

Гармонический анализ либрационной модели лунного жидкого ядра

© А.А. Загидуллин,¹ Н.К. Петрова,² А.О. Андреев,^{1,2} Ю.А. Нефедьев¹

¹ Казанский (Приволжский) федеральный университет,
420008 Казань, Россия

² Казанский государственный энергетический университет,
420066 Казань, Россия
e-mail: star1955@yandex.ru

Поступило в Редакцию 2 мая 2024 г.

В окончательной редакции 8 сентября 2024 г.

Принято к публикации 30 октября 2024 г.

Приведена методика построения теории вращения Луны, имеющей жидкое ядро. Решение задачи выполнено в рамках метода Пуанкаре, позволяющего рассматривать вращательное движение тела с полостью, заполненной однородной несжимаемой жидкостью, находящейся в гравитационном поле. Представлен математический аппарат решения подобной задачи для упрощенной модели двухслойной Луны.

Ключевые слова: лунное ядро, физическая либрация Луны, метод Пуанкаре.

DOI: 10.61011/JTF.2024.12.59249.347-24

Задача учета влияния ядра Луны на ее вращение стала актуальной после ряда открытий, сделанных в 70–80 годы прошлого столетия по магнитометрическим, сейсмологическим и лазерным измерениям с помощью наземной и налунной аппаратуры [1]. Проведены исследования, которые неопровержимо свидетельствовали о сложной стратиграфии лунного тела и о возможном существовании в недрах Луны жидкого ядра. При этом отсутствие сильного магнитного поля у Луны свидетельствовало о том, что если ядро и есть, то оно имеет малые размеры и/или медленно вращается [2]. Большой вклад в определении параметров возможного лунного ядра был сделан учеными NASA под руководством Джеймса Вильямса [3], когда в теорию физической либрации было включено лунное ядро определенного химического состава. Путем компьютерного моделирования параметров теории либрации и верификации полученных результатов с использованием достаточно длинных рядов лазерных наблюдений был сделан вывод, что размеры ядра оценивались в пределах 300–600 km в зависимости от химического состава: чисто железное ядро или оно имеет эвтектическую композицию Fe–FeS. Эти данные были важны, но они являлись лишь косвенным доказательством наличия лунного ядра. Однако в 2011 г., используя новые методы Аполлонских сейсмограмм (Weber et al. [4]) пришли к выводу, что Луна, так же как и Земля, имеет раскаленное металлическое ядро. Диаметр его составляет примерно 330–360 km, оно окружено частично расплавленной оболочкой диаметром примерно 480 km, а внутри находится твердое железное ядро диаметром примерно 240 km. Таким образом, были впервые получены прямые свидетельства о лунном ядре и о его двухслойной структуре. По оценкам [5] масса лунного ядра составляет 1.63–2.06% от массы всей Луны, а радиус — около 20% от радиуса Луны. Согласно переработанным сейсмологическим данным [5], ядро имеет тонкую твердую оболочку и жидкую компоненту,

момент инерции которой составляет примерно 70% от общего момента инерции лунного ядра [6]. В настоящей работе получена система уравнений для ротора скорости движения частицы в системе отсчета, связанной с самой жидкостью, и дополнительной скорости, обусловленной вращением всего небесного тела. Решение полученных систем уравнений проводилось численным методом. Начальные значения вычислялись на основе теории физической либрации для твердой Луны. Был получен спектр остаточных разностей для трех компонент либрации и сделана попытка частотного анализа этого спектра с целью выявления частот, на которых проявляется жидкое ядро.

Строить теорию физической либрации для трехслойной модели ядра — задача достаточно сложная, тем более, что такая структура дает очень слабые наблюдаемые проявления. Поэтому теоретическое описание вращения Луны с ядром реализовывалась в разных теориях на упрощенных моделях ядра, а затем методами компьютерного моделирования делалась оценка вклада ядра в либрацию путем сравнения либо непосредственно с лазерными наблюдениями, либо с высокоточными теориями физической либрации Луны такими, как DE или ELP. При построении нашей теории физической либрации мы проводили сравнение с полуэмпирическими рядами Рамбо и Вильямса [7].

