной ($\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = -1} = \chi_c = 0.97$) ограничивающей поверхности, где угол $\theta_{\text{eq}}(x, z)$ резко возрастает вблизи вертикальных ограничивающих поверхностей ($x \sim \pm 10, z = -1$) и в середине ДЯЖК-ячейки ($x \sim 0, z = -1$). В первом случае $|\theta_{\text{eq}}(x \sim \pm 10, z = -1)|$ изменяется на величину ~ 0.7 ($\sim 40^\circ$), а во втором —

на величину ~ 1.6 ($\sim 92^\circ$). По мере удаления от нижней ограничивающей поверхности вариации угла $\theta_{\text{eq}}(-10 \leq x \leq 10, z \sim 0)$ в середине ДЯЖК-ячейки сглаживаются, в то время как вблизи вертикальных ограничивающих поверхностей $|\theta_{\text{eq}}(x \sim \pm 10, z = 1)|$ изменяется на величину $\sim \frac{\pi}{2}$. Распределение поля скорости $\mathbf{v}(\tau, x, z) = u(\tau, x, z)\hat{\mathbf{i}} + w(\tau, x, z)\hat{\mathbf{k}}$ в ДЯЖК-ячейке в случае I на временах порядка ~ 0.001 ($\sim 180\mu\text{s}$) характеризуется зарождением двух вихрей: направленного по часовой стрелке вблизи более холодной нижней поверхности и направленного против часовой стрелки вблизи более теплой верхней поверхности. Со временем устанавливается стационарное двухвихревое течение (рис. 2), характеризующееся двумя вихрями, направленными навстречу друг другу. На рис. 2 стрелке длиной в 1 мм соответствует величина вектора скорости, равная $0.24\mu\text{m/s}$. Время релаксации гидродинамического течения в ДЯЖК-ячейке $\tau_R \sim 2.05$, что соответствует ~ 0.36 с. Здесь критерий релаксации гидродинамического течения был выбран равным $\epsilon = |(\theta_{(m+1)} - \theta_{(m)})/\theta_{(m)}| \sim 10^{-4}$ и итерационная процедура продолжалась вплоть до достижения заданной точности. Таким образом, τ_R — это то время, которое нужно гидродинамической системе для того, чтобы выполнялось условие $\epsilon \sim 10^{-4}$. С изменением направления градиента $\nabla\chi$ на противоположное (случай II), когда верхняя ограничивающая поверхность становится более холодной ($\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = 1} = 0.97$), а нижняя — более теплой ($\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = -1} = 0.9864$), картина зарождения двухвихревого течения изменяется. Один вихрь, более слабый, располагается вблизи более холодной поверхности и направлен по часовой стрелке, в то время как другой вихрь, более сильный, располагается вблизи более теплой поверхности и направлен против часовой стрелки (рис. 3). Этот стационарный двухвихревой поток, формирующийся спустя время $\tau_R \sim 2.05$ (~ 0.36 с), характе-

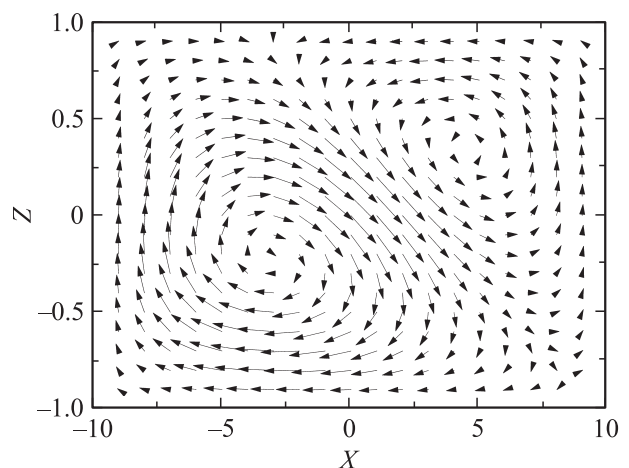


Рис. 2. Стационарное распределение безразмерного поля скорости $\mathbf{v}(x, z)$ в ДЯЖК-ячейке для случая I спустя время $\tau_R = 2.05$. Стрелке длиной в 1 мм соответствует величина скорости $0.24\mu\text{m/s}$.

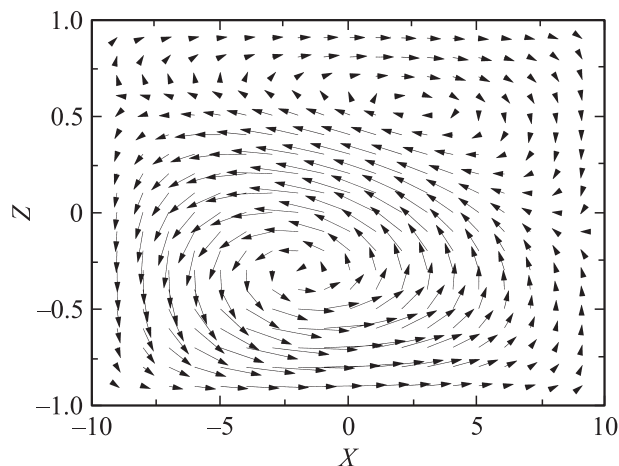


Рис. 3. То же, что на рис. 2 для случая П.

