

04

Стационарные состояния релятивистского диода с электрон-позитронной плазмой

© В.И. Кузнецов, Л.А. Бакалейников, И.К. Морозов, Е.Ю. Флегонтова, Д.П. Барсуков

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: morozov22505@gmail.com

Поступило в Редакцию 23 июля 2024 г.

В окончательной редакции 23 июля 2024 г.

Принято к публикации 2 августа 2024 г.

Рассматриваются стационарные состояния диода, в котором электроны и позитроны поступают с противоположных электродов и движутся в плазме с релятивистскими скоростями без столкновений. При фиксированной разнице потенциалов между электродами решения характеризуются тремя параметрами: безразмерной напряженностью электрического поля у левого электрода ϵ_0 , величиной межэлектродного расстояния δ и релятивистским фактором вылетающих электронов γ_0 . На плоскости $\{\epsilon_0, \delta\}$ построены ветви решений, которые качественно совпадают с ветвями решений в нерелятивистском случае. С ростом релятивистского фактора ветви решений сжимаются по оси ϵ_0 и растягиваются по оси δ .

Ключевые слова: плазменный диод, пучки электронов и позитронов, стационарные состояния.

DOI: 10.61011/PJTF.2024.22.59137.20067

Электрон-позитронная плазма с релятивистскими потоками электронов и позитронов встречается во многих высокоэнергетических астрофизических объектах [1], в частности пульсарах, природа генерации радиочастотного излучения которых до сих пор не выяснена [2]. Кроме того, электрон-позитронная плазма активно изучается в лабораторных условиях [3].

В работе [4] высказана гипотеза о том, что радиочастотное излучение пульсаров вызвано колебаниями электрического поля в плазме, которые возникают из-за неустойчивости стационарных состояний. Для изучения этих процессов предложена модель пульсарного диода, в котором электроны и позитроны поступают с противоположных границ. Стационарные состояния нерелятивистского диода изучены в [5]. В настоящей работе исследуются стационарные состояния релятивистского диода. Найдены все решения и изучена их зависимость от релятивистского фактора. Показано, что качественно решения совпадают с аналогичными решениями для нерелятивистского диода.

Рассматриваем диод плоской геометрии с расстоянием d и разностью потенциалов U между электродами. Считаем, что релятивистские моноэнергетические потоки электронов и позитронов поступают с левого и правого электродов со скоростями $v_{e,0}$ и $v_{p,0} = -v_{e,0}$ и плотностями $n_{e,0} = n_{p,0} = n_0$. Вследствие равенства масс покоя электрона и позитрона ($m_e = m_p = m_0$) энергии входящих частиц равны. Частицы движутся в межэлектродном промежутке без столкновений. Частица, достигшая какого-либо электрода, поглощается на нем.

Введем импульсы электронов P_e и позитронов P_p

$$P_e = \gamma_e m_e v_e, \quad P_p = \gamma_p m_p v_p, \quad \gamma_{e,p} = [1 - v_{e,p}^2/c^2]^{-1/2}. \quad (1)$$

Здесь c — скорость света в вакууме, а $\gamma_{e,p}$ — релятивистские факторы электронов и позитронов. Как и в

нерелятивистском диоде [5], стационарные распределения потенциала (РП) имеют волнообразную форму. Если величина потенциального барьера $e|\varphi_m|$ оказывается равной $W_0 = (\gamma_{e,0} - 1)m_e c^2$, некоторая часть электронов отражается от потенциального барьера (электронного виртуального эмиттера, e -ВЭ), а другая проходит через него. „Расщепление“ пучка электронов связано с тем, что электроны реально имеют некоторый разброс по импульсам. Следуя данным работы Бурсиана [6], можно ввести коэффициент отражения r_e , равный отношению плотности отраженных электронов к плотности эмитированных электронов. Плотность тока электронов, преодолевших барьер, $j_e = (1 - r_e)j_{e,0}$, где $j_{e,0} = en_{e,0}v_{e,0}$ — плотность электронного тока на левой границе (e — заряд электрона). Аналогично вводим коэффициент отражения позитронов r_p от позитронного виртуального эмиттера (p -ВЭ).