В этом контексте значимым вкладом в изучение вращения двухслойной Луны явилась работа Баркина и др. [8]. Здесь впервые была построена аналитическая теория либрации для двухслойной Луны: в этой теории заложена модель ядра, параметры которого — размер, масса, моменты инерции — оценивались на обработке сейсмологических, лазерных данных в работах [4,7,9], а также на гравиметрических данных миссии Selene. Согласно результатам анализа теории [8], гидродинамическое влияние жидкого ядра на физическую либрацию Луны проявилось в том, что в полученном

решении обнаружили новые гармоники, частоты которых совпали с теми частотами полуэмпирических рядов [7], физической природы которых Рамбо и Вильямс не нашли объяснения. Это очень важный момент: факт совпадения полученных из теории частот с данными наблюдений открывает новые возможности определения параметров ядра.

В нашем исследовании мы частично следуем идеям работы [8], в которой на аналитическом уровне использовался метод Пуанкаре, но у нас свой подход к описанию параметров вращения Луны и соответственно иной способ построения либрационных уравнений. Метод, предложенный Пуанкаре, позволяет рассматривать во взаимодействии вращательное движение тела с полостью, заполненной однородной несжимаемой жидкостью, которая находится в гравитационном поле [10].

Для построения теории вращения двухслойного небесного тела мы рассматриваем его упрощенную модель: динамические фигуры и внешней, твердой, оболочки, и внутренней, жидкой, полости имеют форму кругового эллипсоида, т.е. вследствие вращения сжатие происходит только вдоль полярной оси, а в экваторе такого тела — круг. Для этой модели экваториальные моменты инерции $A = B$ и $A_1 = B_1$ будут равными. Параметры ядра мы брали из работы [8] с целью сравнения нашего решения с результатами аналитической теории. Вторым упрощением является предположение, что на начальный момент времени моменты инерции твердой Луны и жидкой полости сонаправлены (рис. 1). Такое предположение имеет право на существование, так как вязкость внешнего лунного ядра все-таки достаточно высокая — $(2.07 \pm 1.03) \cdot 10^{17}$ Па · с [10], что указывает на то, что материал ядра не сильно текучий, ядро будет менее подвижным внутри твердой оболочки и расхожде-

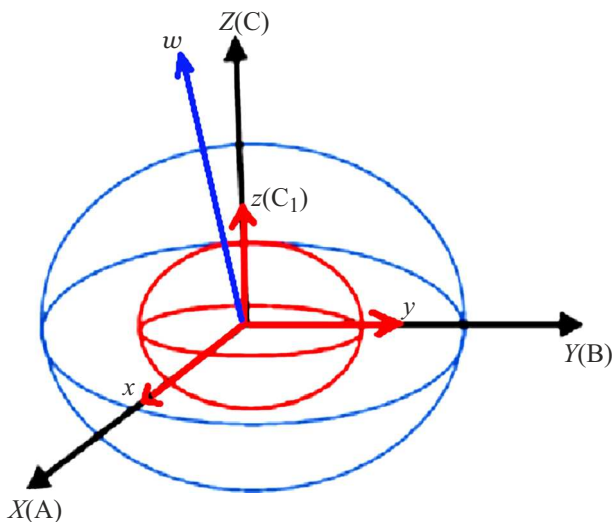


Рис. 1. Двухслойная модель небесного тела, плоскостью экваторов которых являются окружности. Подвижная система координат (x, y, z) совпадает с главными моментами инерции жидкой полости. Неподвижная (X, Y, Z) — это ДСК Луны.

ние триэдров осей инерции ядра твердой оболочки будут небольшими. Другими словами, мы предполагаем, угловая скорость эллипсоидального ядра совпадает с угловой скоростью вращения всего тела. Такое предположение позволяет нам вычислять начальные значения компонентов скорости вращения ядра на основе построенной уже нами теории твердой Луны [6].

Анри Пуанкаре внес значительный вклад в развитие математической физики и механики, особенно в изучение динамики жидкостей и теории хаоса. Одним из аспектов его работ является изучение векторного поля скоростей элементов жидкости в подвижной системе координат, оно определяется как описание скорости частиц жидкости в каждый момент времени в заданной точке пространства в подвижной системе координат. Для вращающейся жидкой полости за подвижную систему координат (x, y, z) обычно принимается система, которая может вращаться вместе с объектом. В нашем случае это триэдр главных осей инерции, соответствующих моментам (A_1, B_1, C_1) . Эту систему мы называем динамической системой координат (ДСК) ядра.