ризуется максимальной скоростью порядка $\sim 1.3 \mu\text{m/s}$, достигающей более теплой нижней ограничивающей поверхности.

Для того чтобы понять роль двоякоориентированной нижней ограничивающей поверхности в формировании стационарного двухвихревого потока в ЖК-ячейке, был исследован процесс формирования стационарных потоков в наклонно ориентированных ЖК-ячейках, которые мы будем называть правосторонними (случай (П)):

$$\begin{aligned} \theta_{-10 < x < 10, z = -1} &= \frac{\pi}{4}, & \theta_{-10 \leq x \leq 10, z = 1} &= 0, \\ \theta_{x = 10, -1 < z < 1} &= \frac{\pi}{2}, & \theta_{x = -10, -1 < z < 1} &= -\frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (19)$$

и левосторонними (случай (Л)):

$$\begin{aligned} \theta_{-10 < x < 10, z = -1} &= -\frac{\pi}{4}, & \theta_{-10 \leq x \leq 10, z = 1} &= 0, \\ \theta_{x = 10, -1 < z < 1} &= \frac{\pi}{2}, & \theta_{x = -10, -1 < z < 1} &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned} \quad (20)$$

соответственно.

На рис. 4 представлено распределение поля скорости $\mathbf{v}(\tau, x, z) = u(\tau, x, z)\hat{\mathbf{i}} + w(\tau, x, z)\hat{\mathbf{k}}$ для случая (П) в наклонно ориентированной ЖК-ячейке спустя время $\tau = 0.002$ ($\sim 360 \mu\text{s}$) под действием градиента температуры $\nabla\chi$ ($\sim 1 \text{ K}/\mu\text{m}$), направленного от нижней, более холодной ограничивающей поверхности ($\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = -1} = 0.97$) к верхней, более теплой поверхности ($\chi_{-10 \leq x \leq 10, z = 1} = 0.9864$). Этот поток характеризуется наличием двух вихрей: более мощного, направленного против часовой стрелки и занимающего практически три четверти объема ЖК-ячейки слева, и менее мощного, направленного по часовой стрелке и занимающего остальной объем ЖК-ячейки. Впоследствии, спустя время $\tau_R \sim 2.05$ ($\sim 0.36 \text{ s}$), этот двухвихревой гидродинамический поток распадается и окончательно формируется стационарный одновихревой поток, направленный против часовой стрелки, с центром вращения в

середине ЖК-ячейки (рис. 5). При этом максимальная величина скорости ($\sim 0.24 \mu\text{m/s}$) достигается в середине левой части ЖК-ячейки. При смене направления ориентации директора на нижней ограничивающей поверхности со случая (П) на случай (Л) распределение поля скорости меняется на противоположное. Так, в наклонно ориентированной ЖК-ячейке для случая (Л) спустя время $\tau = 0.002$ ($\sim 360 \mu\text{s}$) под действием того же, что и в случае (П), градиента температуры $\nabla\chi$ в ЖК-ячейке начинает формироваться двухвихревой поток (рис. 6). Один, более мощный вихрь, направленный против часовой стрелки и расположенный в правой части ЖК-ячейки, занимает практически три четверти объема ЖК-ячейки, в то время как второй, менее мощный вихрь, направленный по часовой стрелке и расположенный в левой части ЖК-ячейки, занимает оставшийся объем. Впоследствии, спустя то же время $\tau_R \sim 2.05$ ($\sim 0.36 \text{ s}$),

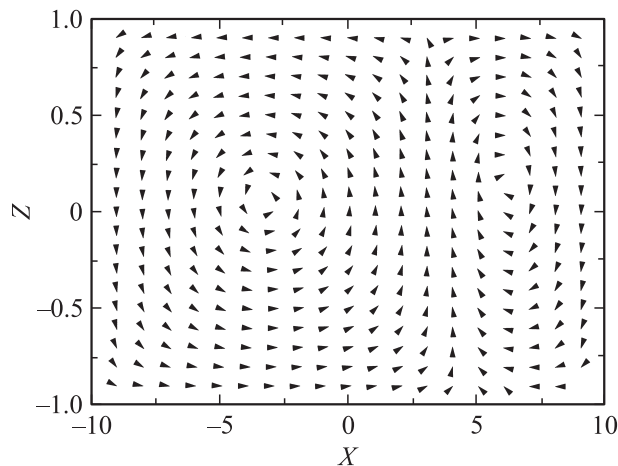


Рис. 4. Распределение поля скорости $\mathbf{v}(\tau, x, z)$ в наклонно ориентированной ЖК-ячейке для случая (П) спустя время $\tau = 0.002$ под действием градиента температуры $\nabla\chi$.