Концентрация электронов в стационарном случае находится с помощью закона сохранения энергии и уравнения неразрывности. Из закона сохранения энергии

$$(\gamma_e(z) - 1)m_e c^2 - e\varphi(z) = (\gamma_{e,0} - 1)m_e c^2 \quad (2)$$

можно выразить скорость $v_e(z)$ через потенциал $\varphi(z)$. В отсутствие отражения электронов из уравнения неразрывности получаем

$$j_e = en_e(z)v_e(z) = en_{e,0}v_{e,0} = j_{e,0}. \quad (3)$$

Концентрации электронов и позитронов n_e и n_p в зазоре с учетом отражения

$$n_{e,p}(z; r_{e,p}) = \frac{j_{e,p,0}}{ev_{e,p}(z)} \alpha_{e,p}(z; r_{e,p}),$$

$$\alpha_e(z; r_e) = (1 + r_e)\Theta(z_m - z) + (1 - r_e)\Theta(z - z_m),$$

$$\alpha_p(z; r_p) = (1 + r_p)\Theta(z - z_m) + (1 - r_p)\Theta(z_m - z). \quad (4)$$

Здесь $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, z_m (z_M) — положение e -ВЭ (p -ВЭ), где потенциал равен φ_m (φ_M). Для нахождения РП подставим концентрации электронов и позитронов (4) в уравнение Пуассона. Удобно записать это уравнение в безразмерном виде. Для этого выберем в качестве единиц энергии и длины начальную энергию электронов и длину Дебая на левой границе [7]:

$$W_0 = (\gamma_0 - 1)m_0c^2,$$

$$\lambda_D = [(\tilde{\epsilon}_0 W_0)/(e^2 n_0)]^{1/2} = [(\tilde{\epsilon}_0 m_0 c^3)/(e j_0)]^{1/2} F(V_0),$$

$$F(V_0) = \left(\frac{eV_0}{m_0c^2}\right)^{3/4} \left(\frac{eV_0}{m_0c^2} + 2\right)^{1/4} \left(\frac{eV_0}{m_0c^2} + 1\right)^{-1/2}. \quad (5)$$

Здесь $\tilde{\epsilon}_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$ — диэлектрическая проницаемость вакуума, $j_0 = j_{e,0} = j_{p,0}$ — плотность тока пучков частиц, $\gamma_0 = \gamma_{e,0} = \gamma_{p,0}$ — релятивистский фактор частиц на границах, $V_0 = W_0/e$ — ускоряющее напряжение. Для безразмерных координаты, потенциала и напряженности электрического поля имеем $\xi = z/\lambda_D$, $\eta = e\varphi/(2W_0)$ и $\varepsilon = eE\lambda_D/(2W_0)$. В безразмерных переменных уравнение Пуассона примет следующий вид:

$$\eta'' = \frac{(\gamma_0^2 - 1)^{1/2}}{\gamma_0} \left(\frac{\alpha_e(\xi; r_e)[\gamma_0 + 2(\gamma_0 - 1)\eta]}{\{[\gamma_0 + 2(\gamma_0 - 1)\eta]^2 - 1\}^{1/2}} - \frac{\alpha_p(\xi; r_p)[\gamma_0 + 2(\gamma_0 - 1)(V - \eta)]}{\{[\gamma_0 + 2(\gamma_0 - 1)(V - \eta)]^2 - 1\}^{1/2}} \right). \quad (6)$$

В пределе $\gamma_0 \rightarrow 1$ это уравнение переходит в соответствующее уравнение для нерелятивистского диода. Потенциал на границах удовлетворяет условиям $\eta(0) = 0$, $\eta(\delta) = V$, где $\delta = d/\lambda_D$, $V = eU/2W_0$. Таким образом, в релятивистском диоде стационарные решения определяются параметрами δ , V и γ_0 (в нерелятивистском диоде — только δ и V).

Распределения потенциала являются волнообразными функциями. Обозначим через η_m и η_M минимальное и максимальное значения на РП. Для них справедливы неравенства $-1/2 < \eta_m < \min\{0, V\}$, $\max\{0, V\} < \eta_M < V + 1/2$. Как и в нерелятивистском случае [5], существует четыре типа решений, которые сведены в таблицу.

