Журнал технической физики, 2024, том 94, вып. 11

04

Развитие неустойчивости в диоде Бурсиана

© В.И. Кузнецов, В.Ю. Коекин, М.А. Захаров, И.К. Морозов

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: victor.kuznetsov@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 24 июля 2024 г.
В окончательной редакции 16 августа 2024 г.
Принято к публикации 18 августа 2024 г.

Изучена устойчивость стационарных состояний диода Бурсиана (вакуумного диода с пучком электронов) в режиме с отрицательной разностью потенциалов между коллектором и эмиттером. С использованием линейной теории показано, что решения, соответствующие средней (overlap) ветви, являются апериодически неустойчивыми. Численно изучено развитие этой неустойчивости на нелинейной стадии. Использовался высокоточный Е,К-код. Оказалось, что в зависимости от фазы возмущения процесс развивается в противоположных направлениях, и завершается в стационарных состониях, лежащих на разных ветвях решений. На решения с нижней (normal) ветви процесс выходит апериодическим образом с декрементом, совпадающим с найденным по линейной теории. С другой стороны, на стационарные решения с отражением процесс выходит колебательным образом.

Получено общее выражение для закона сохранения энергии в системе диод — внешняя цепь. В расчетах развития неустойчивости этот закон выполнялся с высокой точностью.

Ключевые слова: диод Бурсиана, эмиттер, неустойчивость.

DOI: 10.61011/JTF.2024.11.59097.239-24

Введение

В диоде Бурсиана поток электронов поступает в вакуумный промежуток с эмиттера с функцией распределения по скоростям (ФРС), близкой к монокинетической, и имеет конечную среднюю скорость [1]. В определенном интервале плотностей тока j_0 при фиксированной величине j_0 система уравнений, описывающих стационарные состояния диода, может иметь несколько решений. Этот результат впервые был получен в [2]. Решения у диода Бурсиана и их устойчивость изучаются уже более 100 лет (см., например, [3–7] и ссылки в них). При фиксированной разности потенциалов между коллектором и эмиттером U стационарные решения удобно представлять точками на плоскости $\{\varepsilon_0, \delta\}$, где ε_0 и δ — безразмерные напряженность электрического поля на эмиттере и межэлектродное расстояние (см., например, [7]). Эти точки ложатся на непрерывные линии (ветви решений). Имеются три ветви: нижняя ветвь (normal), средняя ветвь (overlap) и верхняя ветвь с отражением электронов от виртуального катода (ВК) (рис. 1).

В соответствии с линейной теорией [8] решения, принадлежащие normal ветви, являются устойчивыми относительно малых возмущений, а overlap ветви — апериодически неустойчивыми. Для решений с отражением к настоящему времени линейная теория еще не создана.

В настоящей работе мы изучаем численно, как развивается возмущение решений с неустойчивой ветви overlap, и определяем, в каких состояниях завершается нестационарный процесс. Для этой цели мы используем высокоточный Е,К-код [9]. Показано, что на начальном этапе процесс развивается в соответствии с предсказанием линейной теории, а амплитуда возмущения изменяется по экспоненциальному закону [8]. Однако в зависимости от того, какую фазу имеет возмущение, процесс идет в разных направлениях, и завершается выходом на стационарное решение либо с ветви normal, либо с ветви с отражением электронов. При этом оба конечных состояния с высокой точность совпадают с найденными ранее стационарными решениями.

В работе [10] было показано, что в режиме с $U < 0$ устойчивые состояния диода могут оказаться неустойчивыми, если во внешнюю цепь включить индуктивность. Далее нужно выяснить, как неустойчивость развивается на нелинейной стадии, а также в каких состояниях этот процесс завершится. В настоящей работе мы изучаем устойчивость состояний указанных режимов без реактивной внешней нагрузки, исследуем нелинейную стадию развития неустойчивости и выясняем, в каком состоянии этот процесс завершается. Попутно мы предлагаем форму закона сохранения энергии в системе диод — внешняя цепь, и демонстрируем выполнение этого закона в ходе расчетов.

1. Стационарные решения

Рассматриваем диод плоской геометрии. Электроды отстоят друг от друга на расстоянии d. Считаем, что электроны поступают в плазму с левого электрода со средней скоростью $\overline{v}_0 > 0$ и плотностью n_0. Частицы движутся без столкновений, а достигнув какого-либо электрода, поглощаются на нем. Для удобства рассмот-

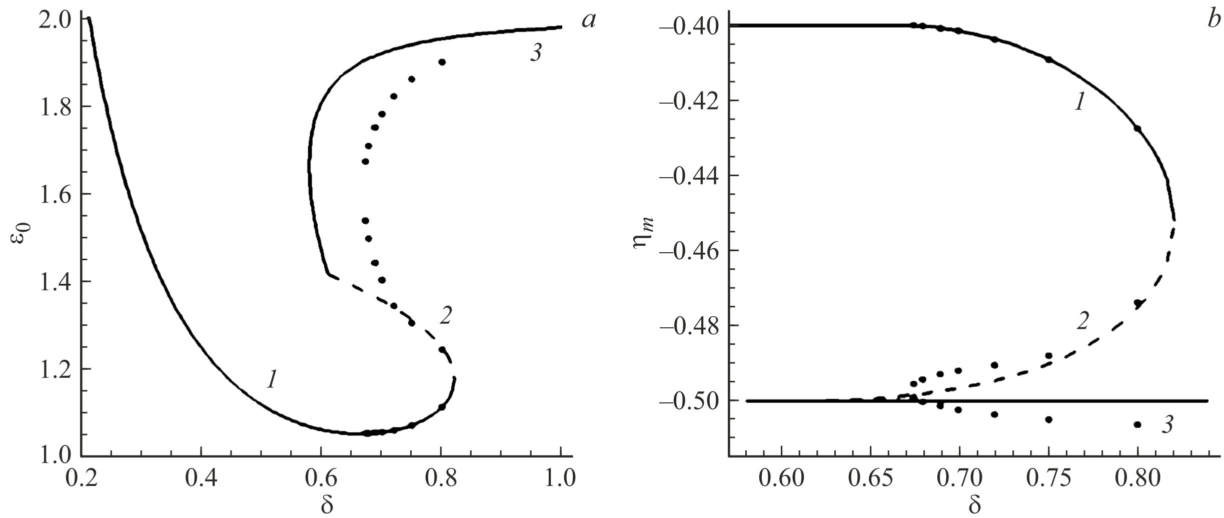

Рис. 1. Зависимость напряженности электрического поля у эмиттера (a) и минимального потенциала на РП (b) от величины межэлектродного расстояния. Сплошные линии — монокинетическая ФРС, точки — ФРС в виде „воротиков" с разбросом $\Delta = 0.01$. *1* — ветвь normal, *2* — ветвь overlap, *3* — ветвь с отражением электронов. $V = -0.4$.

рения переходим к безразмерным величинам, выбирая в качестве единиц энергии и длины энергию электронов на левой границе $W_0 = m\overline{v}_0^2/2$ и длину Дебая–Хюккеля $\lambda_D = \left[2\tilde{\epsilon}_0 W_0/(e^2 n_0)\right]^{1/2}$ (здесь e, m — заряд и масса электрона, а $\tilde{\epsilon}_0$ — диэлектрическая проницаемость вакуума). Для безразмерных координаты, потенциала, напряженности электрического поля, скорости и времени имеем: $\xi = z/\lambda_D$, $\eta = e\Phi/(2W_0)$, $\varepsilon = eE\lambda_D/(2W_0)$, $u = v/\overline{v}_0$, $\tau = t/(\lambda_D/\overline{v}_0)$. Расстояние между электродами $\delta = d/\lambda_D$, а разность потенциалов $V = eU/(2W_0)$.

