

Дифференциальное вращение поверхности полярной шапки нейтронной звезды в случае наклонного магнитного поля

© А.В. Халяпин,¹ Д.П. Барсуков²

¹ Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“, 190121 Санкт-Петербург, Россия

² Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, 194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bars.astro@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 27 апреля 2024 г.

В окончательной редакции 30 июля 2024 г.

Принято к публикации 30 октября 2024 г.

Рассмотрено течение, возникающее в жидком слое на поверхности нейтронной звезды, под действием электрического тока, текущего сквозь магнитосферу в случае однородного магнитного поля, наклоненного к поверхности.

Ключевые слова: радиопульсары, нейтронные звезды, магнитная гидродинамика.

Введение

Одним из основных механизмов торможения нейтронной звезды является замыкание в ее поверхностных слоях электрического тока, текущего в магнитосфере вдоль магнитных силовых линий [1,2]. Торможение пульсаров электрическим током, текущим сквозь магнитосферу, и вопрос о распределении тормозящего момента по поверхностным слоям звезды рассматривались, например, в [3]. Течение, возникающее под воздействием электрического тока в плоском слое проводящей жидкости, рассматривалось, например, в [4]. В настоящей работе, авторы, следуя работам [5,6], рассматриваем течение, вызываемое этим током в жидком слое на поверхности нейтронной звезды.

1. Модель

Как и в работе [6], предположим, что поверхность нейтронной звезды покрыта „океаном“ жидкого слоя глубиной $L \sim 10-100$ м [7]. Поскольку $L \ll r_{ns}$, где $r_{ns} \approx 10$ км — радиус нейтронной звезды, то мы будем пренебрегать кривизной поверхности и считать, что океан представляет собой бесконечный плоский слой глубиной L (рис. 1). Мы будем рассматривать течение жидкости в системе отсчета нейтронной звезды и считать, что в этой системе отсчета оно не зависит от времени t . В настоящей работе, как и в [6], мы ограничимся простейшим случаем, когда давление p зависит только от плотности жидкости ρ . Для упрощения вычислений будем также считать вязкость и проводимость жидкости изотропными. В этом случае уравнения магнитной гидродинамики можно записать в виде

$$\rho (2 [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}) = -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{B}] + \mathcal{F}_{vis} + \rho \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$-\nabla \Phi + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{B}] = R \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0,$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{v} — скорость течения жидкости в системе отсчета, вращающейся вместе со звездой, \mathbf{B} — индукция магнитного поля, \mathbf{j} — плотность электрического тока, Φ — электростатический потенциал, R — электрическое сопротивление жидкости, $p = p(\rho)$, \mathcal{F}_{vis} — сила вязкости, $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$ — напряженность гравитационного поля, причем мы будем считать, что g не зависит от координат, $\boldsymbol{\Omega}$ — угловая скорость вращения звезды, $\boldsymbol{\Omega} = 2\pi/P$, P — период вращения звезды. Будем считать, что в нулевом приближении в океане нет течения $\mathbf{v} = 0$ и электрических токов $\mathbf{j} = 0$.

Тогда уравнения (1) и (2) примут вид

$$\nabla p_{(0)} = \rho_{(0)} \cdot g \mathbf{e}_z, \quad \text{div} \mathbf{B}_{(0)} = 0, \quad \text{rot} \mathbf{B}_{(0)} = 0, \quad \nabla \Phi_{(0)} = 0, \quad (3)$$

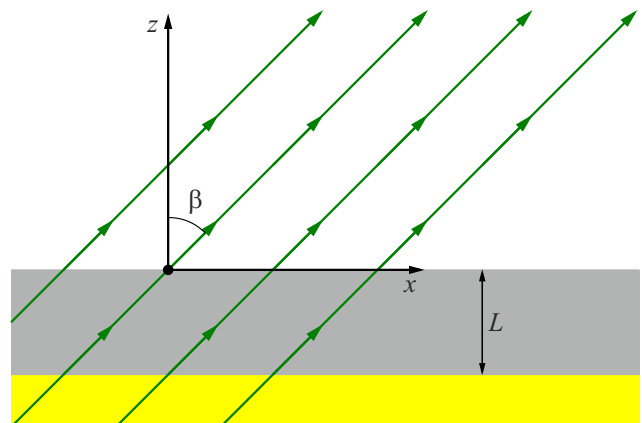


Рис. 1. Схематическое изображение жидкого слоя на поверхности звезды. Жидкий слой показан серым цветом, твердая кора — желтым цветом, силовые линии магнитного поля обозначены зелеными стрелками.