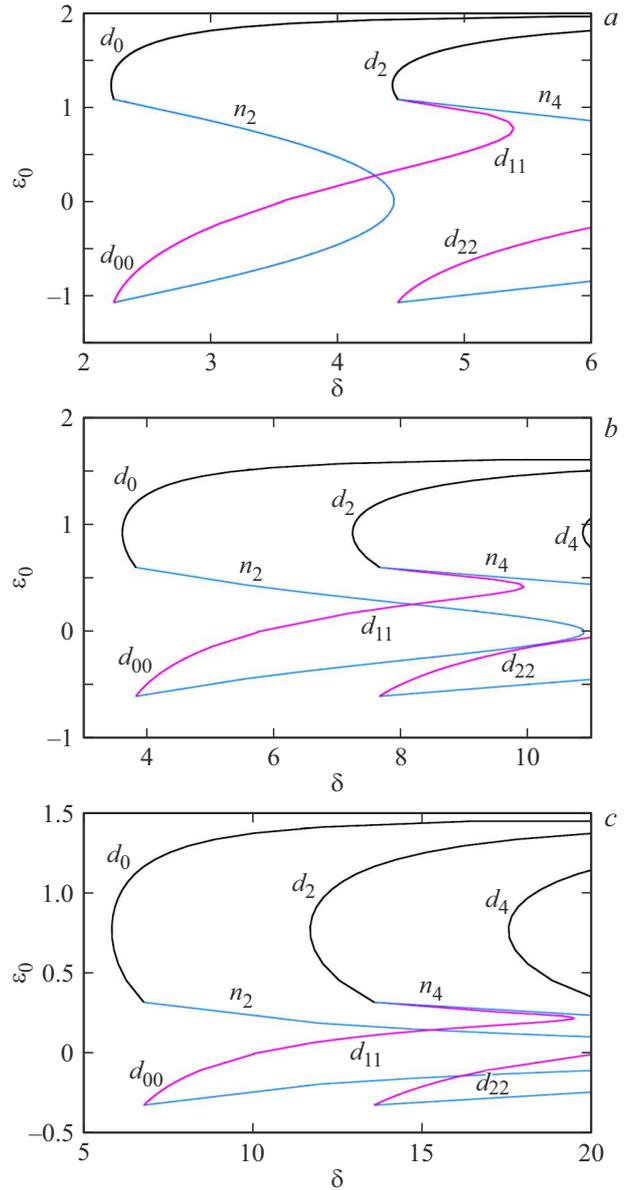
В настоящей работе будем рассматривать только решения с $V = 0$. Вследствие симметрии задачи РП должны быть нечетно-симметричными относительно центра зазора, и могут существовать только два из приведенных в таблице типов решений: 1 и 4.

Решения для нерелятивистского диода получены в [5] и показаны на рисунке, а.

Ветвь n_{2s} соответствует однородным ($s = 0$) и неоднородным ($s > 0$) решениям типа 1, ветви d_0 , d_{00} и d_{11} соответствуют решениям типа 4. Все эти решения существуют и для релятивистского диода.

Для исследования стационарных распределений потенциала умножим уравнение (6) на $2d\eta/d\xi$ и проинтегрируем один раз по ξ от ξ_1 до ξ :

$$[\eta'(\xi)]^2 - [\eta'(\xi_1)]^2 = G(\eta(\xi)) - G(\eta(\xi_1)), \quad (7)$$



Ветви стационарных решений для значений $\gamma_0 = 1$ (a), 3 (b) и 10 (c). $V = 0$.

где

$$G(x) = \sqrt{\gamma_0 + 1} \left[\alpha_e(\xi; r_e) \sqrt{[\gamma_0 + 2(\gamma_0 - 1)x]^2 - 1} + \alpha_p(\xi; r_p) \sqrt{[\gamma_0 + 2(\gamma_0 - 1)(V - x)]^2 - 1} \right] \times (\gamma_0 \sqrt{\gamma_0 - 1})^{-1}.$$

Уравнение (7) является базовым соотношением, на основе которого удастся найти и исследовать РП для всех ветвей.

Рассмотрим сначала режим без отражения частиц. Здесь $\alpha_e = \alpha_p = 1$, а все минимумы (максимумы) на РП равны между собой. Эти решения лежат на ветвях n_{2s} .

Таблица типов стационарных решений

Тип решения	Отражение	r_e	r_p	η_m	η_M
1	Нет	$r_e = 0$	$r_p = 0$	$\eta_m > -1/2$	$\eta_M < V + 1/2$
2	e	$0 < r_e < 1$	$r_p = 0$	$\eta_m = -1/2$	$\eta_M < V + 1/2$
3	p	$r_e = 0$	$0 < r_p < 1$	$\eta_m > -1/2$	$\eta_M = V + 1/2$
4	e, p	$0 < r_e < 1$	$0 < r_p < 1$	$\eta_m = -1/2$	$\eta_M = V + 1/2$