При расчете ФРС и концентрации электронов в точке ξ следуем работе [11]. Мысленно разбиваем ФРС на эмиттере $f_0(u_0)$ на группы — частицы, чьи скорости лежат в узком интервале $(u_0, u_0 + \Delta u_0)$. Для краткости будем называть эти группы „пучками". В бесстолкновительном случае концентрация $\Delta n(\xi; u_0)$ и характерная скорость $u(\xi; u_0)$ пучка в точке с потенциалом $\eta(\xi)$ выражаются через соответствующие величины на эмиттере ($\xi = 0$) простыми формулами. При этом $\Delta n(\xi; u_0)$ и $u(\xi; u_0)$ выражаются через $\eta(\xi)$, а в случае с отражением частиц — дополнительно через экстремумы на распределении потенциала (РП). Для вычисления концентрации всего потока остается только выполнить суммирование (интегрирование) по всем пучкам, которые могут попасть в точку ξ. Следует отметить, что не все частицы, вылетевшие с левого электрода, смогут достигнуть точки ξ: если начальная энергия частицы $u_0^2/2$ оказывается меньше $|\eta(\xi)|$, такая частица отразится в точке, лежащей левее точки ξ.

Используя законы сохранения числа электронов для каждого пучка (бесстолкновительный режим!)

$$\Delta n(\xi; u_0)\, u(\xi; u_0) = \Delta n(0; u_0)\, u(0; u_0) \equiv f_0(u_0)\, u_0\, \Delta u_0 \tag{1}$$

и энергии для электрона

$$\frac{1}{2}u^2(\xi;\, u_0) - \eta(\xi) - \frac{1}{2}u_0^2 = 0, \tag{2}$$

находим концентрацию пучка в точке ξ:

$$\Delta n(\xi;\, u_0) = \frac{f_0(u_0)\, u_0\, \Delta u_0}{\left[u_0^2 + 2\eta(\xi)\right]^{1/2}}. \tag{3}$$

После выполнения интегрирования по областям скоростей на левой границе, соответствующим частицам, попадающим в точку ξ, получаем полную концентрацию частиц в этой точке

$$n(\xi; u_0) = \sum_{i=0,1} \int_{\Omega_i} \frac{f_0(u_0)\, u_0\, du_0}{\left[u_0^2 + 2\eta(\xi)\right]^{1/2}}. \tag{4}$$

В (4) $i = 0$ и 1 соответствует частицам, прилетающим в точку ξ с положительными и отрицательными скоростями. Области интегрирования на эмиттере Ω_i определяются видом распределения потенциала. Отметим, что для широкого класса ФРС на эмиттере эти интегралы берутся аналитически [11,12]. Аналогичные формулы можно получить для любых моментов ФРС.

Для случая, когда ФРС вылетающих электронов является δ-функцией, для концентрации электронов получаем следующее выражение [7]:

$$n_e(\eta; r) = \alpha(r,\, \xi_m)\,(1 + 2\eta)^{-1/2},$$

$$\alpha(r,\, \xi_m) = \begin{cases} 1 + r, & \xi < \xi_m, \\ 1 - r, & \xi > \xi_m. \end{cases} \tag{5}$$

Здесь ξ_m — положение вершины ВК η_m. Если начальная энергия электронов больше $|\eta_m|$, отраженных электронов нет, $r = 0$, а $\alpha(r, \xi_m) = 1$. Для того чтобы с помощью моноэнергетической ФРС $f_0(u_0)$ описывать процесс отражения электронов от ВК, вводится коэффициент отражения электронов r, который представляет собой долю электронного потока, возвратившегося на эмиттер ($0 \le r \le 1$). Возможность „расщепления" пучка электронов в точке отражения оправдана тем, что в реальных устройствах поступающие с эмиттера электроны всегда имеют небольшой разброс по скоростям. Тогда электроны, энергии которых на эмиттере чуть больше величины потенциального барьра $|\eta_m|$, преодолевают его, а электроны с энергиями, чуть меньшими этой величины, отражаются. Для количественного описания частичного отражения электронов от ВК в стационарном режиме Бурсиан ввел коэффициент отражения электронов [2]. Тогда безразмерная плотность тока на коллектор, т. е. доля электронного потока, прошедшего за точку отражения, $j = 1 - r$. Если величина $|\eta_m| < 1/2$, коэффициент отражения $r = 0$.

Подставляя концентрацию электронов (5) в уравнение Пуассона

$$\eta'' = n_e(\eta; \eta_m) \tag{6}$$

с граничными условиями

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(\delta) = V, \tag{7}$$

и решая эту задачу, находим распределения потенциала $\eta(\xi)$ и электрического поля $\varepsilon(\xi)$ в диоде. Следует отметить, что из-за нелинейности уравнения (6) и постановки граничных условий Дирихле эта задача может иметь несколько решений для одной и той же величины δ (но, естественно, при разных значениях ε_0).

Для расчета стационарных решений для моноэнергетической ФРС получены следующие формулы [7]. В режиме без отражений РП в области $\eta < 0$ оказываются симметричными относительно положения точки минимума ξ_m. Ее координаты выражаются через напряженность электрического поля на эмиттере ε_0:

$$\eta_m = \frac{1}{8}\varepsilon_0^2(4 - \varepsilon_0^2), \quad \xi_m = \frac{1}{3}\varepsilon_0(3 - \varepsilon_0^2). \tag{8}$$

Для режима без отражения электронов в расчетах характеристик стационарных решений удобно использовать параметр τ — время пролета электрона от эмиттера до точки ξ:

$$\xi = \frac{1}{6}\tau^3 - \frac{1}{2}\varepsilon_0\tau^2 + \tau, \quad u = \frac{1}{2}\tau^2 - \varepsilon_0\tau + 1,$$
$$\eta = \frac{1}{2}(u^2 - 1), \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - \tau. \tag{9}$$

Для τ имеются следующие формулы (для ветви overlap — они помечены символом O, для normal — N):

$$\tau_O = 2\left[2\left(1 + \sqrt{1 + 2\eta}\right)\right]^{1/2} \cos\frac{\alpha - \pi}{3},$$
$$\tau_N = 2\left[2\left(1 + \sqrt{1 + 2\eta}\right)\right]^{1/2} \cos\frac{\alpha + \pi}{3}. \tag{10}$$

Здесь

$$\cos(\alpha) = -\frac{q}{2(-p/3)^{3/2}} = -\frac{6\xi}{\left[2\left(1 + \sqrt{1 + 2\eta}\right)\right]^{3/2}}, \tag{11}$$

а параметры q и p являются коэффициентами кубического уравнения $x^3 + px + q = 0$, к которому сводится 1-е уравнение (9), и равны: $q = 12\xi$, $p = -6\left(1 + \sqrt{1 + 2\eta}\right)$ (см., например, [13]).

В режиме с отражением электронов (рис. 1, кривая *3*) в качестве параметра удобно использовать коэффициент отражения r, который на этой ветви изменяется от 0 до 1. В отличие от случая, когда отраженных электронов нет ($r = 0$), в режиме с отражением РП в области $\eta < 0$ оказываются несимметричными относительно точки отражения ξ_r. Этой точке соответствуют следующие значения параметров:

$$\varepsilon_0 = \sqrt{2(1 + r)}, \quad \xi_r = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{1 + r}}, \quad \eta_r = -\frac{1}{2}. \tag{12}$$

Левее точки ξ_r

$$\eta(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\xi}{\xi_r}\right)^{4/3}, \quad \varepsilon(\xi) = \frac{2}{3\xi_r}\left(1 - \frac{\xi}{\xi_r}\right)^{1/3}, \tag{13}$$

а правее нее —

$$\eta(\xi) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1 - r}{1 + r}\right)^{2/3}\left(\frac{\xi}{\xi_r} - 1\right)^{4/3},$$
$$\varepsilon(\xi) = \frac{2}{3\xi_r}\left(\frac{1 - r}{1 + r}\right)^{2/3}\left(\frac{\xi}{\xi_r} - 1\right)^{1/3}. \tag{14}$$

Стационарные решения удобно представлять точками на плоскости (ε_0, δ). При фиксированном значении потенциала V эти точки образуют отдельные кривые, которые называются ветвями решений [9]. Эти ветви для случая моноэнергетической ФРС показаны сплошными кривыми на рис. 1.