где $p_{(0)} = p(\rho_{(0)})$ и знаком (0) отмечены величины в нулевом приближении. В настоящей работе мы ограничимся только частным случаем однородного магнитного поля $\mathbf{B}_{(0)} = B_{(0)}(\cos\beta\mathbf{e}_z + \sin\beta\mathbf{e}_x)$, где $B_{(0)}$ и β — постоянные величины (рис. 1). Положим также $\Phi_{(0)} = 0$ и будем считать, что величины $p_{(0)}$, $\rho_{(0)}$ и $R_{(0)}$ зависят только от z . Рассмотрим теперь малое возмущение, вызванное протеканием электрического тока через океан. Положим $p = p_{(0)} + \delta p$ и $\rho = \rho_{(0)} + \delta\rho$ и ограничимся только линейным случаем по величинам \mathbf{v} , \mathbf{j} , δp и $\delta\rho$. Тогда уравнения (1) и (2) могут быть записаны в виде:

$$2\rho_{(0)}[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}] = \frac{B_{(0)}}{c}[\mathbf{j} \times \mathbf{e}_B] + \mathcal{F}_{vis} - c_s^2 \nabla \delta\rho - \delta\rho g \mathbf{e}_z, \quad (4)$$

$$-\nabla\Phi + \frac{B_{(0)}}{c}[\mathbf{v} \times \mathbf{e}_B] = R_{(0)}\mathbf{j}, \quad \text{div}\mathbf{j} = 0 \text{ и } \text{div}(\rho_{(0)}\mathbf{v}) = 0, \quad (5)$$

где $\mathbf{e}_B = \mathbf{B}_{(0)}/B_{(0)}$ и $c_s^2 = \frac{dp}{d\rho}(\rho_{(0)})$. В качестве граничных условий на поверхности океана $z = 0$ мы потребуем выполнения $\frac{\partial v_x}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial v_y}{\partial z} = 0$ и $v_z = 0$, первые два условия соответствуют непрерывности тангенсальных компонент тензора натяжений на границе слоя жидкости и магнитосферы, последнее означает отсутствие потока жидкости из океана в магнитосферу [5]. А также мы будем считать заданной величину j_z при $z = 0$, т.е. величину электрического тока, втекающего в океан из магнитосферы [5]. На дне океана при $z = -L$ положим $\mathbf{v} = 0$ [5]. Кроме того, для простоты мы будем считать твердую кору имеющей бесконечную проводимость и соответственно положим $\Phi = 0$ при $z = -L$. Мы будем предполагать, что $L \sim 10^2$ м, $\rho \sim 10^6$ г см⁻³ [7], коэффициент сдвиговой вязкости $\eta_{(0)} \sim 10^4$ г м⁻¹ с⁻¹ [8,9], $R_{(0)} \sim 10^{-19}$ CGS [10]. Тогда число Экмана $E = \eta_{(0)}/(\Omega L^2 \rho_{(0)}) \sim 10^{-11}$ и число Хартмана $\text{Ha} = (B_{(0)}L)/(c\sqrt{\eta_{(0)}R_{(0)}}) \sim 10^{11}$. Поскольку $\text{Ha}^2 \gg E^{-1} \gg 1$, то мы можем пренебречь силами Кориолиса и повсюду, кроме поверхностных слоев мы также можем пренебречь вязкими силами \mathcal{F}_{vis} . Также мы пренебрегаем нелинейным слагаемым $\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}$, поскольку в нашем случае число Рейнольдса $\text{Re} = \rho_{(0)}vL/\eta_{(0)}$ окажется очень малым $\text{Re} \sim 10^{-2} - 10^{-4}$. В уравнении (1) мы также пренебрегли малым членом $\rho[\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{x}]$ и не учитывали центробежные силы из-за их малости по сравнению с силой тяжести ρg [5]. Тогда приближенное решение уравнений (4) и (5) вне пограничных слоев может быть записано в виде