Величина минимума η_m связана с напряженностью поля на левой границе ε_0 соотношением (7) при $\eta(\xi) = 0$, $\eta(\xi_1) = \eta_m$. При $\varepsilon_0 > 0$ около левого электрода лежит минимум, а при $\varepsilon_0 < 0$ — максимум. Максимальное значение $|\varepsilon_0|$ достигается при $\eta_m = -1/2$:

$$|\varepsilon_{0,\max}| = \frac{(\gamma_0 + 1)^{1/4}}{\gamma_0^{1/2}} \times \left(\sqrt{\gamma_0 + 1} + \sqrt{\gamma_0 + 1 + 4\gamma_0 V + 4(\gamma_0 - 1)V^2} - \sqrt{\gamma_0 + 1 + 4\gamma_0(V + 1/2) + 4(\gamma_0 - 1)(V + 1/2)^2} \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Используя (7) при $\eta(\xi) = \eta_M$, $\eta(\xi_1) = \eta_m$ и учитывая, что в этих точках $\eta'(\xi)$ обращается в нуль, получим связь: $\eta_M = V - \eta_m$. В случае $\gamma_0 \gg 1$ и $V = 0$ область существования решений без отражения частиц сильно сжимается по ε_0 , поскольку $|\varepsilon_{0,\max}| \sim \gamma_0^{-3/4}$, и РП оказываются функциями колебательного характера с малой амплитудой.

Для построения РП уравнение (7) нужно разрешить относительно производной потенциала и проинтегрировать по η , что дает неявную зависимость $\eta(\xi)$. При $|\eta_m| \ll 1$ решение удается получить аналитически. В этом случае связь между ε_0 и η_m имеет вид $\varepsilon_0^2 = 4/[\gamma_0(\gamma_0 + 1)]\eta_m^2$. Тогда на участке ($\xi \leq \xi_m$) решение принимает вид

$$\xi = \int_{\eta}^0 \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon_0^2 + [G(x) - G(0)]}} = \frac{[\gamma_0(\gamma_0 + 1)]^{1/2}}{2} \arcsin\left(\frac{\eta}{\eta_m}\right). \quad (9)$$

Отсюда для правой границы ветви n_2 получаем $\delta(\gamma_0) = 4\xi_m = [\gamma_0(\gamma_0 + 1)]^{1/2}\pi$. Эта формула показывает, что межэлектродное расстояние $\delta(\gamma_0)$ в нерелятивистском пределе ($\gamma_0 \rightarrow 1$) равно $\sqrt{2}\pi$, а при $\gamma_0 \gg 1$ оно стремится к бесконечности примерно пропорционально γ_0 . Таким образом, ветви решений на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$ растягиваются по δ с ростом γ_0 . Это видно из рисунка, b и c , где эта плоскость показана для $\gamma_0 = 3$ и 10 .

Рассмотрим теперь режим с отражением частиц обоих сортов. Здесь имеет место отражение как электронов, так и позитронов на соответствующих виртуальных

эмиттерах. Минимальное η_m и максимальное η_M значения РП равны $-1/2$ и $V + 1/2$ соответственно. Возможны решения двух типов. У первого типа (ветви d_{2s}) виртуальные эмиттеры находятся около соответствующих эмиттеров, у второго (ветви $d_{i,i}$) — e -ВЭ находится справа от p -ВЭ. Для обоих случаев $r_e = r_p$.

Для РП, принадлежащих ветви d_{2s} , слева от e -ВЭ невозможно существование волны, у которой величина максимума $\eta_{\max} < V + 1/2$. Справа от p -ВЭ также невозможна волна, у которой величина минимума $\eta_{\min} > -1/2$. Простейший тип решений — волна с минимумом, лежащим около левого электрода, и с максимумом, лежащим около правого. Решения с большим числом волн строятся путем добавления целого числа полуволн между e -ВЭ и p -ВЭ. У этих решений все $\eta_{\min} = \eta_m = -1/2$, а все $\eta_{\max} = \eta_M = V + 1/2$.

Ветви d_{2s} лежат в верхней части плоскости (ε_0, δ) . Для них связь ε_0 с коэффициентом отражения r находится с помощью соотношения (7), примененного на интервале $[0, \xi_m]$. Можно показать, что при $\gamma_0 \gg 1$ минимум ε_0 достигается при $r = 0$, убывая с ростом γ_0 как $\gamma_0^{-3/4}$, а максимум достигается при $r = 1$ и стремится к $\sqrt{2}$ независимо от V (это в $\sqrt{2}$ раз меньше, чем при $\gamma_0 = 1$). При добавлении к РП целого числа длин волн получаем новые ветви решений d_{2s} .