Теперь рассмотрим случай, когда поток электронов имеет ФРС в виде „воротиков"

$$f_0(u_0) = (2\Delta)^{-1}\Theta\left[\Delta^2 - (1 - u_0)^2\right]. \tag{15}$$

Здесь $\Theta(x)$ — функция Хевисайд. Она равна единице при $x \ge 0$ и 0 при $x < 0$. Такую ФРС электронов на эмиттере мы будем использовать в численных расчетах процесса развития неустойчивости.

В режиме без отражения электронов потенциал в минимуме $\eta_m > -(1 - \Delta)^2/2$, и все вылетевшие с левой границы электроны достигают противоположного электрода. В режиме с отражением η_m изменяется в интервале $[-(1 + \Delta)^2/2, -(1 - \Delta)^2/2]$. Отражение электронов начинается в точке $\xi_- < \xi_m$, где потенциал $\eta = -(1 - \Delta)^2/2$ (ξ_m — положение минимума у РП). На участке $(0, \xi_-)$ присутствуют как электроны, вылетевшие с левого электрода и движущиеся к правой границе, так и электроны, отразившиеся от барьера на участке $(\xi_-,\ \xi_m)$. На этом участке и формируется поток отраженных электронов. На участке $(\xi_m,\ \delta)$ присутствуют только электроны, преодолевшие потенциальный минимум η_m и движущиеся к правому электроду. С использованием формулы (4) для концентрации электронов получаются следующие выражения [9]:

$$n_e(\eta,\eta_m) = \frac{1}{2\Delta}\begin{cases} \sqrt{(1+\Delta)^2+2\eta} - \sqrt{(1-\Delta)^2+2\eta}, \\ \qquad \eta_m > -\frac{1}{2}(1-\Delta)^2 \\ \sqrt{(1+\Delta)^2+2\eta} + \sqrt{-2\eta_m+2\eta} \\ \qquad -2\sqrt{(1-\Delta)^2+2\eta}, \\ \qquad \xi < \xi_m, \eta > -\frac{1}{2}(1-\Delta)^2, \\ \sqrt{(1+\Delta)^2+2\eta} + \sqrt{-2\eta_m+2\eta}, \\ \qquad \xi < \xi_m, \eta < -\frac{1}{2}(1-\Delta)^2, \\ \sqrt{(1+\Delta)^2+2\eta} - \sqrt{-2\eta_m+2\eta}, \\ \qquad \xi > \xi_m. \end{cases} \tag{16}$$

После подстановки концентрации (16) в уравнение Пуассона (6) и использования граничных условий (7) можно найти все РП. Их структура подробно описана в [9]. На рис. 1 решения показаны жирными точками. Видно, что ветви решений не сильно отличаются от соответствующих ветвей для случая монокинетической ФРС. Однако теперь часть решений на ветви overlap оказывается решениями с отражением электронов (для тех величин ε_0, которым соответствуют РП с $\eta_m < -(1-\Delta)^2/2$) (рис. 1, *b*). Решения так же, как и в случае монокинеической ФРС, определяются тремя безразмерными параметрами: межэлектродным расстоянием $\delta = d/\lambda_D$, разностью потенциалов между электродами $V = eU/(2W_0)$ и напряженностью электрического поля на левом электроде ε_0. Однако небольшое влияние на них оказывает и разброс по скоростям Δ. Особенно сильно она сказывается на решениях с отражением электронов.

Следует отметить, что, если разброс ФРС мал, т.е. $\Delta \ll 1$, вид ФРС внутри интервала $[(1-\Delta), (1+\Delta)]$ не должен влиять на результаты расчетов распределений концентрации электронов и полей в межэлектродном промежутке. Поэтому мы и выбрали самый простой вид ФРС с разбросом по энергиям (16).

2. Дисперсионные свойства плазмы

При изучении дисперсионных свойств плазмы в режиме без отражения электронов от потенциального барьера, когда во внешней цепи диода отсутствуют реактивные элемены, для монокинетической ФРС электронов мы используем дисперсионное уравнение [9]:

$$Z(\delta,\ \omega) = \frac{1}{\omega^4}\left[(2-i\omega T)\exp(i\omega T) - i\omega^3\delta - i\omega T - 2\right] = 0. \tag{17}$$

Это уравнение получено методом малых возмущений: решение нестационарной задачи ищется путем подстановки РП в виде

$$\eta(\tau,\ \xi) = \eta_0(\xi) + \tilde{\eta}(\xi)\exp(-i\omega\tau), \quad |\tilde{\eta}(\xi)| \ll |\eta_0(\xi)|, \tag{18}$$

в уравнение Пуассона и линеаризации нестационарной концентрации электронов по малому возмущению $\tilde{\eta}(\xi)$. В результате получается линейное интегральное уравнение для амплитуды возмущения РП $\tilde{\eta}(\xi)$. Для диода Бурсиана это уравнение удается решить аналитически [8]. После использования нулевого граничного условия на коллекторе для $\tilde{\eta}(\xi)$ и получается искомое дисперсионное уравнение.

Решения дисперсионного уравнения — это собственные числа возмущений: $\omega = \Omega + i\Gamma$, где Ω — частота, а Γ — инкремент. Известно, что для диодов с бесстолкновительной плазмой для каждой величины межэлектродного промежутка δ дисперсионное уравнение имеет счетное число решений. У диода Бурсиана для каждого стационарного решения имеется одно апериодическое и множество колебательных собственных чисел. Апериодическое решение находится путем подстановки $\omega = i\Gamma$ в уравнение (17):

$$\Gamma^{-4}\left[(2+\Gamma T)\exp(-\Gamma T) - \Gamma^3\delta + \Gamma T - 2\right] = 0. \tag{19}$$

Для решений, соответствующих normal ветви, инкременты оказываются отрицательными, а для overlap ветви — положительными. Это говорит о том, что решения с overlap ветви неустойчивы относительно малых возмущений. Путем разложения по малому Γ левой части (19) можно показать, что нулевой инкремент достигается в точке бифуркации $\delta_{SCL} = (\sqrt{2}/3)\left(1+\sqrt{1+V}\right)^{3/2}$, где смыкаются normal и overlap ветви. Для нахождения колебательных ветвей нужно решать полное комплексное уравнение (17).

Дисперсионные кривые, т.е. зависимости собственных чисел от величины межэлектродного расстояния, показаны на рис. 2. Шриховые кривые соответствуют решениям с overlap ветви (они помечены индексом „O“), а сплошные — решениям с normal ветви (они помечены индексом „N“). Апериодические ветви помечены буквой „A“, колебательные — буквой „O“. На рисунке показаны только две колебательные дисперсионные ветви, имеющие наименьшие (по абсолютной величине) декременты.

Видно, что у всех колебательных дисперсионных ветвей инкременты отрицательны, т.е. в диоде Бурсиана с $V < 0$ стационарные решения в режиме без отражения электронов от потенциального барьера могут быть только апериодически неустойчивыми, и это решения с overlap ветви.