Уравнения, описывающие векторное поле скоростей вращения жидкости внутри эллипсоидальной полости, имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta_x}{a} &= q_y \frac{z}{c} - q_z \frac{y}{a}, \\ \frac{\vartheta_y}{a} &= q_z \frac{x}{a} - q_x \frac{z}{c}, \\ \frac{\vartheta_z}{c} &= q_x \frac{y}{a} - q_y \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Здесь $\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z$ — компоненты скоростей жидкости в подвижной системе координат; $a, b = a, c$ — размеры (полуоси) эллипсоидальной полости; q_x, q_y, q_z — функции времени, представляющие собой компоненты угловой скорости \mathbf{q} вращения жидкости.

Начало координат подвижной системы (x, y, z) связано с центром масс Луны. Ее движение изучается в неподвижной системе координат, в качестве которой нам удобно взять систему главных моментов инерции мантии Луны — A, B, C — ДСК мантии.

Обозначим ротор вектора поступательной скорости частицы \mathbf{V} в неподвижной системе отсчета жидкости как $\xi = \text{rot}(\mathbf{V})$, при переходе во вращающуюся систему отсчета получим, что данный вектор ξ можно представить в виде следующей суммы $\xi = \xi^{(1)} + 2\mathbf{w}$, где \mathbf{w} — угловая скорость вращения небесного тела, а $\xi^{(1)}$ — некоторая векторная функция от размеров $a, b = a, c$ и скорости \mathbf{q} . В нашей модели угловая скорость эллипсоидального ядра совпадает с угловой скоростью \mathbf{w} вращения всего тела.

Физический смысл компоненты $\xi^{(1)}$ состоит в том, что она представляет собой ротор вектора скорости частиц в системе отсчета, связанной с самой жидкостью. Это некий локальный вклад в общее вращательное движение, связанный с характеристиками самой жидкости (например, со структурой и движением внутри

жидкости). Так как угловая скорость \mathbf{w} не зависит от внутренней динамики самой жидкости, она добавляется как явный „накрут“ на общий ротор. Термин „накрут“ в данном контексте описывает эффект, который возникает, когда угловая скорость жидкости добавляется к ротору, не завися от динамики самой жидкости. Это означает, что угловая скорость представляет собой „добавленное“ движение, которое накладывается на существующее вращение. Таким образом, $\xi^{(1)}$ учитывает все внутренние движения внутри жидкости, которые не связаны непосредственно с вращением всего тела в целом.

Следовательно, при переходе во вращающуюся систему отсчета ротор скорости \mathbf{V} делится на две составляющие:

- 1) $\xi^{(1)}$ — локальный вклад, зависящий от характеристик самой жидкости и ее движения;
- 2) $2\mathbf{w}$ — вклад, связанный с угловой скоростью вращения всей системы.

Запишем уравнения Ньютона для движения жидкости

$$\rho \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + (\mathbf{V}, \nabla) \mathbf{V} \right) = -\nabla p$$

в неподвижной системе отсчета, где p — это давление жидкости, определяемое внешней силой, действующей на жидкость. Взяв предварительно ротор от всего уравнения, получим следующие компоненты производной вектора $\xi^{(1)}$, описывающие характер движения элементов жидкости:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_x^{(1)} + 2\dot{w}_x - \alpha \xi_y^{(1)} w_z + \frac{1-\alpha}{2} \xi_y^{(1)} \xi_z^{(1)} + w_y \xi_z^{(1)} &= 0, \\ \dot{\xi}_y^{(1)} + 2\dot{w}_y + \alpha \xi_x^{(1)} w_z - \frac{1-\alpha}{2} \xi_x^{(1)} \xi_z^{(1)} - w_x \xi_z^{(1)} &= 0, \\ \dot{\xi}_z^{(1)} + 2\dot{w}_z + (2-\alpha) [\xi_y^{(1)} w_x - \xi_x^{(1)} w_y] &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{2a^2}{a^2 + c^2}, \quad q_x = \frac{\xi_x^{(1)}}{c/a + a/c} = \frac{c}{a} \frac{\alpha}{2} \xi_x^{(1)}, \\ q_y &= \frac{c}{a} \frac{\alpha}{2} \xi_y^{(1)}, \quad q_z = \frac{\xi_z^{(1)}}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для полного решения нужно добавить уравнения вращения. Для этой цели используем уравнения Эйлера–Лиувилля $\dot{\mathbf{M}} + [\mathbf{wM}] = \mathbf{L}$ для подвижной системы координат, где момент импульса (в неподвижной СК) с учетом жидкости принимает следующий вид:

$$M_i = \sum_k I_{ki} w_k + \iiint \rho [\mathbf{r}\mathbf{v}] dV. \quad (3)$$

После перехода во вращающуюся систему отсчета и простых преобразований, получаем

$$\begin{aligned} A\dot{w}_x + \frac{1}{2} \dot{\xi}_x^{(1)} \tilde{A} + (C-A)w_z w_y + \frac{1}{2} \dot{\xi}_z^{(1)} w_y C_1 - \frac{1}{2} \dot{\xi}_y^{(1)} w_z \tilde{A} &= L_x, \\ A\dot{w}_y + \frac{1}{2} \dot{\xi}_y^{(1)} \tilde{A} - (C-A)w_z w_x - \frac{1}{2} \dot{\xi}_z^{(1)} w_x C_1 + \frac{1}{2} \dot{\xi}_x^{(1)} w_z \tilde{A} &= L_y, \\ C\dot{w}_z + \frac{1}{2} \dot{\xi}_z^{(1)} C_1 + \frac{1}{2} \tilde{A} (\dot{\xi}_y^{(1)} w_x - \dot{\xi}_x^{(1)} w_y) &= L_z, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\tilde{A} = C_1(1-\alpha) + \alpha A_1$. Момент сил \mathbf{L} определяют поведение системы, связанное с гравитационным взаимодействием между рассматриваемым телом и внешними возмущающими телами, в первую очередь, с Землей и Солнцем. Проекции моментов сил L_x, L_y, L_z — это функции времени, и они зависят от потенциала гравитационного поля Луны. Выражение этого потенциала не приводим в силу его громоздкости, оно представлено в работе [6]. Полученные системы (1) и (4) описывают вращение эллипсоидального тела, заполненного несжимаемой жидкостью.

Совместное решение систем (1) и (4) численным методом позволило нам найти решение для компонент угловой скорости вращения Луны \mathbf{w} , которое в этом решении уже несет в себе влияние жидкой полости, вращающейся внутри твердой оболочки. Начальные значения для численного интегрирования указанных систем мы рассчитывали по нашей теории [6], что при принятых наших ограничениях на модель ядра вполне обосновано.

В теории либрации положение вращающегося тела в инерциальной системе координат описывается углами либрации [6]. Чтобы оценить, как повлияло изменение угловой скорости на либрационные углы и тем самым оценить вклад жидкого ядра на вращение Луны, воспользуемся системой кинематических уравнений Эйлера, полученных нами в [6]:

$$w_x = -\dot{M} \sin \nu - \dot{\pi},$$

$$w_y = -\dot{M} \cos \nu \sin \pi + \dot{\nu} \cos \pi,$$

$$w_z = \dot{M} \cos \nu \cos \pi + \dot{\nu} \sin \pi. \quad (5)$$

В системе (5) переменные ($\mu = M - \bar{I}_C, \nu, \pi$) — это углы либрации, задающие положение ДСК Луны относительно эклиптики и среднего направления на Землю \bar{l}_C . Решение системы дифференциальных уравнений (5) мы получили численным методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Начальные значения для углов и их производных также брали из теории [6].

Итогом решения систем уравнений (1), (4) и (5) были численные значения либрационных углов (μ^c, ν^c, π^c), которые уже включают в себя эффект наличия жидкого ядра. На рис. 2 показаны остаточные разности при сравнении (μ^c, ν^c) с углами, полученными для твердотельной Луны [6] на интервале в 15 лет. Для угла π^c картина аналогична углу ν^c , поэтому мы не стали прилагать третий график.

Первое, на что следует обратить внимание — величина остаточных разностей для всех углов мала, не превышает 5 ms, что находится на пределе точности используемого метода интегрирования. Второе — мы провели частотный анализ для полученных спектров остаточных разностей с целью выделить частоты, на которых сильнее всего проявляется влияние жидкого ядра. Мы надеялись, что они совпадут с частотами, полученным в работе [8] или с частотами членов U_n в рядах [7]. На рис. 3 представлены результаты частотного