$$v_x = -\frac{1}{\cos^2\beta} \frac{c^2}{B_{(0)}^2} \left(R_f \frac{\partial \delta \hat{p}_0}{\partial \tilde{x}} + \text{tg}\beta \tilde{R}_f \frac{\partial^2 \delta \hat{p}_0}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{\cos^2\beta} \frac{c}{B_{(0)}} \frac{\partial \hat{j}_B}{\partial y} \left(\tilde{R}_{(0)} + \frac{\sin^2\beta}{\rho_{(0)}(z)} \tilde{K}(z) \right), \quad (6)$$

$$v_y = \frac{1}{\cos^2\beta} \frac{c^2}{B_{(0)}^2} \left(-R_f \frac{\partial \delta \hat{p}_0}{\partial y} + \text{tg}\beta \tilde{R}_f \frac{\partial^2 \delta \hat{p}_0}{\partial \tilde{x} \partial y} \right) + \frac{c}{B_{(0)}} \left(\text{tg}\beta R_{(0)} \hat{j}_B - \frac{\tilde{R}_{(0)}}{\cos^2\beta} \frac{\partial \hat{j}_B}{\partial \tilde{x}} \right), \quad (7)$$

$$v_z = \text{tg}\beta \frac{c}{B_{(0)}} \frac{1}{\rho_{(0)}(z)} \frac{\partial \hat{j}_B}{\partial y} \tilde{K}(z), \quad (8)$$

где введены обозначения

$$\tilde{R}_{(0)}(z) = \int_{-L}^z R_{(0)}(z') dz', \quad R_f(z) = R_{(0)}(z) f(z),$$

$$\tilde{R}_f(z) = \int_{-L}^z R_f(z') dz'$$

и

$$\tilde{K}(z) = \int_{-L}^z \rho_{(0)}(z') R_{(0)}(z') (f(z') K_0 - 1) dz',$$

постоянная K_0 определена как

$$K_0 = \int_{-L}^0 \rho_{(0)}(z') R_{(0)}(z') dz' / \int_{-L}^0 \rho_{(0)}(z') R_{(0)}(z') f(z') dz'.$$

Функция $f(z)$ определена как

$$f(z) = \exp\left(\int_z^0 g/c_s^2(z') dz'\right).$$

Величины $\delta \hat{p}_0$ и \hat{j}_B зависят только от $\tilde{x} = x - \text{tg}\beta z$ и y . Величина $\delta \hat{p}_0$ равна

$$\delta \hat{p}_0(\tilde{x}, y) = \sin\beta \frac{B_{(0)}}{c} \frac{K_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln((\tilde{x} - \tilde{x}')^2 + (y - y')^2) \frac{\partial \hat{j}_B}{\partial y}(\tilde{x}', y') d\tilde{x}' dy'. \quad (9)$$

Поправка к давлению δp равна $\delta p = \delta \hat{p}_0(\tilde{x}, y) \cdot f(z)$ и поправка к плотности $\delta \rho$ равна соответственно $\delta \rho = \delta p/c_s^2(z)$. Величина $\hat{j}_B(\tilde{x}, y)$ определена как $\hat{j}_B(x, y) = j_z(x, y, 0)/\cos\beta$ и равна плотности тока, текущего в магнитосфере вдоль магнитных силовых линий.

Вклад поверхностных слоев и учёт силы Кориолиса дают лишь поправки $\sim 1/(\text{Ha} \cdot \cos\beta)$ и $\sim E^{-1}/\text{Ha}^2$ к выражениям (6)–(8). Более того, в верхнем пограничном слое скорость течения жидкости \mathbf{v} практически не изменяется и выражения (6) и (8) дают корректные значения скорости на поверхности