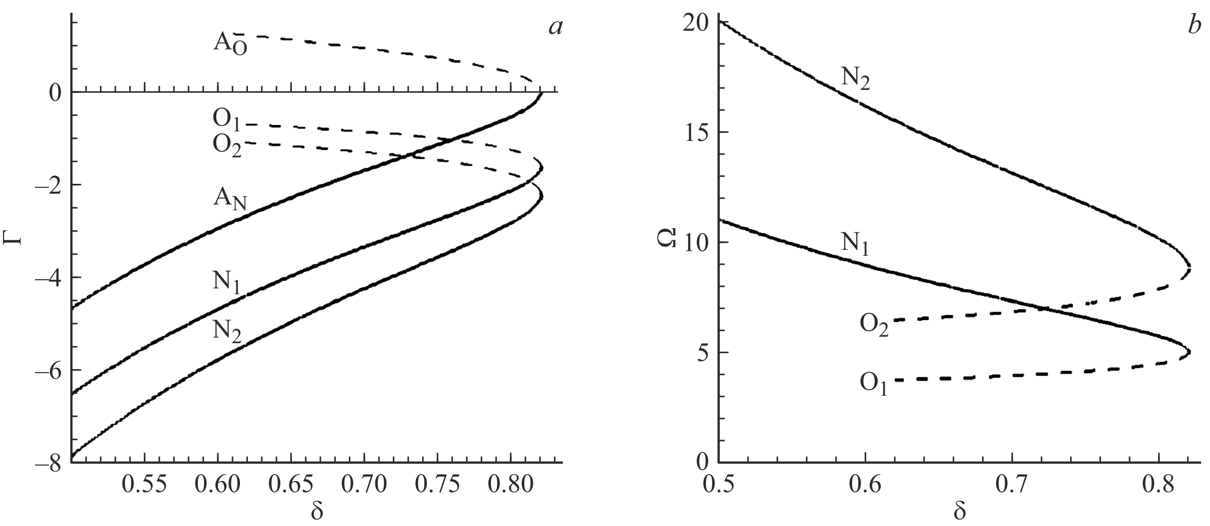

Рис. 2. Инкременты (a) и частоты (b) дисперсионных кривых, соответствующих normal (сплошные) и overlap (штриховые) ветвям, для монокинетической ФРС. $V = -0.4$.

Для изучения устойчивости решений, соответствующих ветви с отражением (кривая *3* на рис. 1), в настоящее время линейная теория отсутствует, так что устойчивость таких решений можно изучать только с использование численных методов (см., например, работу [9]). Для $\delta = 0.75$, $V = -0.4$ ниже приведены значения собственных частот, полученных нами численно.

Интересно проследить, как протекает процесс развития неустойчивости, и в каком состоянии он завершается. Этому посвящен разд. 3.

3. Численные расчеты процессов развития неустойчивости

Численные расчеты развития возмушения мы проводим с использованием E,K-кода. Подробно он описан, например, в работе [9]. В расчетах использовались форма возмущения электрического поля и инкременты, найденные по линейной теории. В качестве начального рассматривалось неустойчивое стационарное решение на ветви overlap для $\delta = 0.75$, $V = -0.4$. Поскольку в E,K-коде не предусмотрено использование монокинетической ФРС, она бралась в виде (16) с разбросом $\Delta = 0.01$. Для выбранных значений параметров рассматриваемое стационарное состояние соответствует режиму без отражения электронов, что видно из рис. 1, b ($\eta_m > -(1-\Delta)^2/2$). На этом рисунке видно также, что при этих значениях пераметров могут существовать еще два стационарных решения: одно (без отражения электронов) лежит на normal ветви (кривая *1*), а другое — на ветви с отражением (кривая *3*). Посмотрим, может ли нестационарный процесс завершиться в каком-либо из этих решений.

В расчетах выбирались следующие величины пространственно-временных ячеек: по координате бралось 200 точек деления, т.е. $\Delta\xi = 0.00375$, а временной шаг $\Delta\tau = 0.02$. Начальное условие — на первых 400-х временных шагах распределение электрического поля в зазоре задавалось равным сумме стационарного поля и возмущенния:

$$\varepsilon(\tau,\, \xi) = \varepsilon(0,\, \xi) + a\, F(\xi)\, \exp(\Gamma\tau),$$

$$F(\xi) = -\Gamma^{-3} u(t)^{-1}\Big[(1+\Gamma t)\, \exp(-\Gamma t) + 1/2\Gamma^2 t^2 - \varepsilon_0 \Gamma^2 t + \Gamma^2 - 1\Big]. \tag{20}$$

На рис. 3 сплошной кривой показаны нормированные возмущения электрического поля (рис. 3, a) и распределения потенциала (рис. 3, b), а соответствующие зависимости, полученные в расчетах, — штриховой. Видно, что теоретические зависимости для монокинетической ФРС и зависимости, полученные в расчетах для пучка с разбросом, близки. Здесь t связано с ξ формулами (9), (10); a — амплитуда возмущения поля, а $F(\xi)$ — форм-фактор, который не изменяется в течение начальной стадии развития возмущения, так как процесс является апериодическим. Для выбранных параметров линейная теория дает значение инкремента $\Gamma = 0.738$. Величина амплитуды a полагалась равной 10^{-5}. Форм-фактор $F(\xi)$ определялся по возмущению электрического поля, найденному по линейной теории. На рис. 3 он показан сплошной кривой, а форм-фактор, полученный в расчетах, — штриховой. Видно, что форм-факторы для монокинетической ФРС и для пучка с разбросом близки.

В линейной теории амплитуда возмущения определяется с точностью до фазы. Как будет показано ниже, при выборе фазы, равной нулю (знак „+“ у a), процесс идет в сторону normal ветви (кривая *1* на рис. 1), а при фазе, равной π (знак „-“ у a), — в сторону ветви с отражением (кривая *3* на рис. 1).

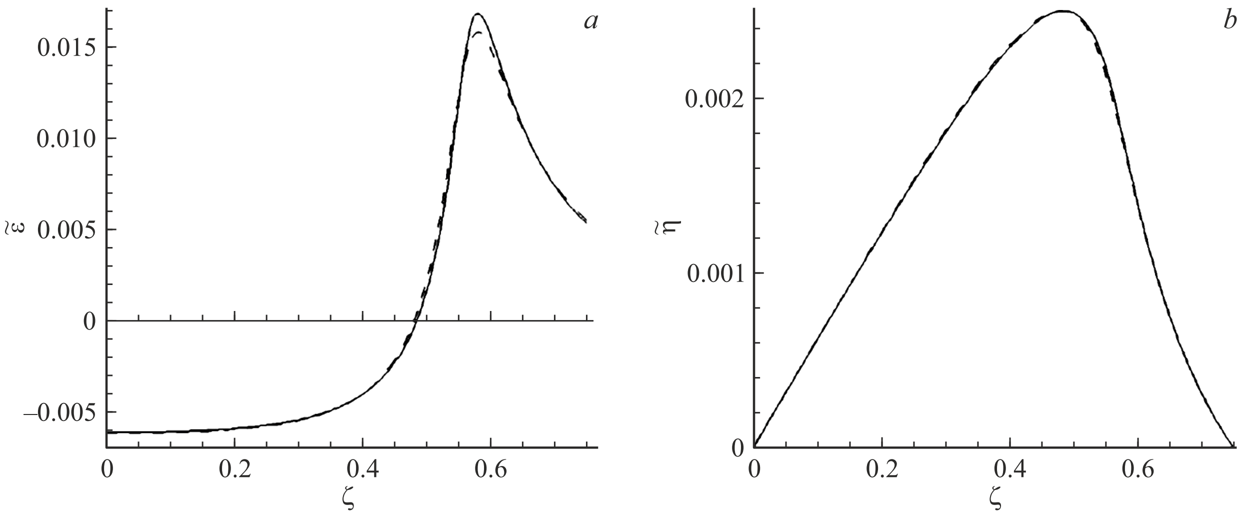

Рис. 3. Возмущения распределений электрического поля (a) и потенциала (b). Сплошная кривая получена из линейной теории для монокинетической ФРС, штриховая — из расчетов для пучка с разбросом $\Delta = 0.01$. Обе кривые масштабированы на максимум возмущения РП. $\delta = 0.75$, $V = -0.4$.