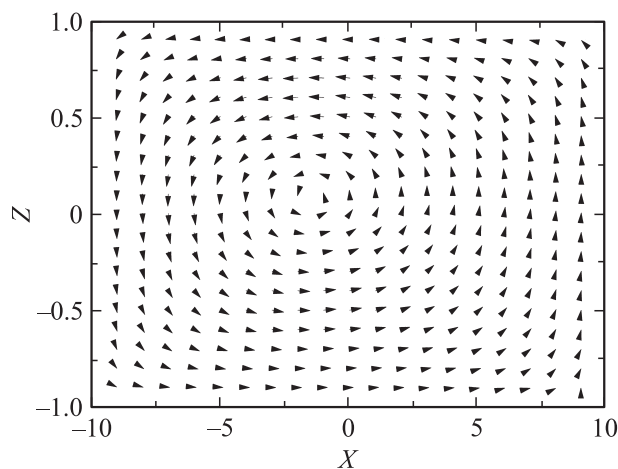


Рис. 5. Стационарное распределение безразмерного поля скорости $\mathbf{v}(x, z)$ в наклонно ориентированной ЖК-ячейке для случая (П) спустя время $\tau_R = 2.05$.

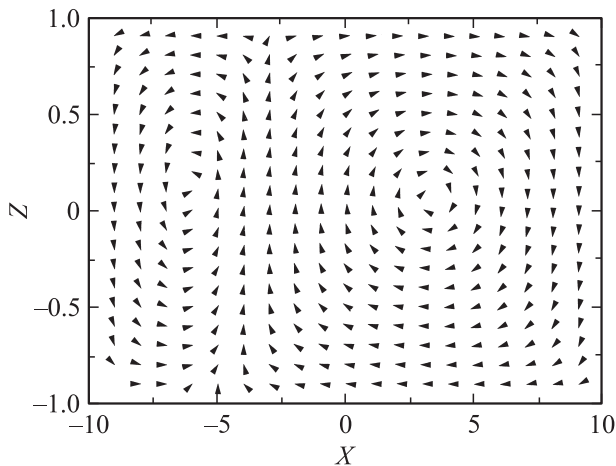


Рис. 6. То же, что и на рис. 4, но для случая (Л).

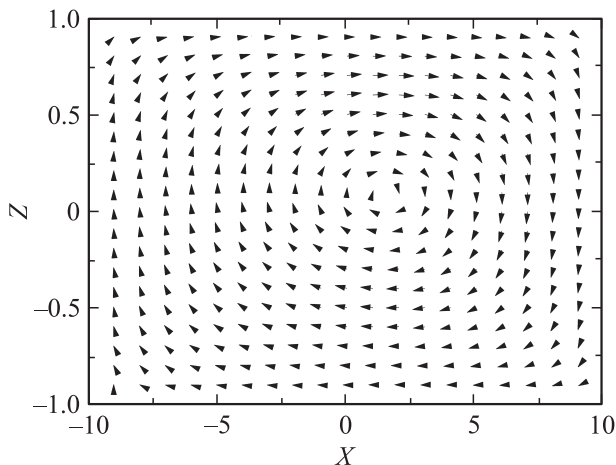


Рис. 7. То же, что и на рис. 5, но для случая (Л).

что и в случае (П), этот двухвихревой гидродинамический режим распадается и окончательно формируется одновихревой поток, направленный по часовой стрелке, с центром вращения в середине ЖК-ячейки (рис. 7).

Основываясь на наших вычислениях, можно сделать вывод, что характер приповерхностной ориентации поля директора может кардинальным образом влиять на формирование стационарного поля скорости под действием градиента температуры, направленного поперек ЖК-ячейки. Причем в двоякоориентированной ЖК-ячейке под действием градиента температуры $\nabla\chi$ формируется более сложный двухвихревой поток, на направление которого сильно влияет направление градиента $\nabla\chi$.

4. Заключение

В предлагаемой работе представлено исследование релаксации полей директора $\hat{\mathbf{n}}(t, \mathbf{r})$ и скорости $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$ как в двоякоориентированной, так и в наклонно ориентированных жидкокристаллических ячейках под действием

градиента температуры ∇T , направленного поперек ЖК-ячейки. Нелинейное обобщение классической теории Эриксона-Лесли, допускающее учет термомеханических вкладов в выражение для сдвигового напряжения и в уравнение баланса энтропии, позволило описать процесс формирования двухвихревого потока в ДЯЖК-ячейке. Было обнаружено, что характер пристенной ориентации поля директора существенно влияет на процесс формирования вихревых потоков в ЖК-ячейках. Так, при равенстве остальных граничных условий, в двояко- и наклонно ориентированных ЖК-ячейках могут возникнуть два либо один вихрь, хотя на начальном этапе формирования вихревых потоков всегда зарождаются два вихря, направленные навстречу друг другу. Таким образом, настоящее исследование указывает на важность учета градиентов температуры, возникающих в ЖК-ячейке, которые могут существенным образом повлиять на характер релаксации поля директора и тем самым изменить время релаксации ЖК-дисплея.