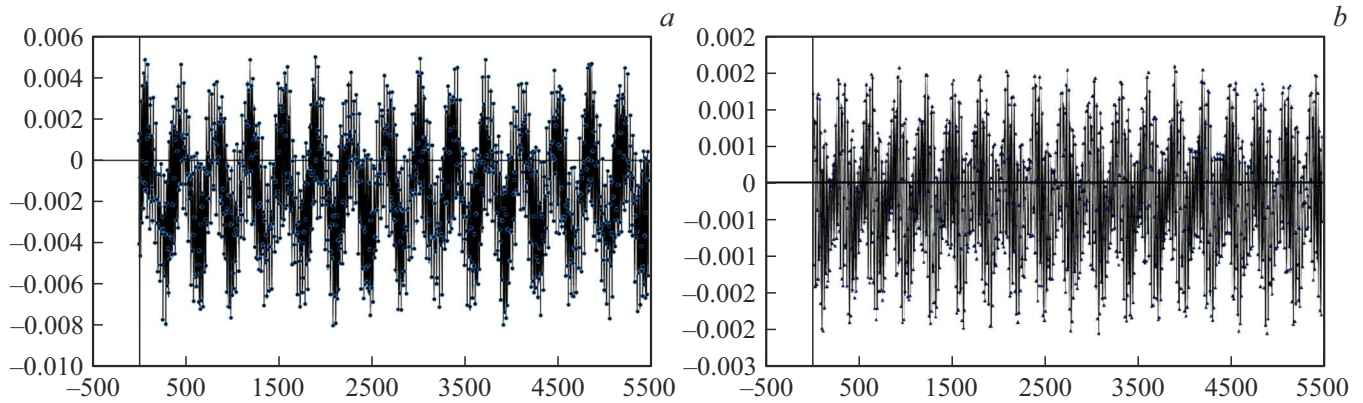


Рис. 2. Диаграммы остаточных разностей в углах либрации по долготе μ (a) и по широте ν (b) при сравнении двухслойной и твердотельной моделей.

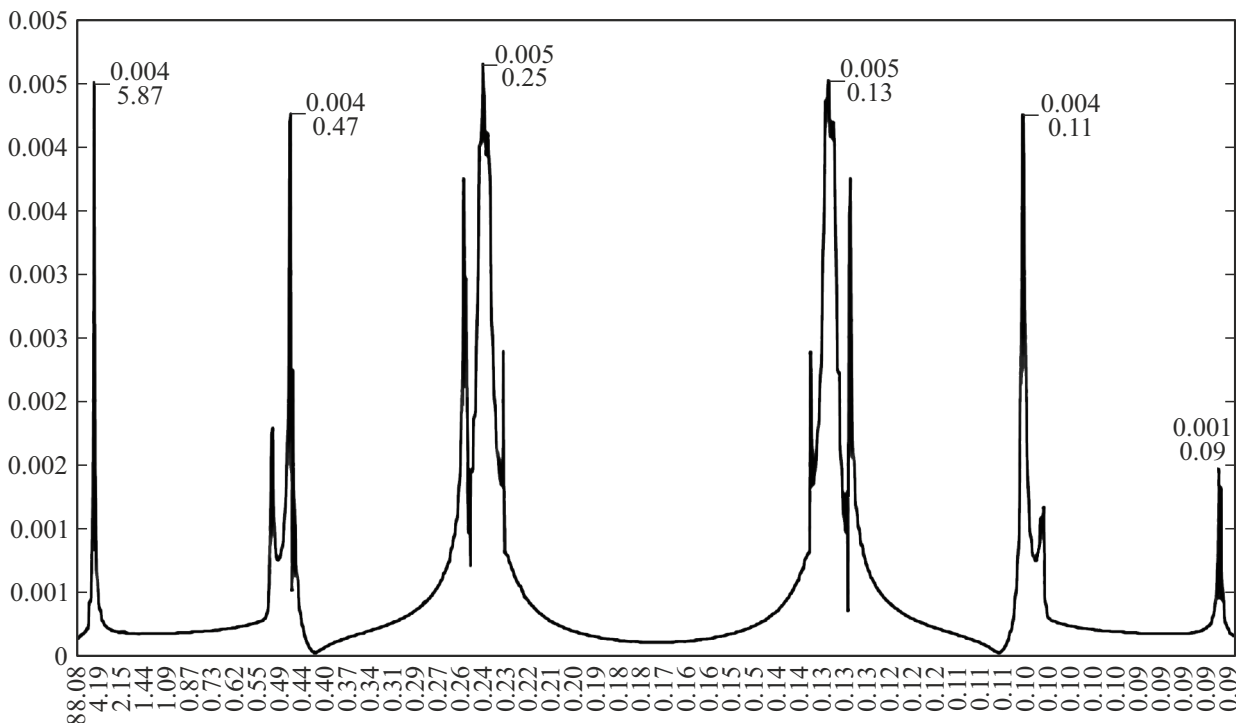


Рис. 3. Спектр остаточных разностей в угле либрации μ . Ось ординат задана в дуговых секундах, ось абсцисс — в годах.