Расчеты показали, что, если у амплитуды возмущения выбрать знак „+“, процесс завершается выходом на стационарное решение, соответствующее normal ветви. Это видно на рис. 4 и 5 (кривые *1*), где показаны временные эволюции напряженностей электрического поля и конвекционного тока на эмиттере и коллекторе, а также на рис. 6 (кривые *1*), демонстрирующего временные эволюции минимума потенциала и его положения. Видно также, что на начальном этапе возмущение развивается апериодически. Это подтверждается неизменностью формы возмущения электрического поля.

Высокая точность Е,К-кода позволяет из рассчитанных характеристик процесса извлекать величину инкремента. Обработка нестационарной зависимости $f_i(\tau_i)$ проводилась по методу наименьших квадратов. Для этого использовалась аппроксимирующая функция следующего вида:

$$f(\tau) = c + [a\ \cos(\omega\tau) + b\ \sin(\omega\tau)]\exp(\Gamma\tau). \qquad (21)$$

Метод наименьших квадратов в данном случае заключается в минимизации функционала пяти переменных:

$$M(c, a, b, \omega, \Gamma) = \sum_i [f_i(\tau_i) - f(\tau_i)]^2. \qquad (22)$$

Поиск коэффициентов, при которых достигается минимум функционала (22), проводился методом градиентного спуска. Вычисленный инкремент оказался равным 0.752, что практически совпадает с инкрементом, найденным по линейной теории с использованием монокинетической ФРС электронов на эмиттере ($\Gamma = 0.738$).

Из рис. 4–6 видно, что при выборе у возмущения фазы, равной 0 (знак „+“ у a), процесс выходит на стационарное решение, и оно совпадает с решением, лежащим на normal ветви. Выход происходит апериодическим образом. Из расчетов удалось найти величину декремента. Она оказалась равной -1.138 и практически совпала с найденной по линейной теории с монокинетической ФРС электронов на эмиттере ($\Gamma = -1.133$). При этом как в ходе начальной стадии развития возмущения, так и при выходе на стационарный режим, полученная в ходе обработки процесса частота ω оказалась равной нулю, что соответствует апериодическому характеру процесса.

С другой стороны, при выборе у возмущения фазы, равной π, процесс завершается выходом на стационарное решение, соответствующее ветви с отражением электронов от ВК (ветвь *3* на рис. 1). Это видно из рис. 4 и 5, где показаны временные эволюции напряженностей электрического поля и конвекционного тока на эмиттере и коллекторе, а также рис. 6, демонстрирующего временные эволюции минимума потенциала и его положения. В отличие от случая, когда выбиралась нулевая фаза, и процесс выходил на решение без отражения электронов, выход на стационарное решение с отражением происходит через затухающие колебания. Из расчетов удалось определить декремент Γ и частоту Ω. В результате обработки зависимости напряженности электрического поля на эмиттере от времени по методу наименьших квадратов значения этих величин получились равными -0.43 и 5.19 соотвественно.

На рис. 7 показана эволюция распределения потенциала $\eta(\tau, \xi)$ и концентрации электронов $n(\tau, \xi)$ в межэлектродном промежутке, когда происходит переход в режим с отражением электронов. При появлении отраженных частиц можно увидеть, что на распределении концентрации частиц $n(\tau, \xi)$ возникают сильные градиенты в окрестности минимума потенциала. Кроме того, видно, что по координате концентрация изменяется более, чем на порядок. Для обеспечения высокой точности расчета $n(\tau, \xi)$ нам потребовалось в каждый момент τ дополнительно вычислять концентрацию в

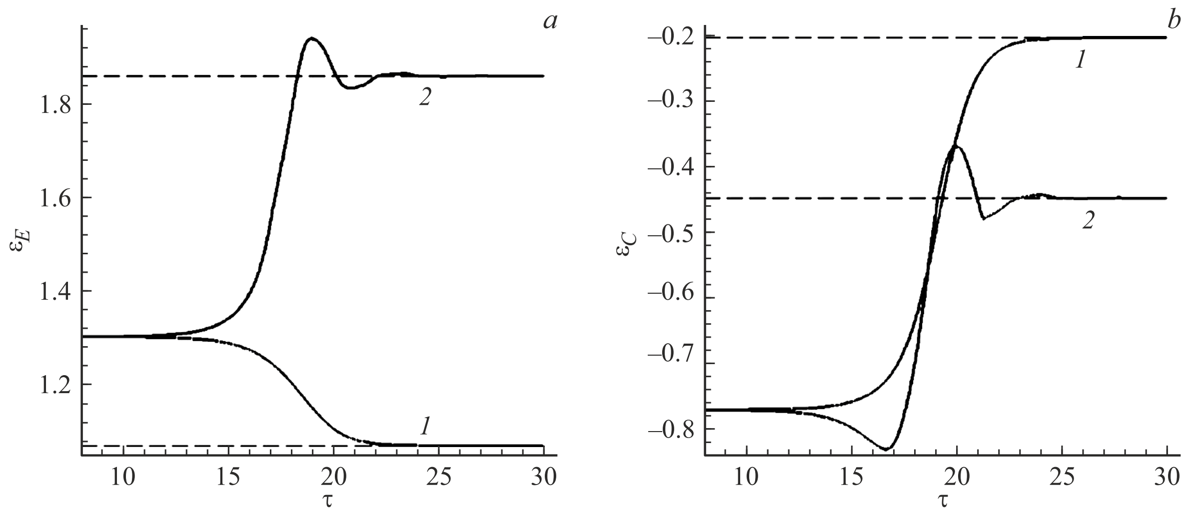

Рис. 4. Временные эволюции напряженностей электрического поля на эмиттере (a) и коллекторе (b) для фазы возмущения 0 (*1*) и π (*2*). Штриховые прямые соответствуют стационарным решениям для $\delta = 0.75$, $V = -0.4$, $\Delta = 0.01$.

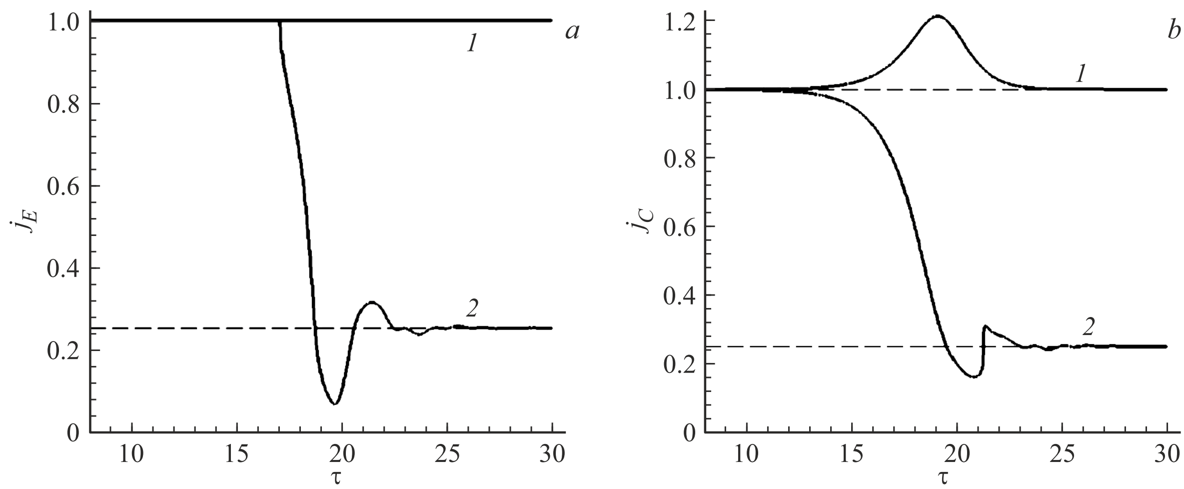

Рис. 5. Временные эволюции конвекционного тока на эмиттере (a) и коллекторе (b) для фазы возмущения 0 (*1*) и π (*2*). Штриховые прямые имеют тот же смысл, что и на рис. 4.