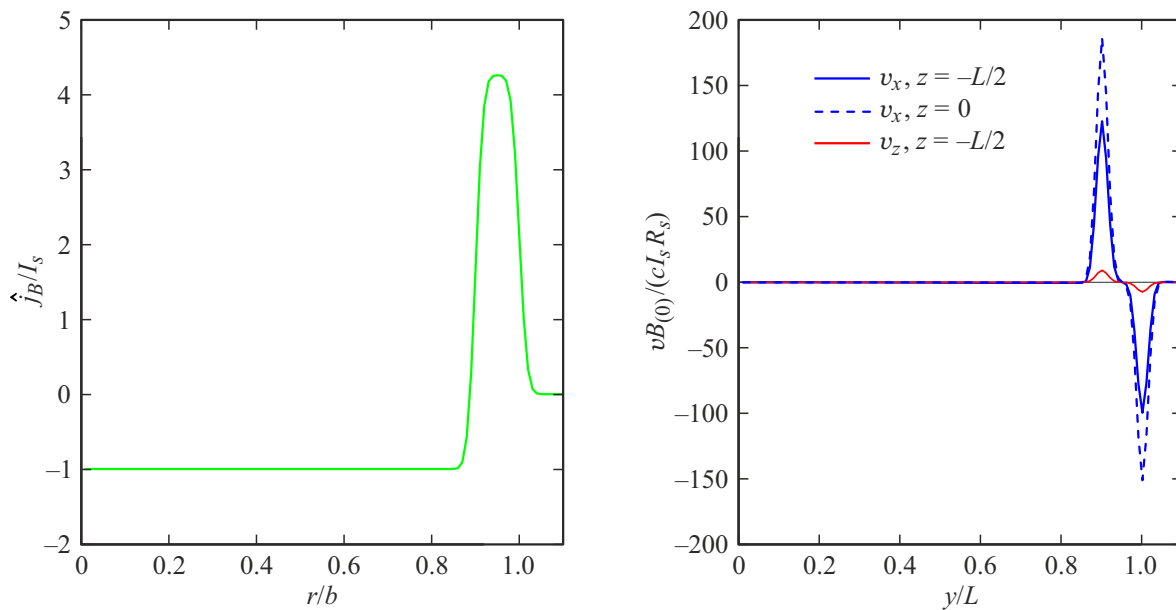


Рис. 2. На левом графике показан профиль тока, втекающего из магнитосферы. На правом графике показаны зависимость компонент скорости v_x и v_z от y при $\tilde{x} = 0$ для $z = 0$ и $z = -L/2$. В силу граничных условий $v_z = 0$ при $z = 0$.

океана с точностью до поправок $\sim 1/(\text{Ha} \cdot \cos(\beta))$. Чтобы проиллюстрировать возникающее течение рассмотрим простейший модельный случай, когда профиль втекающего из магнитосферы в жидкий слой электрического тока является осесимметричным, т.е. $\hat{j}_B(\tilde{x}, y) = \hat{j}_B(r)$, где $r = \sqrt{\tilde{x}^2 + y^2}$, а также предположим что $c_s^2 = \text{const}(z)$ и $R_{(0)} = R_s \exp(-\gamma(z + L))$. Профиль тока возьмем такой же, как и в работе [5], т.е. положим $\hat{j}_B(r) = I_s \int_0^{+\infty} \hat{\mathcal{J}}_B(k) J_0(kR) dk$, где

$$\hat{\mathcal{J}}_B(k) = (a^2 b^2 / (b^2 - a^2)) ((1/b) J_1(kb) - (1/a) J_1(ka)) \exp(-\varepsilon k^2).$$

Этот профиль тока для случая $a = 0.9b$ и $\varepsilon = 10^{-4}$ показан на левом графике рис. 2. На правом графике рис. 2 показаны компоненты скорости v_x и v_z возникающего при таком токе течения в плоскости $\tilde{x} = 0$ для $z = 0$ и $z = -L/2$ для случая $\beta = 45^\circ$, $b = L$, $gL/c_s^2 = 1$ и $\gamma L = 1$. Видно что, как и в случае вертикального магнитного поля $\beta = 0$ [5], почти все течение сосредоточено вблизи границы пульсарной трубки, где имеется градиент электрического тока.