5. Приложение: моменты и компоненты тензора напряжений

Моменты, действующие на единичный ЖК-объем, имеют вид: $\mathbf{T}_{el} = \frac{\delta \mathcal{W}_{el}}{\delta \hat{\mathbf{n}}} \times \hat{\mathbf{n}}$ — упругий, $\mathbf{T}_{vis} = \frac{\delta \mathcal{R}^{vis}}{\delta \hat{\mathbf{n}}_t} \times \hat{\mathbf{n}}_t$ — вязкий и $\mathbf{T}_{tm} = \frac{\delta \mathcal{R}^{tm}}{\delta \hat{\mathbf{n}}_t} \times \hat{\mathbf{n}}$ — термомеханический моменты. Символ δ означает вариацию. $\mathcal{W}_{el} = \frac{1}{2} [K_1 (\nabla \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + K_3 (\hat{\mathbf{n}} \times \nabla \times \hat{\mathbf{n}})^2]$ — плотность упругой энергии ЖК-фазы, K_1 и K_3 — продольный и поперечный коэффициенты упругости, $\hat{\mathbf{n}}_t \equiv \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{dt}$ — материальная производная вектора:

$$\hat{\mathbf{n}} = n_x \hat{\mathbf{i}} + n_z \hat{\mathbf{k}} = \cos \theta(t, x, z) \hat{\mathbf{i}} + \sin \theta(t, x, z) \hat{\mathbf{k}},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{vis} = & \alpha_1 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \gamma_1 (\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \\ & + 2\gamma_2 (\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a \cdot \hat{\mathbf{n}}) (\mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} - (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}) \\ & + \alpha_4 \mathbf{D}_s : \mathbf{D}_s (\alpha_5 + \alpha_6) (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 \end{aligned}$$

— вязкий,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi} \mathcal{R}^{tm} = & (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T) \mathbf{D}_s : \mathbf{M} + \nabla T \cdot \mathbf{D}_s \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T) \\ & \times (\hat{\mathbf{n}}_t - \mathbf{D}_a \cdot \hat{\mathbf{n}} - 3\mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}} + 3(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & + \hat{\mathbf{n}} (\nabla \mathbf{v})^T \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla T + \frac{1}{2} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) \nabla T \cdot \mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & + \hat{\mathbf{n}}_t \cdot \mathbf{M} \cdot \nabla T + \frac{1}{2} \mathcal{M}_0 \nabla T \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ & + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T) \mathcal{M}_0 (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{D}_s \cdot \hat{\mathbf{n}}) + \frac{1}{2} \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{n}}_t \cdot \nabla T \end{aligned}$$

— термомеханический и

$$\mathcal{R}^{\text{th}} = \frac{1}{T} (\lambda_{\parallel} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T))^2 + \lambda_{\perp} (\nabla T - \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla T))^2$$

— термический вклады в полную функцию Рэлея \mathcal{R} . Здесь $\alpha_1 \div \alpha_6$ — коэффициенты вязкости Лесли, γ_1 и γ_2 — коэффициенты вращательной вязкости, ξ — термомеханическая постоянная, λ_{\parallel} и λ_{\perp} — коэффициенты теплопроводности, $\mathbf{D}_s = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T]$ и $\mathbf{D}_a = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^T]$ — симметричный и асимметричный вклады в тензор скорости деформации, $\mathbf{M} = \frac{1}{2} \times [\nabla \hat{\mathbf{n}} + (\nabla \hat{\mathbf{n}})^T]$ и $\mathcal{M}_0 = \nabla \cdot \hat{\mathbf{n}}$ — скалярный инвариант тензора \mathbf{M} .

Выражения для безразмерной плотности упругой энергии $\overline{\mathcal{W}}_{\text{el}}$, а также вязкого $\overline{\mathcal{R}}_{\text{vis}}$, термомеханического $\overline{\mathcal{R}}_{\text{tm}}$ и термического $\overline{\mathcal{R}}_{\text{th}}$ вкладов в диссипационную функцию Рэлея имеют вид:

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{W}}_{\text{el}} &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{L} n_{x,x} + n_{z,z} \right)^2 + K_{31} \left(\frac{d}{L} n_{z,x} - n_{x,z} \right)^2 \right]; \\ 2\overline{\mathcal{R}}_{\text{vis}} &= n_{x,\tau}^2 + n_{z,\tau}^2 + n_{x,\tau} \left[n_z \left(\frac{d}{L} w_{,x} - \frac{L}{d} u_{,z} \right) + 2\gamma n_x u_{,x} \right. \\ &\quad \left. + \gamma n_z \left(\frac{d}{L} u_{,z} + \frac{d}{L} w_{,x} \right) \right] + n_{z,\tau} \left[n_x \left(\frac{L}{d} u_{,z} - \frac{d}{L} w_{,x} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2\gamma n_z w_{,z} + \gamma n_x \left(\frac{L}{d} u_{,z} + \frac{d}{L} w_{,x} \right) \right] + \frac{1}{\gamma_1} u_{,x}^2 [\alpha_4 \\ &\quad + (\alpha_5 + \alpha_6) n_x^2 + \alpha_1 n_x^4] + 2 \frac{\alpha_1}{\gamma_1} u_{,x} w_{,z} n_x^2 n_z^2 + \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{L}{d} u_{,z} \right)^2 \\ &\quad \times \left[\frac{\alpha_4}{2} + \frac{\gamma_1 + \alpha_5 + \alpha_6}{4} + \gamma_2 (n_x^2 - n_z^2) + \alpha_1 n_x^2 n_z^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_1} \frac{L}{d} u_{,z} u_{,x} [-\gamma_2 n_x n_z + 2\alpha_1 n_x^3 n_z] + \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{d}{L} w_{,x} \right)^2 \\ &\quad \times \left[\frac{\alpha_4}{2} + \frac{\gamma_1 + \alpha_5 + \alpha_6}{4} + \gamma_2 (n_z^2 - n_x^2) + \alpha_1 n_x^2 n_z^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_1} u_{,z} w_{,x} \left[\alpha_4 + \frac{-\gamma_1 + \alpha_5 + \alpha_6}{2} + 2\alpha_1 n_x^2 n_z^2 \right] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_1} \frac{d}{L} u_{,x} w_{,x} [\gamma_2 n_x n_z + 2\alpha_1 n_x^3 n_z] + \frac{1}{\gamma_1} \frac{L}{d} u_{,z} w_{,z} \\ &\quad \times [\gamma_2 n_x n_z + 2\alpha_1 n_x^3 n_z] + \frac{1}{\gamma_1} \frac{d}{L} w_{,z} w_{,x} [-\gamma_2 n_x n_z + 2\alpha_1 n_x^3 n_z^3] \\ &\quad + \frac{1}{\gamma_1} w_{,z}^2 [\alpha_4 + (\alpha_5 + \alpha_6) n_z^2 + \alpha_1 n_z^4]; \\ \overline{\mathcal{R}}_{\text{tm}} &= \delta_1 \chi_{,z} (\mathcal{M}_0 n_{z,\tau} + n_{z,\tau} n_{z,z} + n_{x,\tau} M_{xz} \\ &\quad + h_1 u_{,x} + \frac{d}{L} h_2 w_{,x} + \frac{L}{d} h_3 u_{,z} + h_4 w_{,z}); \\ \overline{\mathcal{R}}_{\text{th}} &= \frac{T_{N1} \lambda_{\perp} \gamma_1 d^2}{K_1^2} \frac{1}{\chi} \chi_{,z}^2 (\lambda n_z^2 + n_x^2). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{d}{L} \left(n_z n_{x,x} + \frac{3}{4} n_x n_{z,x} + \frac{1}{4} n_z^2 n_{z,x} \right) + \frac{1}{4} n_x n_z^2 n_{z,z}, \\ h_2 &= \frac{d}{L} n_{z,x} \left(n_z - \frac{1}{4} n_x^3 \right) + n_{x,z} \left(2n_z - \frac{1}{2} n_x \right) \\ &\quad + n_{z,z} n_x \left(n_x^2 - \frac{3}{8} n_z^2 \right), \\ h_3 &= \frac{d}{L} n_{z,x} n_z \left(\frac{5}{4} - \frac{9}{4} n_z^2 \right) + n_{x,z} \left(\frac{1}{2} n_x - \frac{3}{4} n_z^3 \right) \\ &\quad + n_{z,z} n_x \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} n_z^2 \right), \\ h_4 &= \frac{d}{L} \left[n_z n_{x,x} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4} n_x^2 \right) + \frac{1}{2} n_x n_{z,x} \right] \\ &\quad - n_z n_{z,z} \left(1 + \frac{1}{4} n_z^2 \right). \end{aligned}$$