промежуточных точках ячеек, примыкающих к максимуму концентрации.

4. Законы сохранения в системе диод — внешняя цепь

В ходе расчетов мы проверяли выполнение законов сохранения полного тока, а также энергии в системе диод — внешняя цепь.

4.1. Сохранение полного тока

Известно, что в одномерном плазменом диоде полный ток не должен зависеть от координаты. В каждый момент времени t в точке зазора z он складывается из конвекционного тока $j_{conv}(t, z)$ и тока смещения $j_{dis}(t, z)$:

$$j(t) = j_{conv}(t, z) + j_{dis}(t, z) = j_{conv}(t, z) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}E(t, z). \tag{23}$$

На рис. 8 показана эволюция полного тока на эмиттере и коллекторе для случаев, когда процесс завершается выходом на normal (рис. 8, a) и ветвь с отражением (рис. 8, b). Видно, что в обоих процессах эти токи совпадают с высокой степенью точности. Это говорит о том, что численый код работает корректно.

4.2. Закон сохранения энергии в системе диод — внешняя цепь

Закон сохранения энергии в диоде с потоком заряженных частиц формулируется следующим образом: изменение полной энергии W_{in} в межэлектродном проме-

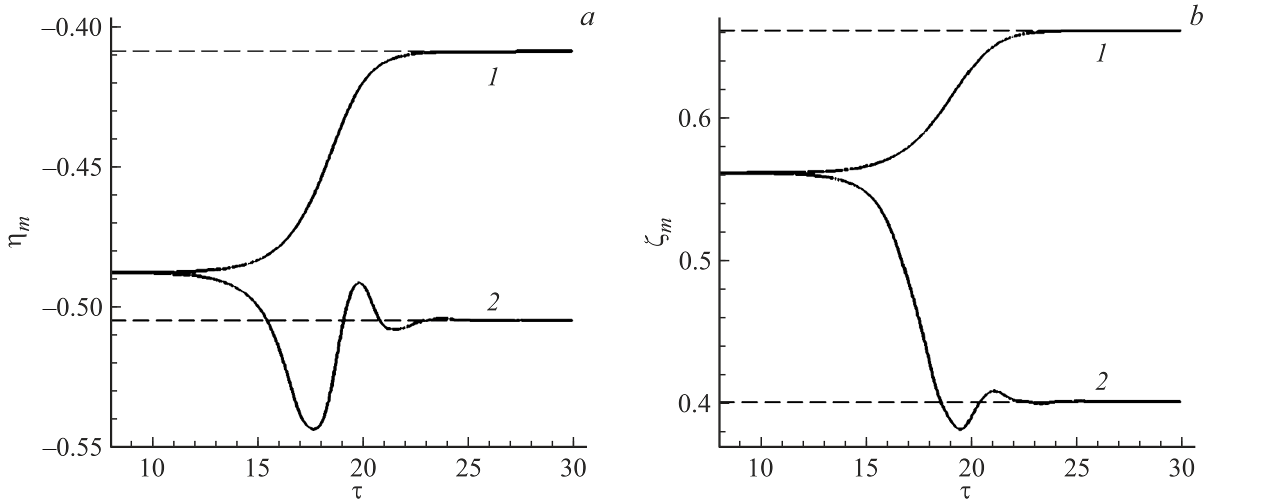

Рис. 6. Временные эволюции величины минимума потенциала (a) и его положения (b) для фазы возмущения 0 (1) и π (2). Штриховые прямые имеют тот же смысл, что и на рис. 4.

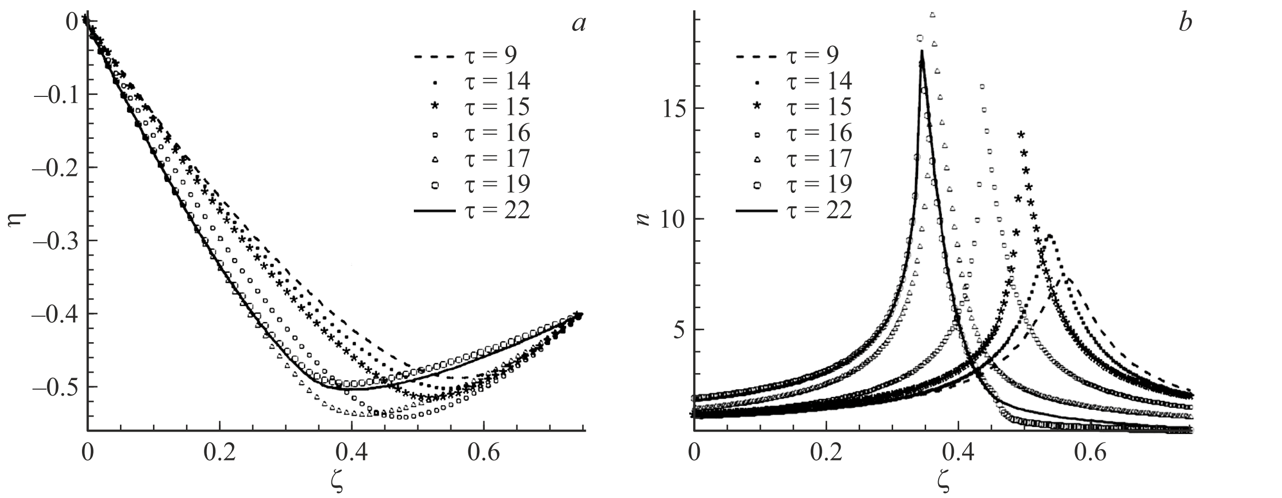

Рис. 7. Эволюции распределений потенциала (a) и концентрации электронов (b) при переходе на ветвь с отражением для ряда моментов времени τ. $\delta = 0.75$, $V = -0.4$, $\Delta = 0.01$.

жутке в единицу времени равно алгебраической сумме потоков энергии через поверхности эмиттера $S_W(t, 0)$ и коллектора $S_W(t, d)$, а также энергии, выделяемой на внешней нагрузке $P_{ec}(t)$. Рассмотрим эти составляющие подробнее.