С другой стороны, у решений типа 2 (ветви $d_{i,i}$) в области $\xi < \xi_M$ может существовать волна с $\eta_{\max} = V + 1/2$, но со значениями минимальных потенциалов $\eta_{\min} > -1/2$. Использование уравнения (7) на интервале $[\xi_m, \xi_M]$ позволяет установить связь между η_m и коэффициентом отражения r . Условие $\eta_m \leq 0$ дает ограничение на r :

$$r_{\lim} = \left[\sqrt{\gamma_0 + 1} + \sqrt{\gamma_0 + 1 + 4\gamma_0 V + 4(\gamma_0 - 1)V^2} - \sqrt{\gamma_0 + 1 + 2\gamma_0(2V + 1) + (\gamma_0 - 1)(2V + 1)^2} \right] \times \left[\sqrt{\gamma_0 + 1 + 2\gamma_0(2V + 1) + (\gamma_0 - 1)(2V + 1)^2} + \sqrt{\gamma_0 + 1 + 4\gamma_0 V + 4(\gamma_0 - 1)V^2} - \sqrt{\gamma_0 + 1} \right]^{-1}. \quad (10)$$

При $\gamma_0 \gg 1$ и $V = 0$ имеем $r_{\lim} \rightarrow 1/(2\gamma_0)$. Это означает, что $\eta_{\min} \rightarrow -1/2$, а решения с ветвей $d_{i,i}$ превращаются в решения с ветви d_{2s} , т.е. ветви $d_{i,i}$ исчезают.

Предельное значение r (10) соответствует $\varepsilon_0 = 0$. В этом случае минимум потенциала лежит на левом

электроде. При $0 < r < r_{\text{lim}}$ выражение для ε_0 выводится из соотношения (7), если его использовать на интервале $[0, \xi_M]$.

Аналогично доказывается, что справа от точки ξ_m может существовать волна с $\eta_{\text{min}} = \eta_m = -1/2$, но $\eta_{\text{max}} < \eta_M = V + 1/2$. Чтобы найти связь между η_{max} и r , нужно рассмотреть (7) на участке $[\xi_m, \xi_{\text{max}}]$. Здесь также значение r ограничено сверху, и эта величина соответствует нулевой напряженности поля на правом электроде. Предельная величина r равна r_{lim} (10). Таким образом, граничному значению $r = r_{\text{lim}}$ соответствуют нулевые величины напряженностей электрического поля на обоих электродах.

Ветви решений $d_{i,i}$ строятся следующим образом. Фиксируется i минимумов, находящихся слева от p -ВЭ, i максимумов, находящихся справа от e -ВЭ, и параметр r варьируется от r_{lim} (10) до нуля. В этом случае $|\varepsilon_0|$ изменяется от нуля при $r = r_{\text{lim}}$ до максимального значения, соответствующего границе режима без отражения частиц (формула (8) с $r = 0$). Таким образом, ветви решений $d_{i,i}$ лежат либо в полосе между $(0, \varepsilon_{0,\text{max}})$, либо в полосе $(-\varepsilon_{0,\text{max}}, 0)$ и начинаются в точках, где заканчиваются ветви n_s .

Из рисунка видно, что при значении δ , большем некоторой величины, появляется несколько решений, причем с ростом δ их число увеличивается. Это явление характерно для всех величин γ_0 .

Таким образом, в работе изучены стационарные состояния диода со встречными потоками релятивистских электронов и позитронов с нулевой разностью потенциалов между электродами. Показано, что, так же как и в нерелятивистском режиме [5], РП являются волнообразными функциями. Дана полная классификация всех решений как для режима без отражения, так и для режима с отражением частиц.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

- [1] H. Chen, F. Fiuza, Phys. Plasmas, **30** (2), 020601 (2023). DOI: 10.1063/5.0134819
- [2] В.С. Бескин, УФН, **188** (4), 377 (2018). DOI: 10.3367/UFNr.2017.10.038216 [V.S. Beskin, Phys. Usp., **61** (4), 353 (2018). DOI: 10.3367/UFNe.2017.10.038216].
- [3] K. Qu, S. Meuren, N.J. Fisch, Phys. Plasmas, **29** (4), 042117 (2022). DOI: 10.1063/5.0078969
- [4] V.I. Kuznetsov, L.A. Bakaleinikov, E.Yu. Flegontova, Phys. Plasmas, **29** (22), 112115 (2022). DOI: 10.1063/5.0125091
- [5] А.Я. Эндер, В.И. Кузнецов, А.А. Груздев, Физика плазмы, **42** (10), 891 (2016). [A.Ya. Ender, V.I. Kuznetsov, A.A. Gruzdev, Plasma Phys. Rep., **42** (10), 936 (2016). DOI: 10.1134/S1063780X16100032].
- [6] В.Р. Бурсиан, В.И. Павлов, Журн. Рус. физ.-хим. общ-ва, **55** (1-3), 71 (1923).
- [7] A.Ya. Ender, V.I. Kuznetsov, H. Schamel, Phys. Plasmas, **18** (3), 033502 (2011). DOI: 10.1063/1.3562115