Безразмерные компоненты упругого, вязкого и термомеханического моментов принимают вид:

$$\begin{aligned} T_{\text{el}} &= \left(\frac{d}{L} \right)^2 (\sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta) \theta_{,xx} \\ &\quad + (\cos^2 \theta + K_{31} \sin^2 \theta) \theta_{,zz} + \frac{1 - K_{31}}{2} \sin 2\theta \\ &\quad \times \left[2 \frac{d}{L} \theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 + \left(\frac{d}{L} \theta_{,x} \right)^2 - 2 \frac{d}{L} \theta_{,x} \theta_{,z} \right], \\ T_{\text{vis}} &= - \frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \psi_{,z} \theta_{,x} + \psi_{,x} \theta_{,z} - \frac{L}{2d} (1 + \gamma \cos 2\theta) \psi_{,zz} \\ &\quad - \frac{d}{2L} (1 - \gamma \cos 2\theta) \psi_{,xx} + \gamma \psi_{,xz} \sin 2\theta, \\ T_{\text{tm}} &= - \frac{1}{2} \delta_1 \chi_{,z} \left(- \frac{d}{2L} \theta_{,x} \sin 2\theta + 2\theta_{,z} + \theta_{,z} \cos^2 \theta \right). \end{aligned}$$

Компоненты безразмерных вкладов в тензор напряжений могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{\text{el}} &= - \left(\frac{d}{L} \right)^2 (\sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta) \theta_{,x}^2 \\ &\quad + \frac{d}{L} \frac{1 - K_{31}}{2} \theta_{,x} \theta_{,z} \sin 2\theta, \\ \sigma_{zz}^{\text{el}} &= - (\cos^2 \theta + K_{31} \sin^2 \theta) \theta_{,z}^2 + \frac{d}{L} \frac{1 - K_{31}}{2} \theta_{,x} \theta_{,z} \sin 2\theta, \\ \sigma_{xz}^{\text{el}} &= - \frac{d}{L} (\sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta) \theta_{,x} \theta_{,z} + \frac{1 - K_{31}}{2} \theta_{,z}^2 \sin 2\theta, \\ \sigma_{zx}^{\text{el}} &= - \frac{d}{L} (\cos^2 \theta + K_{31} \sin^2 \theta) \theta_{,x} \theta_{,z} \\ &\quad + \left(\frac{d}{L} \right)^2 \frac{1 - K_{31}}{2} \theta_{,x}^2 \sin 2\theta, \\ \sigma_{ij}^{\text{vis}} &= \frac{d}{L} f_{ij}^{1,\text{vis}} \psi_{xx} + \frac{L}{d} f_{ij}^{2,\text{vis}} \psi_{zz} + f_{ij}^{3,\text{vis}} \psi_{xz} + f_{ij}^{4,\text{vis}}, \end{aligned}$$

где коэффициенты $f_{ij}^{k,vis}$ имеют вид

$$f_{xx}^{1,vis} = -\frac{\sin 2\theta}{4\gamma_1} \left(2\alpha_1 \cos^2 \theta + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \cos 2\theta \right),$$

$$f_{xx}^{2,vis} = -f_{xx}^{1,vis},$$

$$f_{xx}^{3,vis} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\alpha_1 \cos 2\theta \cos^2 \theta + (\alpha_5 + \alpha_6) \cos^2 \theta + \alpha_4 \right) - \frac{\gamma_2^2}{4\gamma_1^2} \sin^2 \theta,$$

$$f_{xx}^{4,vis} = -\frac{\gamma}{2} \sin 2\theta \left[\left(\frac{d}{L} \right)^2 (\sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta) \theta_{,xx} + (\cos^2 \theta + K_{31} \sin^2 \theta) \theta_{,zz} + \frac{1 - K_{31}}{2} \sin 2\theta \times \left(\left(\frac{d}{L} \right)^2 \theta_{,x}^2 + 2 \frac{d}{L} \theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 - 2 \frac{d}{L} \theta_{,x} \theta_{,z} \right) - \frac{\delta_1}{2} \chi_{,z} \left(-\frac{d}{2L} \theta_{,x} \sin 2\theta + (2 + \cos^2 \theta) \theta'_{,z} \right) \right],$$

$$f_{zz}^{1,vis} = -\frac{\sin 2\theta}{4\gamma_1} \left(2\alpha_1 \cos^2 \theta - \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \cos 2\theta \right),$$

$$f_{zz}^{2,vis} = -f_{zz}^{1,vis},$$

$$f_{zz}^{3,vis} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\alpha_1 \cos 2\theta \sin^2 \theta - (\alpha_5 + \alpha_6) \cos^2 \theta - \alpha_4 \right) + \frac{\gamma_2^2}{4\gamma_1^2} \sin^2 \theta,$$

$$f_{zz}^{4,vis} = -f_{zz}^{3,vis},$$

$$f_{xz}^{1,vis} = \frac{1}{\gamma_1} \left(-\frac{\alpha_1}{4} \sin^2 2\theta + \frac{\gamma_2}{2} \cos 2\theta - \frac{2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \gamma_1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos 2\theta \right)^2,$$

$$f_{xz}^{2,vis} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\alpha_1}{4} \sin^2 2\theta + \frac{2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \gamma_1}{4} \right) + \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 \cos^2 2\theta \right),$$