Полная энергия W_{in} складывается из полной энергии электрического поля E, создаваемого зарядами, W_{Ef}, и кинетической энергии находящихся в объеме заряженных частиц, W_{kin}:

$$W_{in} = W_{Ef} + W_{kin} = \int_0^d \frac{1}{8\pi} E^2(x)\, dx + \int_0^d w_{kin}(x)\, dx. \tag{24}$$

Заряженные частицы, находящиеся внутри зазора, наводят на электродах поверхностные заряды. При движении частиц поверхностные заряды изменяются во времени, изменяется электрическое поле у поверхности электродов, и во внешней цепи наводится электрический ток. Это ток смещения j_{dis}. Если бы частицы не попадали на электроды (и не поступали с эмиттера), то во внешней цепи протекал бы ток j, равный j_{dis}, на внешней нагрузке выделялась бы энергия, равная $j|U|$, где U — внешнее напряжение, а через поверхности эмиттера и коллектора уходила бы энергия $-j\varphi_E$ и $j\varphi_C$, где φ_E и φ_C — работы выхода эмиттера и коллектора. Таким образом, в данном случае во внешней цепи выделялась бы энергия

$$\begin{aligned} P_{ec}(t) &= j|U| - j\varphi_E + j\varphi_C \\ &= -j(t)\,(\varphi_E - \varphi_C - |U|) = -j(t)\cdot\Phi_C. \end{aligned} \tag{25}$$

Здесь Φ_C — внутренняя разность потенциалов между электродами. Когда появляются потоки заряженных частиц через поверхности электродов, во внешней цепи к

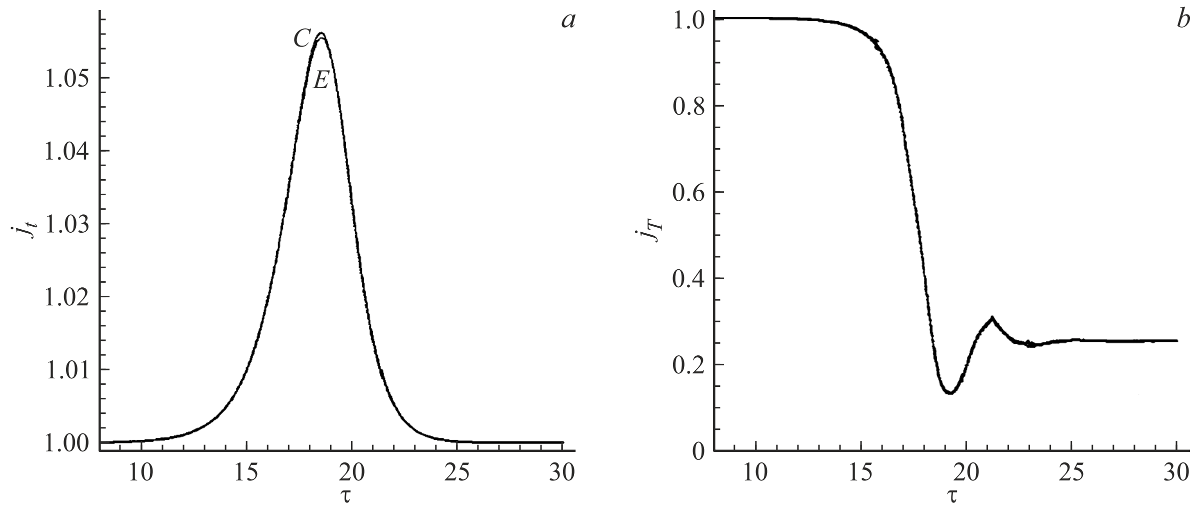

Рис. 8. Временные эволюции полного тока на эмиттере (сплошная кривая) и коллекторе (пунктирная кривая) для фазы возмущения 0 (*a*) и π (*b*). $\delta = 0.75$, $V = -0.4$, $\Delta = 0.01$. Кривые совпадают с высокой степенью точности.

току смещения дополнительно добавляется конвекционный ток, и ток, протекающий во внешней цепи, следует определять по формуле (23). Как уже отмечалось, в одномерном случае полные токи на эмиттере и коллекторе в каждый момент времени оказываются одинаковыми.

Таким образом, закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_0^d \frac{1}{8\pi}E^2(t,x)\,dx + \int_0^d w_{kin}(t,x)\,dx\right]$$
$$= S_W(t,0) + S_W(t,d) - \Phi_C\left[j_{conv}(t,d) + \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}E(t,d)\right]. \tag{26}$$

Рассмотрим пример (рис. 9). Пусть в момент времени t бесконечно тонкая заряженная пластина с зарядом Q находится в точке Z. Обозначим E_1 напряженность электрического поля слева от пластины, а E_2 — справа от нее. Для вычисления этих полей имеем систему уравнений:

$$E_2 - E_1 = 4\pi Q,$$
$$E_2(d-Z) - E_1 Z = -\Phi_C. \tag{27}$$

Ее решение имеет вид

$$E_1 = -\frac{\Phi_C}{d} - 4\pi Q\,\frac{d-Z}{d},$$
$$E_2 = -\frac{\Phi_C}{d} + 4\pi Q\,\frac{Z}{d}. \tag{28}$$

Заряд Q наводит на поверхностях электродов поверхностные заряды. При движении пластины они изменяются со временем, изменяя электрические поля у поверхностей электродов, и во внешней цепи наводится электрический ток. Поскольку в рассматриваемом случае нет потоков заряженных частиц на поверхности

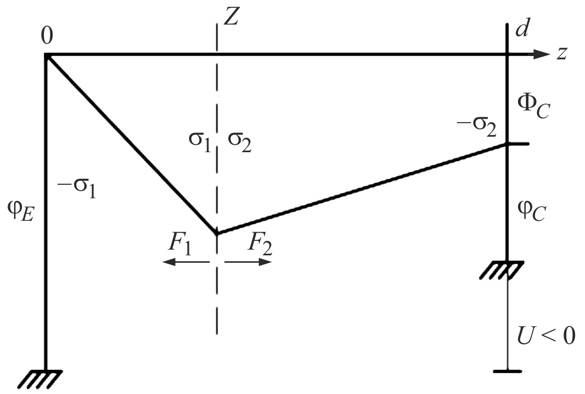

Рис. 9. Силы, действующие на бесконечно тонкий заряженный слой, при его движении в плоском диоде.

электродов, полный ток во внешней цепи совпадает с током смещения:

$$j(t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}E(t,Z) = \frac{Q}{d}\,v. \tag{29}$$

Вичислим полную энергию поля в зазоре и кинетическую энергию пластины. Для энергии электрического поля получаем

$$W_{Ef} = \int_0^d \frac{1}{8\pi}E^2(x)dx = \frac{1}{8\pi}\left[E_1^2 Z + E_2^2(d-Z)\right]$$
$$= \frac{1}{8\pi d}\left[\Phi_C^2 + 16\pi^2 Q^2 Z(d-Z)\right]. \tag{30}$$

Теперь вычислим полную кинетическую энергию движущейся пластины. Справа на каждый элемент пластины действует сила

$$F_2 = \frac{1}{2}\sigma_2 E_2 = \frac{1}{8\pi}\,E_2^2, \tag{31}$$

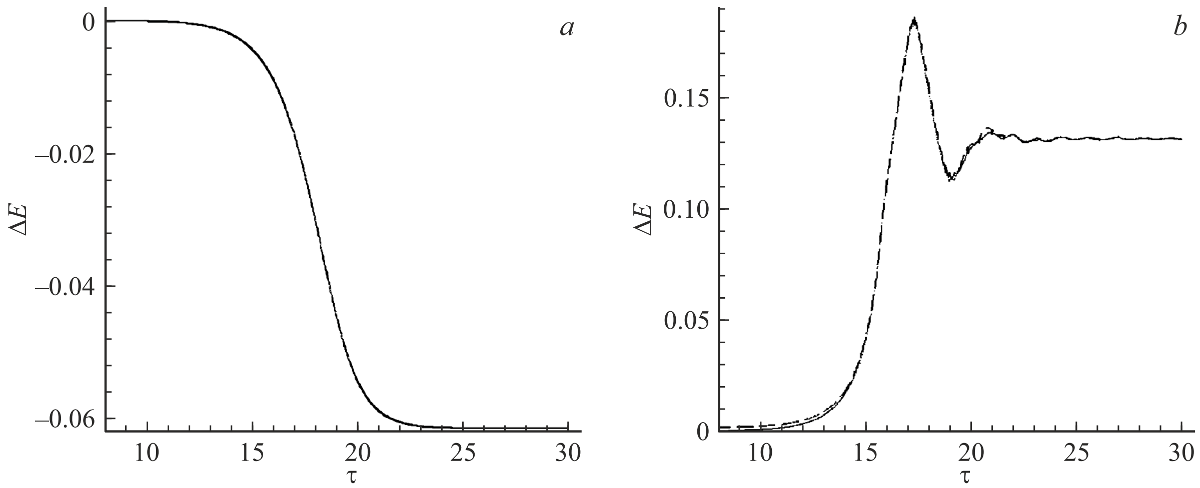

Рис. 10. Закон сохранения энергии при переходе на normal ветвь (a) и на ветвь с отражением (b). Сплошная кривая соответствует приросту полной энергии в зазоре, штриховая — сумме потоков энергии на электроды и энергии, выделившейся на внешней нагрузке. $\delta = 0.75$, $V = -0.4$, $\Delta = 0.01$.