анализа для либрации по долготе. К сожалению, спектр выделенных частот не соответствует ни данным [7], ни данным [8]. Выделенные периоды (5.87 лет, 0.47 года и т.д.) не наблюдаются в либрационных рядах Луны, и, похоже, не имеют физического смысла. Для широтных компонент ситуация аналогичная.

Тем не менее мы считаем, что проделанная работа была выполнена не напрасно. Это только наша первая попытка рассмотреть вращение двухслойной Луны и методика, которую мы здесь описали, работает: мы получили решение, которое, как и ожидалось, несущественно отличается от решения [6]. Наша задача теперь продолжить развивать представленный подход к учету влияния ядра на лунное вращение. Для этого мы планируем

усложнить нашу исходную модель, приблизив ее к более реальной картине вращения двухслойной Луны, тщательно проверить запись всех систем уравнений как на математическом, так и программном уровнях. Полученная теория позволит уточнить параметры ядра путем компьютерного моделирования на основе разрабатываемой теории.

Финансирование работы

Работа поддержана Российским научным фондом, грант 24-22-00260.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, А.А. Загидуллин, А.О. Андреев. *Астроном. журн.*, **95** (12), 920 (2018). [N.K. Petrova, Y.A. Nefedyeu, A.A. Zagidullin, A.O. Andreev. *Astron. Rep.*, **62** (12), 1021 (2018). DOI: 10.1134/S1063772918120120].
- [2] L.L. Hood, D.L. Mitchell, R.P. Lin, M.H. Acuna, A.B. Binder. *Geophys. Res. Lett.*, **26**, 2327 (1999). DOI: 10.1029/1999GL900487
- [3] J.G. Williams, D. Boggs, Ch. Yoder, J. Ratcliff, J. Dickey. *Journal of Geophysical Research*, **106**, No. E11, 933–968 (2001). DOI: 10.1029/2000JE001396
- [4] R. Weber, P. Lin, E.J. Garnero, Q. Williams, P. Lognonne. *Science* **331** (6015), 309–312 (2011). DOI: 10.1126/science.1199375
- [5] A. Briaud, C. Ganino, A. Fienga, A. Mémin, N. Rambaux. *Nature*, **617**, 743 (2023). DOI: 10.1038/s41586-023-05935-7
- [6] А.А. Загидуллин, В.С. Усанин, Н.К. Петрова, Ю.А. Нефедьев, А.О. Андреев, Т.В. Гудкова. *Астроном. журн.*, **98** (1), 75 (2021). [A.A. Zagidullin, V.S. Usanin, N.K. Petrova, Y.A. Nefedyeu, A.O. Andreev, T.V. Gudkova. *Astron. Rep.*, **64** (12), 1093 (2020). DOI: 10.1134/S1063772921010066]
- [7] N. Rambaux, J.G. Williams. *Celest. Mech. Dyn. Astron.*, **109** (1), 85 (2011). DOI: 10.1007/s10569-010-9314-2
- [8] Y. Barkin, H. Hanada, K. Matsumoto, S. Sasaki, M. Barkin. *Solar Sys. Res.*, **48** (6), 403 (2014). DOI: 10.1134/S003809461406001X
- [9] J.G. Williams, A.S. Konopliv, D.H. Boggs, R.S. Park, D.-N. Yuan, F.G. Lemoine, S. Goossens, E. Mazarico, F. Nimmo, R.C. Weber, S.W. Asmar, H.J. Melosh, G.A. Neumann, R.J. Phillips, D.E. Smith, S.C. Solomon, M.M. Watkins, M.A. Wicczorek, J.C. Andrews-Hanna, J.W. Head, W.S. Kiefer, I. Matsuyama, P.J. McGovern, G.J. Taylor, M.T. Zuber. *J. Geophys. Res. Planets*, **119**, 1546 (2014). DOI: 10.1002/2013JE004559
- [10] A. Briaud, A. Fienga, D. Melini, N. Rambaux, A. Mémin, G. Spada, C. Saliby, H. Hussmann, A. Stark, V. Viswanathan, D. Baguet. *Icarus*, **394**, 115419 (2023). DOI: 10.1016/j.icarus.2023.115426