$$f_{xz}^{3,vis} = -\frac{\sin 4\theta}{4\gamma_1} \left(\alpha_1 + \frac{\gamma_2^2}{\gamma_1} \right),$$

$$f_{xz}^{4,vis} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos 2\theta \right) \left[\left(\frac{d}{L} \right)^2 (\sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta) \theta_{,xx} + (\cos^2 \theta + K_{31} \sin^2 \theta) \theta_{,zz} + \frac{1 - K_{31}}{2} \sin 2\theta \times \left(\left(\frac{d}{L} \right)^2 \theta_{,x}^2 + 2 \frac{d}{L} \theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 - 2 \frac{d}{L} \theta_{,x} \theta_{,z} \right) - \frac{\delta_1}{2} \chi_{,z} \left(-\frac{d}{2L} \theta_{,x} \sin 2\theta + (2 + \cos^2 \theta) \theta_{,z} \right) \right],$$

$$f_{zx}^{1,vis} = -\frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\alpha_1}{4} \sin^2 2\theta + \frac{2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 - \gamma_1}{4} \right) - \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right)^2 \cos^2 2\theta \right),$$

$$f_{zx}^{2,vis} = \frac{1}{\gamma_1} \left(\frac{\alpha_1}{4} \sin^2 2\theta + \frac{\gamma_2}{2} \cos 2\theta + \frac{2\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 + \gamma_1}{4} \right) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos 2\theta \right)^2,$$

$$f_{zx}^{3,vis} = -f_{zx}^{2,vis},$$

$$f_{zx}^{4,vis} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \cos 2\theta \right) \left[\left(\frac{d}{L} \right)^2 (\sin^2 \theta + K_{31} \cos^2 \theta) \theta_{,xx} + (\cos^2 \theta + K_{31} \sin^2 \theta) \theta_{,zz} + \frac{1 - K_{31}}{2} \sin 2\theta \times \left(\left(\frac{d}{L} \right)^2 \theta_{,x}^2 + 2 \frac{d}{L} \theta_{,xz} - \theta_{,z}^2 - 2 \frac{d}{L} \theta_{,x} \theta_{,z} \right) - \frac{\delta_1}{2} \chi_{,z} \left(-\frac{d}{2L} \theta_{,x} \sin 2\theta + (2 + \cos^2 \theta) \theta_{,z} \right) \right].$$

Термомеханические компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\sigma_{xx}^{tm} = \delta_1 \chi_{,z} \left[\frac{d}{L} \theta_{,x} \left(\cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos^4 \theta \right) + \theta_{,z} \frac{\sin 2\theta}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \cos^2 \theta \right) \right],$$

$$\sigma_{zz}^{tm} = \delta_1 \chi_{,z} \left[\frac{d}{L} \theta_{,x} \left(-\frac{3}{2} \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{16} \sin^2 2\theta \right) + \theta_{,z} \frac{\sin 2\theta}{2} \left(3 - \frac{1}{4} \sin^2 \theta \right) \right],$$

$$\sigma_{xz}^{tm} = \delta_1 \chi_{,z} \left[\frac{1}{8} \frac{d}{L} \theta_{,x} \sin 2\theta \sin^2 \theta - \frac{3}{4} \theta_{,z} \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) \right],$$

$$\sigma_{zx}^{tm} = \delta_1 \chi_{,z} \left[-\frac{1}{8} \frac{d}{L} \theta_{,x} \sin 2\theta (1 + \cos^2 \theta) + \frac{3}{4} \theta_{,z} \left(6 \cos^2 \theta + \sin^4 \theta \right) \right].$$

В конечном счете бигармоническое уравнение принимает форму

$$\delta_3 \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial z \partial \tau} = c_1 \psi_{,zzzz} + c_2 \psi_{,xzzz} + c_3 \psi_{,xxzz} + c_4 \psi_{,xxxz} + c_5 \psi_{,xxxx} + c_6 \psi_{,zzz} + c_7 \psi_{,xzz} + c_8 \psi_{,xxz} + c_9 \psi_{,xxx} + c_{10} \psi_{,zz} + c_{11} \psi_{,xz} + c_{12} \psi_{,xx} + F,$$