Заключение

Мы рассмотрели выражение для течения жидкости, возникающего в океане на поверхности нейтронной звезды под действием электрического тока \hat{j}_B , текущего в магнитосфере, в случае наклонного однородного магнитного поля $\mathbf{B}_{(0)}$. Как и в работах [5,6], скорость получившегося течения чрезвычайно мала. При $B_{(0)} \sim 10^{12}$ Gs и $P \sim 1$ s полагая $\hat{j}_B \sim \Omega B_{(0)} / (2\pi c)$ мы

имеем $v \sim 10^{-10} - 10^{-8}$ cm s $^{-1}$. Это отражает тот факт, что электрический ток практически не замыкается в слое жидкости [5], что согласуется с результатами работы [3] и, в частности, подтверждает выводы работы [2] о торможении пульсара J0901-4046 токовыми потерями за счет токов текущих через вакуумный зазор в том числе и в случае наличия мелкомасштабного магнитного поля на поверхности нейтронной звезды. В отличие от случая $\beta = 0$, рассмотренного в [5,6], учет наклона поля приводит к возникновению вертикальной составляющей течения жидкости, сравнимой по величине с горизонтальными составляющими. Возможно такое течение может приводить к возникновению очень медленно нарастающей неустойчивости, в чем-то подобной той, что рассмотрена в работе [11]. Стоит также отметить, что при магнитном поле, близком к горизонтальному, $\cos \beta \lesssim 0.1$ скорость течения может возрасти в $\sim 10^2 - 10^3$ раз и в области с резкими градиентами электрического тока возможна ситуация с $\text{Re} > 1$. В этом случае полученное решение уже не применимо и возможно возникновение неустойчивости [11].

Благодарности

Авторы благодарят А.И. Цыгана и М.В. Воронцова за поддержку, комментарии и полезные обсуждения, А.И. Чугунова, А.В. Бирюкова, И.Ф. Малова, В.А. Урпина и Е.А. Михайлова за комментарии и полезные обсуждения, а также анонимного рецензента за замечание насчет случая $\cos \beta \approx 0$.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] В.С. Бескин. УФН, **188**, 377. (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2017.10.038216 [V.S. Beskin. Phys.-Uspekhi, **61** (4), 353 (2018). DOI: 10.3367/UFNe.2017.10.038216]
- [2] D.N. Sob'yanin. Phys. Rev. D, **107**, L081301 (2023). DOI: 10.1103/PhysRevD.107.L081301
- [3] D.N. Sob'yanin. Phys. Rev. D, **109**, L061302 (2024). DOI: 10.1103/PhysRevD.109.L061302
- [4] Е.А. Михайлов, А.Ю. Чудновский. Сибирский журнал индустриальной математики, **23** (4), 88 (2020). DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.407 [E.A. Mikhailov, A.Y. Chudnovsky. J. Appl. Industrial Mathem., **14**, 722 (2020). DOI: 10.1134/S1990478920040109]
- [5] А.И. Цыган, Д.А. Шалыбков, Д.П. Барсуков, О.А. Гогли-чидзе. Научно-технические ведомости СПбПУ. Физико-математические науки, **194** (2), 120 (2014).
- [6] M.V. Vorontsov, D.P. Barsukov. J. Phys. Conf. Ser., **1400**, 022022 (2019). DOI: 10.1088/1742-6596/1400/2/022022
- [7] P. Haensel, A.Y. Potekhin, D.G. Yakovlev. *Neutron stars I. Equation of State and Structure* (Springer, NY., 2007), p. 13. ISBN 0387335439
- [8] А.И. Чугунов, Д.Г. Яковлев. АЖ, **82** (9), 814 (2005). [A.I. Chugunov, D.G. Yakovlev, Astronomy Reports, **49** (9), 724 (2005). DOI: 10.1134/1.2045323]
- [9] D.D. Ofengeim, D.G. Yakovlev. Europhys. Lett., **112** (5), 59001 (2015). DOI: 10.1209/0295-5075/112/59001
- [10] A.Y. Potekhin. A&A, **351**, 787 (2015). DOI: 10.48550/arXiv.astro-ph/9909100
- [11] Е.А. Kuznetsov, Е.А. Mikhailov. eprint arXiv:2402.16989 (2024). DOI: 10.48550/arXiv.2402.16989