а слева —

$$F_1 = \frac{1}{2}\sigma_1 E_1 = \frac{1}{8\pi} E_1^2. \tag{32}$$

Здесь $\sigma_{1,2}$ — плотность поверхностного заряда слева и справа от пластины соответственно. При этом обе эти силы направлены по внешней нормали к каждой из поверхностей пластины (рис. 9). Поэтому суммарная сила, действующая на заряженную пластину, равна

$$F = F_2 - F_1 = \frac{1}{8\pi}\left(E_2^2 - E_1^2\right) = \frac{4\pi Q^2}{d}\left(Z - \frac{d}{2} - \frac{\Phi_C}{4\pi Q}\right). \tag{33}$$

Уравнение движения пластины имеет вид

$$m\ddot{Z} = F = \frac{4\pi Q^2}{d}\left(Z - \frac{d}{2} - \frac{\Phi_C}{4\pi Q}\right). \tag{34}$$

Умножая обе части (34) на v и интегрируя, для кинетической энергии пластины получаем

$$W_{kin} = \frac{m v^2}{2} = \frac{m v_0^2}{2} - \frac{2\pi Q^2}{d}\left(\frac{d}{2} + \frac{\Phi_C}{4\pi Q}\right)^2 + \frac{2\pi Q^2}{d}\left(Z - \frac{d}{2} - \frac{\Phi_C}{4\pi Q}\right)^2. \tag{35}$$

Кстати, из этого выражения видно, что если зафиксировать Φ_C и d, то при превышении зарядом пластины некоторого значения, зависящего от Φ_C и d, в некоторой точке зазора скорость обратится в нуль, и пластина повернет обратно, т. е. произойдет запирание собственным электрическим полем. Например, при $\Phi_C = 0$ величина $|Q|$ должна быть больше $(m v_0^2 d/(4\pi Z(d-Z)))^{1/2}$.

Скорость изменения полной энергии в зазоре равна

$$\frac{\partial}{\partial t}(W_{Ef} + W_{kin}) = 4\pi Q^2\left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{d}\right)v + 4\pi Q^2\left(\frac{Z}{d} - \frac{1}{2} - \frac{\Phi_C}{4\pi Q d}\right)v = -\frac{Qv}{d}\Phi_C = -j\Phi_C. \tag{36}$$

Это выражение совпадает с правой частью формулы (26), что и подтверждает ее правильность для случая отсутствия потоков частиц на электроды.

В ходе расчетов мы вычисляли каждое из слагаемых формулы (26). Удобно было использовать интегральную форму закона сохранения энергии:

$$W_{in}(t) - W_{in}(t_0) = \int_{t_0}^{t} dt' \left[S_W(t', 0) + S_W(t', d) - \Phi_C j(t', d)\right]. \tag{37}$$

На рис. 10 показана эволюция левой и правой частей формулы (37) при переходах в состояние на normal ветвь (штриховая кривая) и на ветвь с отражением (пунктирная кривая). Видно, что в обоих случаях закон сохранения энергии выполняется с хорошей точностью.

Заключение

Изучены процессы развития неустойчивости в диоде Бурсиана для случая, когда между коллектором и эмиттером приложена отрицательная разность потенциалов. Показано, что из состояния, лежащего на overlap ветви, неустойчивость развивается в соответствии с линейной теорией. При этом форма возмущения остается неизменной, а инкремент близок к теоретическому. Показано также, что в зависимости от знака у амплитуды возмущения процесс может идти в разных направлениях и завершаться в разных состояниях, которые совпадают со стационарными решениями.

Для валидации расчетов проверялось, что полный ток не зависит от координаты, как должно быть в одномерном диоде. Вычисленные в ходе расчетов процессов токи на эмиттере и коллекторе практически совпадали. Получено аналитическое выражение для закона сохранения энергии в системе диод — внешняя цепь. Корректность формулы подтверждена на простом примере движения заряженного слоя в межэлектродном промежутке. В ходе расчетов было продемонстрировано, что закон сохранения энергии выполняется с хорошей степенью точности.

Проведенное исследование позволит в дальнейшем изучать процессы развития неустойчивости в системе диод — внешняя цепь при наличии реактивных элементов во внешней цепи. Возможность развития неустойчивости в режиме с $U < 0$ при наличии индуктивности была обнаружена ранее в работе [10]. В отличие от случая, когда вшеняя цепь не имеет реактивных элементов, реактивная нагрузка приводит к появлению изменяющихся во времени граничных условий для потенциала на электродах, что усложняет исследования. Важно понять, в каких состояниях завершится процесс развития неустойчивости. Полученные результаты могут оказаться полезными при создании генераторов СВЧ излучения [14,15].

Финансирование работы

Разд. 4, 5 работы выполнены при финансовой поддержке РНФ, проект № 24-22-00175; разд. 1−3 — в рамках государственного задания, номер темы FFUG-2024-0005.

Конфликт интересов

Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] М.В. Незлин. *Динамика пучков в плазме* (Энергоиздат, М., 1982)

[2] В.Р. Бурсиан, В.И. Павлов. Журн. рус. физ.-хим. общ-ва, **55** (1-3), 71 (1923).

[3] C.E. Fay, A.E. Samuel, W. Shockley. Bell Syst. Tech. J. **17** (1), 49-79 (1938). DOI: 10.1002/j.1538-7305.1938.tb00775.x

[4] R.J. Lomax. Proc. Inst. Elect. Engrs. Pt.C., **108** (13), 119 (1961). DOI: 10.1049/pi-c.1961.0018

[5] В.И. Кузнецов, А.В. Соловьев, А.Я. Эндер. ЖТФ, **64** (12), 9 (1994).

[6] P.V. Akimov, H. Schamel, H. Kolinsky et al. Phys. Plasmas., **8** (8), 3788 (2001). DOI: 10.1063/1.1383287

[7] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер. ЖТФ, **83** (12), 1 (2013).

[8] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер. Физика плазмы, **15** (41), 979 (2015). DOI: 10.7868/S0367292115110062

[9] В.И. Кузнецов, А.Я. Эндер. Физика плазмы, **36** (3), 248 (2010).

[10] V.I. Kuznetsov, A.B. Gerasimenko. J. Appl. Phys., **125**, 183301 (2019). DOI: org/10.1063/1.5090204

[11] А.Я. Эндер. *Термоэмиссионный преобразователь тепловой энергии в электрическую в кнудсеновском режиме.* (Канд. дисс. Л.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 1972)

[12] В.И. Кузнецов. *Исследование нелинейных нестационарных процессов в бесстолкновительной плазме, образующейся на поверхности.* (Канд. дисс. Л.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 1981)

[13] Г. Корн, Т. Корн. *Справочник по математике. Для научных работников*, (Наука, М., 1974)

[14] А.Е. Дубинов, В.Д. Селемир. Радиотехника и электроника, **47** (6), 545 (2002).

[15] S.E. Mumtaz, H.S. Uhm, Eun Ha Choi. Phys. Rep., **1069**, 1 (2024). DOI: org/10.1016/j.physrep.2024.03.003