где коэффициенты уравнения c_i ($i = 1, \dots, 12$) могут быть записаны в виде

$$c_1 = \frac{L}{d} f_{zx}^{2,vis},$$

$$c_2 = f_{zx}^{3,vis} + f_{xx}^{2,vis} - f_{zz}^{2,vis},$$

$$c_3 = \frac{d}{L} (f_{zx}^{1,\text{vis}} - f_{xz}^{2,\text{vis}} + f_{xx}^{3,\text{vis}} - f_{zz}^{3,\text{vis}}),$$

$$c_4 = \left(\frac{d}{L}\right)^2 (f_{xx}^{1,\text{vis}} - f_{zz}^{1,\text{vis}} - f_{xz}^{3,\text{vis}}),$$

$$c_5 = -\left(\frac{d}{L}\right)^3 f_{xz}^{1,\text{vis}},$$

$$c_6 = \frac{L}{d} (f_{xx,z}^{2,\text{vis}} - f_{zz,z}^{2,\text{vis}} + 2f_{zx,z}^{2,\text{vis}}),$$

$$c_7 = f_{xx,z}^{2,\text{vis}} - f_{zz,z}^{2,\text{vis}} + \frac{d}{L} f_{xx,x}^{3,\text{vis}} - f_{zz,z}^{3,\text{vis}} + 2f_{zx,z}^{3,\text{vis}} - 2\frac{d}{L} f_{xz,x}^{3,\text{vis}},$$

$$c_8 = \frac{d}{L} \left[\frac{d}{L} (f_{xx,x}^{1,\text{vis}} - f_{zz,x}^{1,\text{vis}} - 2f_{xz,x}^{3,\text{vis}}) \right. \\ \left. + f_{xx,z}^{3,\text{vis}} - f_{zz,z}^{3,\text{vis}} + 2f_{zx,z}^{1,\text{vis}} \right],$$

$$c_9 = \left(\frac{d}{L}\right)^2 \left[f_{xx,z}^{1,\text{vis}} - f_{zz,z}^{1,\text{vis}} - 2\frac{d}{L} f_{xz,x}^{1,\text{vis}} \right],$$

$$c_{10} = \frac{L}{d} \left[\frac{d}{L} (f_{xx,xz}^{2,\text{vis}} - f_{zz,xz}^{2,\text{vis}}) + f_{zx,zz}^{2,\text{vis}} - \left(\frac{d}{L}\right)^2 f_{xz,xx}^{2,\text{vis}} \right],$$

$$c_{11} = \frac{d}{L} (f_{xx,xz}^{3,\text{vis}} - f_{zz,xz}^{3,\text{vis}}) + f_{zx,zz}^{3,\text{vis}} - \left(\frac{d}{L}\right)^2 f_{xz,xx}^{3,\text{vis}},$$

$$c_{12} = \frac{d}{L} \left[\frac{d}{L} (f_{xx,xz}^{1,\text{vis}} - f_{zz,xz}^{1,\text{vis}}) + f_{zx,zz}^{1,\text{vis}} - \left(\frac{d}{L}\right)^2 f_{xz,xx}^{1,\text{vis}} \right],$$

а функция F принимает вид

$$F = \frac{d}{L} (\sigma_{xx}^{\text{el}} + \sigma_{xx}^{\text{tm}} + f_{xx}^{4,\text{vis}} - \sigma_{zz}^{\text{el}} - \sigma_{zz}^{\text{tm}} - f_{zz}^{4,\text{vis}})_{,xz} \\ + (\sigma_{zx}^{\text{el}} + \sigma_{zx}^{\text{tm}} + f_{zx}^{4,\text{vis}})_{,zz} - \left(\frac{d}{L}\right)^2 (\sigma_{xz}^{\text{el}} + \sigma_{xz}^{\text{tm}} + f_{xz}^{4,\text{vis}})_{,xx}.$$

Список литературы

- [1] D.K. Yang, S.T. Wu. *Fundamentals of liquid crystal devices*. John Wiley and Sons. N. Y. (2006). 378 p.
- [2] P.G. de Gennes, J. Prost. *The physics of liquid crystals*. Oxford Univ. Press. Oxford (1995). 400 p.
- [3] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. Phys. Rev. E **72**, 021 712 (2005).
- [4] Y.W. Li, C.Y. Lee, H.S. Kwok. Appl. Phys. Lett. **94**, 061 111 (2009).
- [5] A.V. Zakharov, A.A. Vakulenko. J. Chem. Phys. **127**, 084 907 (2007).
- [6] J.L. Ericksen. Arch. Ration. Mech. Anal. **4**, 231 (1960).
- [7] F.M. Leslie. Arch. Ration. Mech. Anal. **28**, 265 (1968).
- [8] I.W. Stewart. *The static and dynamic continuum theory of liquid crystals*. Taylor and Francies, London (2004). 345 p.
- [9] N.V. Madhusudana, R. B. Ratibha. Mol. Cryst. Liq. Cryst. **89**, 249 (1982).
- [10] A.G. Chmielewski. Mol. Chyst. Liq. Cryst. **132**, 319 (1986).
- [11] M. Marinelli, A.K. Ghosh, F. Mercury. Phys. Rev. E **63**, 061 713 (2001).
- [12] P. Jamee, G. Pitsi, J. Thoen. Phys. Rev. E **66**, 021 707 (2002).
- [13] Jie Shen. SIAM J. Sci. Comput. **15**, 1489 (1994).